北大燕园

2017年 李正元·范培华

考研数学 3

数学

数学三

复习全书习题全解

主编 北京大学 李正元

北京大学 尤承业

北京大学 范培华

上架建议：考试·考研数学

ISBN 978-7-5620-6504-3

9787562065043

定价：61.80元

赠

中国政法大学出版社

2017年李正元·范培华考研数学③

数学

数学三

复习全书习题全解

主编　北京大学　李正元
北京大学　尤承业
北京大学　范培华

中国政法大学出版社
2016·北京

目　　录

第一篇　微积分

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇　微积分

▶ 第一章　函数、极限、连续

一、选择题

1.【分析】 对于 ①：由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x\sin x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\dfrac{x}{x}}\cdot\sqrt{\dfrac{\sin x}{x}}=1$,

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x\sin x}}{x}=\lim_{x\to0^-}\left(-\sqrt{\frac{x}{x}}\cdot\sqrt{\frac{\sin x}{x}}\right)=-1,$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x\sin x}}{x}$ 不存在.

对于 ②：取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$, $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$,则均有 $x_n\to0,y_n\to0\ (n\to\infty)$,但

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{y_n}=1,\text{因此}\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x}\text{不存在}.$$

对于 ③：已知 $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}\sin\dfrac{1}{x}$,其中 $g(x)=\int_0^{\sin x}\cos t^2\,\mathrm{d}t$,由于

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\cos(\sin^2x)\cos x=1\neq0,$$

而 $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在,所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

对于 ④：由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=0$,

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\xlongequal{t=-\frac{1}{x}}-\lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}-\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^t=-\infty\text{(不存在)},$$

故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

综上分析,应选(D).

评注　证明函数 $f(x)$ 的极限不存在常用如下方法:

方法 1° 证明函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在的主要方法是考察 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左右极限 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 是否存在且相等. 若 $f(x_0+0)$ 或 $f(x_0-0)$ 中至少有一个不存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在;若 $f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 都存在,但 $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 也不存在. 与此类似,若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 中至少有一个不存在,或两个极限都存在,但二者不相等时极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在.

方法 2° 若存在 $x_n\to x_0$,但 $x_n\neq x_0$ 的数列 $\{x_n\}$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 不存在或有两个满足 $x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$, $y_n\to x_0(y_n\neq x_0)$ 的数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

方法 3° 利用结论：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在；若又有 $A\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ 不存在．

2.【分析】 注意到 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，本题为 1^∞ 型．设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，则原极限 $=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln f(x)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^2}}$．而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}=-\frac{1}{6},$$

故原极限 $=e^{-\frac{1}{6}}$，应选(A)．

3.【分析】 由于 $\frac{f(x)-2}{x}-\frac{xf(x)+\ln(1-2x)}{x^2}=-\frac{\ln(1-2x)+2x}{x^2}$，

所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{xf(x)+\ln(1-2x)}{x^2}-\frac{\ln(1-2x)+2x}{x^2}\right]\\&=4-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)+2x}{x^2}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}4-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2}{1-2x}+2}{2x}\\&=4-\lim_{x\to 0}\frac{-4x}{2x}=6.\end{aligned}$$

故选(C)．

4.【分析】 反证法．若 $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $x=a$ 连续，由连续函数的四则运算法则可得 $\varphi(x)=\frac{\varphi(x)}{f(x)}\cdot f(x)$ 必在 $x=a$ 连续，与假设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 间断矛盾，从而 $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必在 $x=a$ 间断．故选(D)．

也可用举例法来否定(A)，(B)，(C)三个选项．例如：设 $f(x)\equiv 1$，$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，$\varphi(x)$ 在 $x=0$ 间断，但 $\varphi[f(x)]\equiv 1(\forall x\in(-\infty,+\infty))$ 成立，$f[\varphi(x)]\equiv 1(\forall x\in(-\infty,+\infty))$ 成立，$\varphi^2(x)\equiv 1(\forall x\in(-\infty,+\infty))$ 成立．这表明不应选(A)，(B)，(C)．

5.【分析】 由 $\big||f(x)|-|f(a)|\big|\leqslant|f(x)-f(a)|$ 可知当 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续可推知 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 连续；而由 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant a,\\ -1 & x<a\end{cases}$ 知 $|f(x)|\equiv 1(\forall x\in(-\infty,+\infty))$ 成立，从而 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 连续，但 $f(x)$ 却在 $x=a$ 间断.

以上讨论表明"$f(x)$ 在点 a 连续"是 $|f(x)|$ 在点 a 处连续的充分非必要的条件．应选(B)．

6.【分析】 由已知条件 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{\frac{1}{x_n}}=0$ 可知，当 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 是无穷小量时 $\{y_n\}$ 是较 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 高阶的无穷小量，即(D)正确．

也可用举例法来否定(A)，(B)，(C)三个选项．

例如：设 $x_n=n$，$y_n=0(n=1,2,3,\cdots)$，于是 $\{x_n\}$ 发散，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，但 $\{y_n\}$ 收敛．这表明(A)不正确．

设 $x_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数},\\ n, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ $y_n=\begin{cases}n, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 则 $\{x_n\}$ 无界且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，但 $\{y_n\}$ 也无界．这表明(B) 不正确．

设 $x_n=\begin{cases}1, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ $y_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & n\text{ 为奇数},\\ n, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 则 $\{x_n\}$ 有界且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，但 $\{y_n\}$ 并非无穷小量．这表明(C) 不正确．

7.【分析】 设 $x_n=n\pi(n=1,2,3,\cdots)$，则 $f(x_n)=0(n=1,2,3,\cdots)$；

设 $y_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}(n=1,2,3,\cdots)$，则 $f(y_n)=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}(n=1,2,3,\cdots)$．

这表明结论(A)，(B)，(D) 都不正确，而(C) 正确．

8.【分析】 注意当 $x\in(-1,0)$ 时有

$$|f(x)|=\left|\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}\right|=\left|\frac{\sin(x-2)}{x-2}\right|\cdot\frac{1}{|(x-1)(x-2)|}$$

$$<\frac{1}{|(x-1)(x-2)|}<\frac{1}{2}.$$

这表明 $f(x)$ 在$(-1,0)$ 内有界．故应选(A)．

也可以计算极限：

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to2^-}f(x)=-\infty,$$

故 $f(x)$ 在区间$(0,1)$，$(1,2)$，$(2,3)$ 内都是无界的．

9.【分析】 $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}=o\left(\dfrac{1}{x}\right)(x\to\infty)\ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{ax^2+bx+c}}{\frac{1}{x}}=0$

$$\Leftrightarrow\ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{ax^2+bx+c}=0\ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(ax+\frac{c}{x}\right)+b=\infty$$

$$\Leftrightarrow\ \lim_{x\to\infty}ax=\infty\ (\forall\, b,c)\text{ 成立}\ \Leftrightarrow\ a\neq0,b\text{ 与 }c\text{ 任意．故应选(C)．}$$

10.【分析】 计算可得

$$f(0+0)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x+1}=1,$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}=-\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x+1}=-1,$$

由于 $f(0+0)$ 与 $f(0-0)$ 存在但不相等，故 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的可去间断点. 应选(B)．

11.【分析一】 因 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x(1-\cos\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{\tan x-x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{\frac{1}{\cos^2x}-1}$

$$=\lim_{x\to0^+}\cos^2x\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin^2x}=+\infty,$$

即当 $x\to0^+$ 时 α 是比 β 高阶的无穷小量，α 与 β 应排列为 β,α．故可排除(A) 与(D)．

又因 $$\lim_{x\to0^+}\frac{\gamma}{\alpha}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\frac{2-x^3}{2}\right)^x-1}{\tan x-x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln\left(1-\frac{x^3}{2}\right)}-1}{\tan x-x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\ln\left(1-\frac{x^3}{2}\right)}{\tan x-x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{x^4}{\tan x-x}=-2\lim_{x\to0^+}\frac{x^3}{\frac{1}{\cos^2x}-1}=-2\lim_{x\to0^+}\cos^2x\lim_{x\to0^+}\frac{x^3}{\sin^2x}=0,$$

即当 $x\to0^+$ 时 γ 是较 α 高阶的无穷小量,α 与 γ 应排列为 α,γ . 可排除(B),即应选(C) .

【分析二】 确定无穷小 α,β,γ 的阶数 . 由

$$\lim_{x\to0+}\frac{\alpha}{x^n}=\lim_{x\to0+}\frac{\tan x-1}{x^n}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{\cos^2x}-1}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to0+}\frac{\sin^2x}{nx^{n-1}}\overset{n=3}{=\!=\!=}\frac{1}{3},$$

可知 α 为 x 的 3 阶无穷小 . 由

$$\lim_{x\to0+}\frac{\beta}{x^n}=\lim_{x\to0+}\frac{\int_0^x(1-\cos\sqrt{t})\,dt}{x^n}=\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{2}x}{nx^{n-1}}\overset{n=2}{=\!=\!=}\frac{1}{4},$$

可知 β 是 x 的 2 阶无穷小 . 由

$$\gamma=\left(1-\frac{1}{2}x^3\right)^x-1\sim\ln\left[\left(1-\frac{1}{2}x^3\right)^x-1+1\right]=x\ln\left(1-\frac{1}{2}x^3\right)\sim-\frac{1}{2}x^4,$$

可知 γ 是 x 的 4 阶无穷小 .

因此排列为 β,α,γ,选(C) .

12.**【分析】** 本题四个极限都可以化成 $e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1\pm x)}{x^n}}$ 的形式,其中 $n=2,3$,故只需讨论极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1\pm x)}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\pm x}{x^n}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}\left(\pm\frac{1}{x}\right), & n=2,\\ \lim\limits_{x\to0}\left(\pm\frac{1}{x^2}\right), & n=3.\end{cases}$$

要选择该极限为 $+\infty$ 的,仅当 $n=3$ 并取“+”号时,即

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x^3}=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x^3}}=+\infty.\text{选(D)}.$$

二、填空题

1.**【分析】** $$\lim_{x\to0}[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]^{-\frac{1}{x}}\overset{1^\infty}{=\!=\!=}e^{-\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]}{x}}=e^{-\lim\limits_{x\to0}\frac{\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}-1}{x}}$$

$$=e^{\delta\lim\limits_{x\to0}\frac{K^{-x}-1}{-x}+(1-\delta)\lim\limits_{x\to0}\frac{L^{-x}-1}{-x}}=e^{\delta\ln K+(1-\delta)\ln L}=K^\delta L^{1-\delta}.$$

2.**【分析】** 对任何常数 a 和 b, $f(x)$ 分别在 $(-\infty,0]$, $(0,+\infty)$ 连续,且 $f(0)=a$, $f_+(0)=b$. 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续 $\Leftrightarrow$ $f(0)=f_+(0)$ $\Leftrightarrow$ $a=b$.

3.**【分析】** $\forall k>0$,有

$$\lim_{x\to0}\frac{1+x^2-e^{x^2}}{x^k}=\frac{1}{k}\lim_{x\to0}\frac{2x-2xe^{x^2}}{x^{k-1}}=\frac{2}{k}\lim_{x\to0}\frac{1-e^{x^2}}{x^{k-2}}=-\frac{2}{k}\lim_{x\to0}x^{4-k}=\begin{cases}0, & 0<k<4,\\ -\frac{2}{k}, & k=4,\\ \infty, & k>4.\end{cases}$$

即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x^2-e^{x^2}}{x^4}=-\dfrac{1}{2}\neq0$,故当 $x\to0$ 时 $1+x^2-e^{x^2}$ 是 x 的 4 阶无穷小.

或用 e^{x^2} 的泰勒展开式 $e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)$,由 $1+x^2-\left[1+x^2+\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)\right]$可知其为 x 的 4 阶无穷小.

4.【分析】 因 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(3x)}=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(3x)}{x}=\dfrac{1}{2}$,故

$$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{x}\xlongequal{2x=3y}\lim_{y\to0}\frac{f(3y)}{\frac{3}{2}y}=\frac{2}{3}\lim_{y\to0}\frac{f(3y)}{y}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

5.【分析】 注意,当 $a>1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=+\infty$,当 $0<a<1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{a^n+2}-\sqrt{a^n+1})\xlongequal{a>1}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a^n+2)-(a^n+1)}{\sqrt{a^n+2}+\sqrt{a^n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{a^n+2}+\sqrt{a^n+1}}=0$. 又当 $a=1$ 时 $\sqrt{a^n+2}-\sqrt{a^n+1}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,故当 $a=1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{a^n+2}-\sqrt{a^n+1})=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

当 $0<a<1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{a^n+2}-\sqrt{a^n+1})=\sqrt{2}-1$,综合得

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a^n+2}-\sqrt{a^n+1})=\begin{cases}0, & a>1,\\ \sqrt{3}-\sqrt{2}, & a=1,\\ \sqrt{2}-1, & 0<a<1.\end{cases}$$

6.【分析】 本题属"∞^0"型未定式. 数列极限不能直接用洛必达法则. 如用,得先转化成连续变量的极限,利用 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x+\sin x}}$ 求得,但比较麻烦. 事实上,恒等变形后可转化为直接用幂指数运算法则的情形,即

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n+\sin n}}&=\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n+\sin n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\left[3\left(1+\frac{1}{3^n}+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{n}{n+\sin n}}=(3\cdot1^0)^1=3.\end{aligned}$$

7.【分析】

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2x^2}{x^5}&=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-2x^3}{x^6}=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)+\ln(1-2x^3)-2x^3-\ln(1-2x^3)}{x^6}\\&=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)+\ln(1-2x^3)}{x^6}-\lim_{x\to0}\frac{2x^3+\ln(1-2x^3)}{x^6}=3-\lim_{x\to0}\frac{2x^3+\ln(1-2x^3)}{x^6}.\end{aligned}$$

令 $2x^3=y$,则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{2x^3+\ln(1-2x^3)}{x^6}&=\lim_{y\to0}\frac{y+\ln(1-y)}{\left(\frac{y}{2}\right)^2}=4\lim_{y\to0}\frac{y+\ln(1-y)}{y^2}\\&=2\lim_{y\to0}\frac{1-\frac{1}{1-y}}{y}=-2\lim_{y\to0}\frac{1}{1-y}=-2.\end{aligned}$$

故 $$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2x^2}{x^5}=3+2=5.$$

8.【分析】 $x-\ln x\cdot\sin x=x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\cdot\sin x\right)$，由于 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{\ln x}{x}\to 0$，$\sin x$ 有界，故$\dfrac{\ln x}{x}\cdot\sin x\to 0$，$x-\ln x\cdot\sin x\to+\infty$，于是

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan(x-\ln x\cdot\sin x)=\frac{\pi}{2}.$$

9.【分析】 本题属“0^0”型未定式．利用基本极限 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$ 及重要极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 即得

$$\lim_{x\to0^+}x^{\sin x}=\lim_{x\to0^+}(x^x)^{\frac{\sin x}{x}}=1^1=1.$$

10.【分析】 当 $x>0$ 时，$\left(\dfrac{2}{3}\right)^x<1$，于是有

$$0\leqslant\left(\frac{2^x+3^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\left[\frac{3^x\left(\frac{2^x}{3^x}+1\right)}{3}\right]^{\frac{1}{x}}<3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}},$$

而 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=0$，故由夹逼定理可知 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2^x+3^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=0$．

11.【分析】 由积分中值定理知存在 $\xi\in[x,x+2]$，可得

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+2}tf(t)\sin\frac{3}{t}\mathrm{d}t=\lim_{x\to\infty}(x+2-x)\xi f(\xi)\sin\frac{3}{\xi}=6\lim_{\xi\to\infty}\frac{\sin\frac{3}{\xi}}{\frac{3}{\xi}}\cdot f(\xi)=6.$$

12.【分析】 利用洛必达法则可得

$$I\xlongequal{\text{记}}\lim_{x\to0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2+t^2}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{b-\cos x}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

当 $a=0$ 时 $$I=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{b-\cos x}\cdot\frac{1}{|x|}=\lim_{x\to0}\frac{|x|}{b-\cos x}=\begin{cases}0, & b\neq1,\\ \infty, & b=1.\end{cases}$$

又当 $a\neq0$ 时

$$I=\frac{1}{|a|}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{b-\cos x}=\begin{cases}\dfrac{2}{|a|}, & b=1,\\ 0, & b\neq1,\end{cases}$$

故 $$\lim_{x\to0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2+t^2}}=4\iff|a|=\frac{1}{2}\text{ 且 }b=1\iff a=\pm\frac{1}{2}\text{ 且 }b=1.$$

13.【分析】 初等函数(单一表达式)没有定义的点(附近有定义)是间断点；对分段函数的分界点，要用连续的定义予以讨论．对非分界点，就不同段而言，在各自的区间内可以按初等函数看待．

注意到 $x=0$ 为分界点．因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin3x}{x}=3\lim_{x\to0^-}\frac{\sin3x}{3x}=3,\quad\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(3+xe^{\frac{1}{x-1}}\right)=3,$$

又 $f(0)=3$，因此$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续．

此外，由于函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处无定义，因此 $x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点．于是所给函数 $f(x)$ 的连续

区间为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

三、计算题

1.【解】 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x\sin x)-1}{e^{x^2}-1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+1}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{e^{x^2}-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

或用等价无穷小因子替换,得$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x\sin x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 因$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{t}{n}+\dfrac{t^2}{2n^2}\right)^{-n}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{t}{n}+\dfrac{t^2}{2n^2}\right)^{n}}$,又

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}+\frac{t^2}{2n^2}\right)^{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{t}{n}+\frac{t^2}{2n^2}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{t}{n}+\frac{t^2}{2n^2}\right)}=e^{t+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t^2}{2n}}=e^{t},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{t}{n}+\dfrac{t^2}{2n^2}\right)^{-n}=e^{-t}$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\dfrac{x}{e}\right]=\dfrac{1}{e}\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{e}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}-1\right)\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\dfrac{1}{e}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\dfrac{e}{(1+t)^{\frac{1}{t}}}-1}{t}$

$$=\frac{1}{e}\lim_{t\to0^+}\frac{e^{1-\frac{\ln(1+t)}{t}}-1}{t}=\frac{1}{e}\lim_{t\to0^+}\frac{1-\frac{\ln(1+t)}{t}}{t}$$

$$=\frac{1}{e}\lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\frac{1}{2e}\lim_{t\to0^+}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{t}=\frac{1}{2e}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{1+t}=\frac{1}{2e}.$$

(4) 设$J=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}$,则$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^J$,且$J$是“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式.用洛必达法则计算可得

$$J=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{1+x^2}}=-1,$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}$.

(5) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\tan x\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\tan x\cdot\ln x}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}$.

又因$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to0^+}x=0$,代入即得$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=e^0=1$.

(6) $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x(x^2+100-x^2)}{\sqrt{x^2+100}-x} = 100\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{x^2+100}}{x}-1}$

$$= -100\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\dfrac{\sqrt{x^2+100}}{|x|}+1} = -50.$$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+2)e^{\frac{1}{x}}-x\right] = \lim\limits_{x\to\infty} x\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-1\right] \xlongequal{x=\frac{1}{t}} \lim\limits_{t\to0}\dfrac{(1+2t)e^t-1}{t}$

$$= \lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t} + 2\lim_{t\to0}e^t = 3.$$

(8) 由于$\dfrac{e^{ax^2}\cos^{2a}x-1}{x^2} = \dfrac{(e^{ax^2}-1)\cos^{2a}x+\cos^{2a}x-1}{x^2} = \dfrac{e^{ax^2}-1}{ax^2}a\cos^{2a}x - \dfrac{1-\cos^{2a}x}{x^2}$,

又
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{ax^2}-1}{ax^2}a\cos^{2a}x = \lim_{x\to0}\frac{ax^2}{ax^2}a = a,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^{2a}x}{x^2} \xlongequal{\frac{0}{0}} \lim_{x\to0}\frac{2a\sin x(\cos x)^{2a-1}}{2x} = a,$$

故原极限 $= a - a = 0$.

(9) 属 1^∞ 型极限. 原极限 $= e^J$,而

$$J = \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right) = \lim_{x\to0}\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}-a-b-c}{x(a+b+c)}$$

$$= \frac{1}{a+b+c}\lim_{x\to0}\left(\frac{a^{x+1}-a}{x}+\frac{b^{x+1}-b}{x}+\frac{c^{x+1}-c}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{a+b+c}\left(a\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}+b\lim_{x\to0}\frac{b^x-1}{x}+c\lim_{x\to0}\frac{c^x-1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{a+b+c}\left(a\lim_{x\to0}\frac{x\ln a}{x}+b\lim_{x\to0}\frac{x\ln b}{x}+c\lim_{x\to0}\frac{x\ln c}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{a+b+c}(a\ln a+b\ln b+c\ln c) = \frac{\ln(a^ab^bc^c)}{a+b+c},$$

因此,原极限 $= (a^ab^bc^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$.

(10) 原极限 $= \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{x^2}\ln(1+2x)-\frac{2}{x}}$. 而

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x^2}\ln(1+2x)-\frac{2}{x}\right] = \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2} \xlongequal{\frac{0}{0}} \lim_{x\to0}\frac{\dfrac{2}{1+2x}-2}{2x} = -2,$$

故原极限 $= e^{-2}$.

(11) 令 $x = \dfrac{1}{t}$,则

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\arctan\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{t\to0}\left(\frac{\arctan t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to0}e^{\frac{1}{t^2}\ln\frac{\arctan t}{t}}.$$

而
$$\lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}\ln\frac{\arctan t}{t} = \lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{\arctan t}{t}-1+1\right) = \lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}\left(\frac{\arctan t}{t}-1\right) = \lim_{t\to0}\frac{\arctan t-t}{t^3}$$

$$= \lim_{t\to0}\frac{\dfrac{1}{1+t^2}-1}{3t^2} = -\frac{1}{3},$$

所以原极限 $= e^{-\frac{1}{3}}$.

(12) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{\cos 2t}{t^2}dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{1}{t^2}dt - 2\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt = +\infty$,故属$\frac{\infty}{\infty}$型未定式.用洛必达法则,得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{\cos 2t}{t^2}dt = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos\frac{2}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\cos\frac{2}{x} = 1.$$

(13) 本题是 $\infty-\infty$ 型未定式,提出无穷大因子 x^2 后作变量替换 $x=\frac{1}{t}$,可得

$$\lim_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}x^2\left[\frac{1}{x} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] \xlongequal{\frac{1}{x}=t} \lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{t} = \frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{1}{1+t} = \frac{1}{2}.$$

(14) 用当 $\square\to0$ 时的等价无穷小替换 $e^{\square}-1\sim\square$ 与 $\ln(1+\square)\sim\square$ 化简所求极限.

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{3+2\cos x}{5}\right)^x - 1\right] = \lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{3+2\cos x}{5}\right)^x - 1}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{3+2\cos x}{5}\right)}-1}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{x\ln\left(\frac{3+2\cos x}{5}\right)}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{3+2\cos x}{5}\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\frac{3+2\cos x}{5}-1}{x^2} = \frac{2}{5}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2} = -\frac{1}{5}.$$

(15) 转化为适当的函数极限.令 $f(x) = \dfrac{\arctan x - \arctan\frac{x}{1+x}}{x^2}$,则

$$\lim_{x\to0}f(x) = \lim_{x\to0}\frac{\arctan x - \arctan\frac{x}{1+x}}{x^2} \xlongequal{\frac{0}{0}} \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2}\cdot\frac{1+x-x}{(1+x)^2}}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x)^2+x^2}}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^2+x^2-(1+x^2)}{x(1+x^2)[(1+x)^2+x^2]}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{2x+x^2}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0}(2+x) = 1.$$

设 $x_n = \frac{1}{n}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = 0$ 且 $x_n \neq 0(n=1,2,3,\cdots)$.又

$$f(x_n) = n^2\left(\arctan\frac{1}{n} - \arctan\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right) = n^2\left(\arctan\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{n+1}\right),$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n) = \lim\limits_{x\to0}f(x) = 1$.

(16) 已知:设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = A > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x) = +\infty$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)^{g(x)} = \begin{cases}0, & 0<A<1,\\ +\infty, & A>1.\end{cases}$

又 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}=\frac{a_1}{a_2},$$

于是 $$I\xlongequal{\text{记}}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x=\begin{cases}0, & a_1<a_2,\\ +\infty, & a_1>a_2.\end{cases}$$

只需再求 $a_1=a_2$ 的情形：

$$I=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_1x+b_2}\right)^x=\left(1+\frac{b_1-b_2}{a_1x+b_2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{b_1-b_2}{a_1x+b_2}\right)},$$

而 $$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{b_1-b_2}{a_1x+b_2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(b_1-b_2)}{a_1x+b_2}=\frac{b_1-b_2}{a_1},$$

故 $$I=e^{\frac{b_1-b_2}{a_1}}.$$

因此 $$\text{原极限}=\begin{cases}0, & a_1<a_2,\\ e^{\frac{b_1-b_2}{a_1}}, & a_1=a_2,\\ +\infty, & a_1>a_2.\end{cases}$$

(17) 设常数 $a\neq 0$，先求 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\left[\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right]$. 令 $\frac{1}{x}=t$，于是 $t\to 0$，由等价无穷小关系，得

$$\sin\left[\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right]=\sin[\ln(1+at)]\sim\ln(1+at)\sim at,$$

从而 $$\lim_{x\to\infty}x\sin\left[\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\sin[\ln(1+at)]}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{at}{t}=a.$$

代入即得 $$w=\lim_{x\to\infty}x\sin\left[\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]-\lim_{x\to\infty}x\sin\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=3-1=2.$$

评注 本题是求某类含参数极限的一种方法. 即：若对一定范围内的常数 a，有 $\lim g(x)f(a,x)=I_a$，则当 a,b 都在此范围内时 $\lim g(x)[f(a,x)-f(b,x)]=I_a-I_b$.

2.【解】 由 $f(0)=0,f'(0)=6$ 可得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=6$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=3.$$

这表明当 $x\to 0$ 时 $\int_0^x f(t)\,dt\sim 3x^2$，由此又有当 $x\to 0$ 时 $\int_0^{x^3}f(t)\,dt\sim 3(x^3)^2=3x^6$，故

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}f(t)\,dt}{\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^6}{(3x^2)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^6}{27x^6}=\frac{1}{9}.$$

3.【解】 因为 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\arcsin x}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4},$$

故当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的等价无穷小量是 $\frac{3}{4}x^2$，即 $A=\frac{3}{4}, k=2$.

4.【解】（Ⅰ）$y=(1+x)\arctan\frac{1}{1-x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$，由初等函数连续性知 y 分别在 $(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$ 内连续. 因 $\left|\arctan\frac{1}{1-x^2}\right|<\frac{\pi}{2}$，

$\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\frac{1}{1-x^2}=\frac{\pi}{2}$，　$\lim\limits_{x\to 1^+}\arctan\frac{1}{1-x^2}=-\frac{\pi}{2}$，且 $\lim\limits_{x\to -1}(1+x)=0, \lim\limits_{x\to 1}(1+x)=2$，故

$$\lim_{x\to -1}y=\lim_{x\to -1}(1+x)\arctan\frac{1}{1-x^2}=0,$$

$$\lim_{x\to 1^-}y=\lim_{x\to 1^-}(1+x)\arctan\frac{1}{1-x^2}=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi,\quad \lim_{x\to 1^+}y=2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi.$$

从而 $x=-1$ 与 $x=1$ 都是函数的第一类间断点，其中 $x=-1$ 是函数的可去间断点，$x=1$ 是函数的跳跃间断点.

（Ⅱ）因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=\begin{cases}1, & |x|>1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|<1,\end{cases}$ 从而 $y=\begin{cases}1-x, & |x|>1,\\ -x, & |x|=1,\\ -1-x, & |x|<1.\end{cases}$ 显然 $x=-1$ 与 $x=1$ 都是函数的第一类（跳跃）间断点.

（Ⅲ）由初等函数的连续性及 y 的定义可知，y 分别在 $[-1,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 连续. 又因

$$\lim_{x\to 0^+}y=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}y=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=2\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1,$$

故 y 仅有 $x=0$ 为第一类（可去）间断点.

（Ⅳ）**方法** 1° 先写出 $f[g(x)]$ 的表达式. 考察 $g(x)$ 的值域：

$$g(x)\begin{cases}\leqslant 1, & x\leqslant 1,\\ >1, & x>1,\end{cases}\qquad f[g(x)]=\begin{cases}g^2(x), & x\leqslant 1,\\ 1-g(x), & x>1,\end{cases}$$

即 $f[g(x)]=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ 1-x, & 1<x\leqslant 2,\\ 1-2(x-1), & 2<x\leqslant 5,\\ 1-(x+3), & x>5,\end{cases}$ 　亦即 $f[g(x)]=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ 1-x, & 1<x\leqslant 2,\\ 3-2x, & 2<x\leqslant 5,\\ -(x+2), & x>5.\end{cases}$

当 $x\neq 1,2,5$ 时 $f[g(x)]$ 分别在不同的区间与某初等函数相同，故连续. 当 $x=2,5$ 时，分别由左、右连续得连续. 当 $x=1$ 时，　$\lim\limits_{x\to 1+0}f[g(x)]=\lim\limits_{x\to 1+0}(1-x)=0$，　$\lim\limits_{x\to 1-0}f[g(x)]=\lim\limits_{x\to 1-0}x^2=1$. 从而 $x=1$ 是 $f[g(x)]$ 的第一类间断点（跳跃间断点）.

方法 2° 注意 $u=g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 2,\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 5,\\ x+3, & x>5,\end{cases}$ 从而 $g(x)$ 处处连续；

$y=f(u)=\begin{cases}u^2, & u\leqslant 1,\\ 1-u, & u>1.\end{cases}$ 当 $u\neq 1$ 时连续，由复合函数连续性可知，当 $g(x)\neq 1$ 即 $x\neq 1$ 时，$f[g(x)]$ 连续. 对 $x=1$，有

$$\lim_{x\to 1+0} f[g(x)] \xlongequal{g(x)=x} \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}(1-x) = 0,$$

$$\lim_{x\to 1-0} f[g(x)] \xlongequal{g(x)=x} \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} x^2 = 1.$$

从而 $x=1$ 为 $f[g(x)]$ 的第一类间断点(跳跃间断点).

5.【分析】 已知此 $\infty-\infty$ 型未定式的极限存在且等于2,要确定极限式中的参数 a 与 b 有两种方法:方法1° 直接将所给无理式有理化定出极限式中所含参数之值;方法2° 先提出 ∞ 因子,将 $\infty-\infty$ 型化为 $\infty\cdot 0$ 型,然后由极限存在的条件定出极限式中所含参数之值.

【解法一】 题目中的极限式可改写为

$$2=\lim_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-(ax^2+bx+1)}{3x+\sqrt{ax^2+bx+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(9-a)x^2-bx-1}{x}\cdot\frac{1}{3+\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{1}{3+\sqrt{a}}\lim_{x\to+\infty}\left[(9-a)x-b-\frac{1}{x}\right]=\frac{9-a}{3+\sqrt{a}}\lim_{x\to+\infty}x-\frac{b}{3+\sqrt{a}}.$$

由此即知 $9-a=0,2=-\dfrac{b}{3+\sqrt{a}}$,故 $a=9,b=-2(3+\sqrt{a})=-12$.

【解法二】 原式可改写成 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(3-\sqrt{a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)=2$. 由于上式成立,所以必有 $3-\sqrt{a}=0$,即 $a=9$. 将 $a=9$ 代入原式,并有理化得

$$\lim_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{9x^2+bx+1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{-bx-1}{3x+\sqrt{9x^2+bx+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-b-\frac{1}{x}}{3+\sqrt{9+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=-\frac{b}{6}.$$

令 $-\dfrac{b}{6}=2$ 得 $b=-12$. 故 $a=9,b=-12$.

6.【解】 由题设知

$$0=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x+ax}{x^3}+b\right)=b+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+ax}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow\qquad b=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+ax}{x^3}. \tag{$*$}$$

利用($*$),一方面有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+ax}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+ax}{x^3}\cdot x^2=0,$$

另一方面,直接计算又有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+ax}{x}=3+a,$$

这表明 $3+a=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=-3$.

将 $a=-3$ 代入($*$)式,即得

$$-b=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3x}{x^3}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x-3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x^2}=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=-\frac{9}{2}.$$

故 $b=\dfrac{9}{2}$．综合得 $a=-3,b=\dfrac{9}{2}$．

7.【解】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+\sin2x^2)^{\frac{1}{x^2}}-e^2}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}\ln(1+\sin2x^2)}-e^2}{x^n}$

$$=e^2\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}\ln(1+\sin2x^2)-2}-1}{x^n}=e^2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x^2}\ln(1+\sin2x^2)-2}{x^n}$$

$$=e^2\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin2x^2)-2x^2}{x^{n+2}}=e^2\lim_{x\to0}\frac{\frac{4x\cos2x^2}{1+\sin2x^2}-4x}{(n+2)x^{n+1}}$$

$$=\frac{4e^2}{n+2}\lim_{x\to0}\frac{\cos2x^2-(1+\sin2x^2)}{x^n}\cdot\frac{1}{1+\sin2x^2}$$

$$=\frac{4e^2}{n+2}\lim_{x\to0}\frac{-4x\sin2x^2-4x\cos2x^2}{nx^{n-1}}$$

$$=-\frac{16e^2}{n(n+2)}\lim_{x\to0}\frac{\sin2x^2+\cos2x^2}{x^{n-2}}$$

$$=-\frac{16e^2}{n(n+2)}\lim_{x\to0}\frac{1}{x^{n-2}}=a\neq0,$$

由此可知 $n=2,a=-2e^2$.

评注 在本题的求解过程中，除用洛必达法则外，还用了等价无穷小因子替换，这比只用洛必达法则求解要简捷一些.

四、证明题

1.【证明】 引入函数 $f(x)=x-a\sin x-b$，则 $f(x)=0$ 的根即方程 $x=a\sin x+b$ 的根．因 $f(0)=-b<0$，而 $f(a+b)=a+b-a\sin(a+b)-b=a[1-\sin(a+b)]\geqslant0$.

若 $f(a+b)=0$，则 $x=a+b>0$ 便是 $f(x)=0$ 的一个正根，若 $f(a+b)>0$，则由 $f(x)$ 在 $[0,a+b]$ 上的连续性可知，$\exists\xi\in(0,a+b)$，使 $f(\xi)=0$．总之函数 $f(x)$ 在 $(0,a+b]$ 上至少有一个零点，即原方程至少有一个正根不超过 $a+b$.

2.【证明】 引入函数 $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x-5$，则 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续偶函数，且 $f(0)=-1<0$，$f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$，从而 $f'(0)=0$．又 $f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x=(\sqrt{e^x}-\sqrt{e^{-x}})^2+2(1-\cos x)>0(\forall x>0)$ 成立，由此可见 $f'(x)$ 当 $x\geqslant0$ 时单调增加，于是 $f'(x)>f'(0)=0$ 当 $x>0$ 时成立. 这表明 $f(x)$ 在 $x\geqslant0$ 是单调增加的．注意 $f(\pi)=e^\pi+e^{-\pi}-7>2^3-7=1>0$，故根据闭区间上连续函数的性质可知 $f(x)=0$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有一个根，结合 $f(x)$ 在 $x\geqslant0$ 严格单调增加可知 $f(x)=0$ 有且仅有一个正根．由 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上偶函数，$f(x)=0$ 还有且仅有一个负根．故方程 $e^x+e^{-x}+2\cos x=5$ 恰有两个根.

3.【证明】 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}$，则 $f(x)$ 的零点就是方程 $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=0$ 的根．因函数 $f(x)$ 分别在区间 (a,b) 与 (b,c) 内可导，且

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-a)^2}-\frac{1}{(x-b)^2}-\frac{1}{(x-c)^2}<0,$$

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty,\lim_{x\to b^-}f(x)=-\infty,\lim_{x\to b^+}f(x)=+\infty,\lim_{x\to c^-}f(x)=-\infty.$$

这表明在区间(a,b)内$f(x)$的函数值从$+\infty$单调减少到$-\infty$,在区间(b,c)内$f(x)$的函数值也从$+\infty$单调减少到$-\infty$,故$f(x)$分别在(a,b)与(b,c)内有且仅有一个零点.即方程$\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=0$分别在$(a,b)$与$(b,c)$内有且仅有一个实根.

4.【证明】 利用闭区间上连续函数的最大、小值定理与介值定理证明本题.

令 $\eta=\dfrac{p}{p+q}f(c)+\dfrac{q}{p+q}f(d)$,则

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)\quad\Leftrightarrow\quad f(\xi)=\frac{p}{p+q}f(c)+\frac{q}{p+q}f(d)=\eta.$$

由$f(x)$在$[a,b]$上连续,而$[c,d]\subset[a,b]$,可知$f(x)$在$[c,d]$上连续,于是存在$m=\min\limits_{x\in[c,d]}f(x)$,$M=\max\limits_{x\in[c,d]}f(x)$,从而

$$\eta\geqslant\frac{p}{p+q}m+\frac{q}{p+q}m=m,\quad \eta\leqslant\frac{p}{p+q}M+\frac{q}{p+q}M=M,$$

即η是$f(x)$在$[c,d]$上的值域$[m,M]$上的一个值.

由闭区间上连续函数的最大、小值及介值定理可知,必存在$\xi\in[c,d]\subset(a,b)$使$f(\xi)=\eta$,即

$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$成立.

5.【证明】 设$f(x)=\arctan x-x$,则$f(0)=0$,

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1=-\frac{x^2}{1+x^2}<0,$$

所以$f(x)$单调减少,当$x>0$时$f(x)<f(0)=0$,即$\arctan x<x$,于是有

$$x_n=\arctan x_{n-1}<x_{n-1}.$$

由此可知,数列$\{x_n\}$单调递减.

又$x_0=25$,$x_1=\arctan 25>0$,…,且对每个n,都有$x_n>0$,根据极限存在准则即知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,在$x_{n+1}=\arctan x_n$两边取极限得$a=\arctan a$,所以$a=0$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

评注 数列$\{a_n\}$如果满足方程$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$,其中f是已知的一元连续函数,则称$\{a_n\}$为**递归数列**.由递归方程知,由a_1可求出a_2,由a_2可求a_3,依此类推可求出任意项a_n.常用如下两种方法求递归数列的极限.

方法1° 先证明递归数列$\{a_n\}$收敛(常用单调有界数列收敛定理),然后设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,再对递归方程$a_{n+1}=f(a_n)$取极限得$A=f(A)$,最后解出$A$即可.

方法2° 先设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,对递归方程取极限后从$A=f(A)$解得$A$,再用适当方法证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

要注意递归数列$a_{n+1}=f(a_n)$的单调性与函数$f(x)$的单调性有关.

6.【证明】 因$a>0$,$x_0>0$,由x_n的递推式知$x_n>0$.又由算术平均值不小于几何平均值知

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)\geqslant\sqrt{x_{n-1}\cdot\frac{a}{x_{n-1}}}=\sqrt{a}\,(n=1,2,\cdots),$$

再由$\dfrac{x_n}{x_{n-1}}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{a}{x_{n-1}^2}\right)\leqslant 1\,(n=2,3,\cdots)$知数列$\{x_n\}$单调递减且有下界$\sqrt{a}>0$,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,设为$l$.