

“十一五”国家重点图书出版规划项目

14

□ 数学文化小丛书

李大潜 主编

奇妙的无穷

◎ 李 忠



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

“十一五”国家重点图书出版规划项目

数学文化小丛书

李大潜 主编

奇妙的无穷

Qimiao de Wuqiong

李 忠



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

数学文化小丛书. 第2辑: 全10册 / 李大潜主编.
-- 北京: 高等教育出版社, 2013. 9
ISBN 978-7-04-033520-0

I. ①数… II. ①李… III. ①数学—普及读物 IV.
①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第226474号

策划编辑	李蕊	责任编辑	张耀明	封面设计	张楠
责任绘图	杜晓丹	版式设计	张岚	责任校对	王效珍
责任印制	朱学忠				

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社址	北京市西城区德外大街4号	网址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印刷	北京信彩瑞禾印刷厂	网上订购	http://www.landaco.com
开本	787mm×960mm 1/32		http://www.landaco.com.cn
总印张	28.125		
本册印张	2.125	版次	2013年9月第1版
本册字数	38千字	印次	2013年11月第2次印刷
购书热线	010-58581118	总定价	80.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 12-2437-42

数学文化小丛书编委会

- 顾 问：谷超豪（复旦大学）
项武义（美国加州大学伯克利分校）
姜伯驹（北京大学）
齐民友（武汉大学）
王梓坤（北京师范大学）
- 主 编：李大潜（复旦大学）
- 副主编：王培甫（河北师范大学）
周明儒（徐州师范大学）
李文林（中国科学院数学与系统科学研究所）
- 编辑工作室成员：赵秀恒（河北经贸大学）
王彦英（河北师范大学）
张惠英（石家庄市教育科学研究所）
杨桂华（河北经贸大学）
周春莲（复旦大学）
- 本书责任编辑：李 蕊

数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学，而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，是人类文明的一个重要支柱。

要学好数学，不等于拼命做习题、背公式，而是要着重领会数学的思想方法和精神实质，了解数学在人类文明发展中所起的关键作用，自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样，才能从根本上体现素质教育的要求，并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多，更远未引起各方面足够的重视，很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下，本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益，本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，由学有

专长的学者执笔，抓住主要的线索和本质的内容，由浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长，并相对独立，以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则，有的专题单独成册，有些专题则联合成册。

希望广大读者能通过阅读这套丛书，走近数学、品味数学和理解数学，充分感受数学文化的魅力和作用，进一步打开视野、启迪心智，在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005年12月

目 录

一、引言.....	1
二、在不同人眼中的无穷	3
三、数学与无穷	6
四、毕达哥拉斯学派与无理数	10
五、从欧几里得第 5 公设到非欧几何	19
六、“无穷小”与微积分	29
七、无穷求和问题	33
八、康托尔其人	41
九、在康托尔的无穷王国里	45
参考文献	58

一、引言

在学习数学的过程中，人们无一不为它内容的和谐、统一而深感其优美。可是，你可曾知道在数学发展的历程中，曾经一次又一次地出现过激烈的矛盾与冲突，有人称之为“数学危机”。而每次危机之后，数学才有了新的发展与繁荣。

当我们把数学与其他学科相比时，人们不禁为它“永恒”的确定性而感叹不已。可是，你可曾注意到，在这个最具确定性的学科中，一个最不确定的东西——“无穷”，在不知不觉中渗透于数学的许多基本概念与结论之中，并扮演着一个非同小可的神奇角色。数学的发展因为它而步履艰难；数学的成就却因为它而多姿多彩。无穷之于数学的意义，可谓奇妙。

在数学发展的历史中，曾出现过三次“数学危机”：公元前 500 年无理数的发现，17 世纪中叶微积分创立初期无穷小量问题，19 世纪末及 20 世纪初集合论所引发的矛盾。此外，关于欧几里得第 5 公设(平行公设)的讨论导致了非欧几何的诞生，虽然

不是一场危机,但在数学思想上却是一场重大革命.所有这些事情的发生无不与“无穷”有关.

在这本小册子中,我们将用通俗易懂的语言,以三次“数学危机”和非欧几何的建立为线索,来剖析“无穷”的意义,介绍数学家们为认识它、征服它所做的艰苦努力,并介绍各时期数学家们的不同主张,希望以此增进读者对数学的进一步了解与兴趣.

这是一本通俗读物.具有高中数学知识的人,都可读懂这本小册子的绝大部分内容.

希望大家喜欢它.

二、在不同人眼中的无穷

“无穷”并不是数学的专用名词，很多领域都使用它。

在日常生活中，人们会使用“无穷”或“无限”这样的词汇，来形容某种极端的事物，或者个人的感受。比如，“前途无限”，“无限崇拜”，“夕阳无限好”，“后患无穷”等等，诸如此类。这里的所谓“无穷”或“无限”只不过是一种夸张了的形容词罢了，并没有什么严格的含义。

旧日的皇帝很喜欢使用类似于“无穷”的大字眼。他们认为自己的权力与尊严“至高无上”。他们一方面草菅人命，另一方面却说他们对臣民“恩重如山”，“皇恩浩荡”。他们不仅希望自己的权力在空间上是无限的，而且还希望这种权力在时间上也要无限延续。于是他们要臣民们天天高呼“万岁”，“万寿无疆”，一直到寿终正寝为止。

在虔诚的宗教信仰徒的心中，神有着“无穷”的力量与智慧，创造了世间的万物。神的“法力无边”、“无处不在”，时时处处在保佑人们，普度众生。因此，神

就成了“无穷”的化身。

“无穷”是古今中外的哲学家们喜欢谈论的话题之一。主张辩证法的哲学家们认为“无穷与有穷是对立的统一”。他们会用“无穷”来描述世界的多样性，论述世界无限可分性。此外，他们还用“无穷”来解释绝对真理与相对真理的关系：“绝对真理是无穷多个相对真理之总和”。

然而，形而上学的哲学家们却常常利用“无穷”来否认运动与变化。最典型的代表就是古希腊的形而上学的学者芝诺 (Zeno, 公元前 5 世纪)。他的许多悖论都是如此，比如，神行太保阿希里斯不能追上乌龟的悖论。他认为，当阿希里斯走到乌龟起始点 A_0 时，乌龟走到了 A_1 ；当阿希里斯走到 A_1 时，乌龟又走到了 $A_2 \cdots \cdots$ 如此这般，阿希里斯永远赶不上乌龟。在这里他忘记了一个基本事实：点的序列 A_0, A_1, A_2, \cdots 虽是无穷的，但它们所形成的总距离是一个有穷数。

中国古代《庄子》中有一段记述：

“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”

这一段话生动地描绘了一个趋于零而不等于零的无穷过程。它还告诉我们，一个有穷量可以是无限个量之和：

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

物理学家们似乎并不喜欢谈论抽象的无穷，只有在没有办法时，才会无奈地使用无穷。比如，当他们定义一个静电场的电位时，不得不借助于无穷远的

概念：一个点的电位等于单位正电荷从“无穷远”点移动到给定点所作的功。又比如，在讨论宇宙的第二速度时，也要用到“无穷远”。

不过，物理学家们注重实际，在对待无穷的态度上要比数学家灵活得多。与数学家相比，物理学家们似乎更多一点辩证法。在他们眼中，无穷有时只是一个相对大的数而已。物理学家们有所谓“尺度”的概念。在宏观的尺度下，一纳米的长度，就可以被视为 0，而加以忽略。反过来，在纳米尺度下，一千米大概可以认为是无穷大了。

当物理学家考察一个普通的（比如，几厘米大的）凸透镜时，自阳光射来的光线就自然被视作平行线，通过凸透镜后光线会在某处聚焦。在这种情况下，太阳到凸透镜的距离被看作无穷远（见图 1）。



图 1 太阳被视为在无穷远处

三、数学与无穷

在数学家看来,大数不等于无穷,而很小很小的数也不应等于零.在他们的眼里,无穷就是无穷.在任何情况下,数学家们都不会把相对大的数看作无穷,不论它有多么之大.

当你站在海边,遥望着波涛万里、天海相连的壮观景色时,你会无限感慨:大海是如此广阔.那时,你可能会想到无穷.但是,理性会立刻告诉你,这只不过是地球的一小部分,而地球的直径只不过 12 753 千米,而其大圆周长只不过 4 万多千米.这并不是很大的数.

当你在夏天的夜晚眺望星空时,你会想到“宇宙是无穷的”.可是,对于“无穷”二字,可能仅限于一种感慨而已,并没有多少实际内容.让我们看一组天文学家提供的数字吧:

地球到月球的距离 = 38 万千米.但以光的速度行进,从地球到月亮只需 1 秒多 (光速 = 300 000 千米/秒).

太阳到地球的距离 = 约 1 亿 5 千万千米,是月

亮到地球的距离的 400 倍。

天鹅座 61 到地球的距离 = 103 万亿千米, 比太阳远 69 万倍, 以光速前进, 要花 11 年的时间. 这个距离叫做 11 光年.

银河系的直径 = 10 万光年, 其厚度 = 5 千至 1 万光年. 银河系之外, 还有许许多多类似于银河系的其他星系.

仙女座星云到地球的距离 = 170 万光年. 它离我们是何等的遥远!

看了这组数字后, 也许你对宇宙之大和自己的渺小会发出某种新的感慨. 可是, 在数学家看来, 即使是亿万光年的距离, 也决不是数学中的无穷远. 数学家们关于无穷的概念的这种近于“顽固”的态度, 是由于数学中的无穷完全是针对数学对象的某种纯理性的抽象物.

当我们谈到一条 (无限) 直线时, 实际上是把它作为一条直线段向两端无限延长的结果, 它只是一个想象的结果.

当人们讲到自然数 n 趋于无穷 (即 $n \rightarrow \infty$) 时, 实际上是数学家们设想了一个无穷大 ∞ , 用 $n \rightarrow \infty$ 来描述自然数无限制地增大的过程而已. 这里无穷大依然是一个纯理性的抽象物.

既然如此, 数学家当然就不可能把相对大的数视作无穷了.

数学家为什么要“制造”出一个“无穷”呢?

这是因为数学离不开无穷. 宇宙是无穷的. 作为描述大自然的语言, 数学必然要涉及无穷. 况且

无穷与有穷是对立的统一，任何有穷中也都包含着无穷。就像《庄子》描述的那样：一个一尺之槌可以分解成无穷段之和。数学家注定要与无穷打交道，这是不可避免的。不仅高等数学如此，即使是初等数学也是如此。比如，当我们谈及平面上两条直线平行时，实际上指的是两条永远不相交的无限直线。这里已经包含了“无穷”。

当我们谈到无理数时，认为它是一个无限不循环的小数。这里又用到了“无限”。

当我们谈论实数集合、自然数集合、有理数集合时，都必然涉及无穷多个元素。

当我们说下列公式

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

对一切自然数成立时，必然涉及无穷多个自然数。幸亏有了数学归纳法，它为我们提供了一种办法，使我们不必逐一演算这个公式。但是，本质上这个公式代表了无穷多个等式。

更不必谈到微积分和无穷级数了，那里处处涉及无穷。任何极限过程都是一个无穷过程。

不仅如此，无穷在数学中扮演着一个非同小可的角色。当我们断言三角形内角之和等于 180° 时，表面上这里与无穷无关，但不要忘记它依赖于平行公设，而平行公设必然涉及无穷。

无穷对数学的影响将从后面的叙述中进一步看出。

著名数学家希尔伯特 (Hilbert, 1862—1943) 曾

经明确指出：“数学是关于无穷的科学”，他的话并没有错。

在对待无穷的态度上，数学家们并不是铁板一块。他们之中有的承认它，有的根本拒绝它。有的不承认有所谓“实无穷”，只承认有所谓“潜无穷”。数学基础的研究者们因此分作两派：“直觉主义者”与“形式主义者”。他们争论不休，特别是在集合论问题上产生过尖锐的矛盾。

无穷与有穷是数学中一个最基本的矛盾。一方面，人的经验是有穷的，人所认识的事物是有穷的，人们的逻辑推理步骤是有穷的；另一方面，数学又必须涉及“无穷”。这就不可避免地引发了一次又一次的矛盾，甚至引发“数学危机”。数学也正是在克服这些矛盾与“危机”中向前发展。

在某种意义上可以说，数学的历史就是一幅数学家与无穷拼搏的画卷。

四、毕达哥拉斯学派与无理数

大家知道毕达哥拉斯的名字，是由于那个尽人皆知的定理，这个定理在中国也叫勾股定理。但很多人不知道以他命名的学派，更不知道这个学派中曾经发生的一个重要事件——发现了无理数，并引发了一场风波。有人称之“第一次数学危机”。这场风波本质上就是由无理数的“无穷性”而引起的。

在公元 500 多年前，古希腊的数学家、天文学家和哲学家毕达哥拉斯，为了躲避暴政跑到了意大利南部的克罗托内，并在那里组织了一个秘密团体。这个团体既是一个政治与宗教的组织，又是一个学习、研究数学、天文与哲学的学术组织。

他们有着严明的纪律，并把一切发现都归功于他们的首领——毕达哥拉斯。他们的成果也要严格保密。因此，他们的事迹，传说多于记载，而有些传说今天已无法考证。

但可以肯定，在当时他们已经掌握了相当一批几何定理的证明，特别是被后世人称之为毕达哥拉斯定理的证明。这在当时确实是一项了不起的成就。