文都教育

2007

考研数学

必做主观题500题精析

主审：蔡子华

主编：曾祥金　汪成咏　蒋志刚

把握正确的解题思路

提高快速的解题能力

新华出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学必做主观题500题精析/曾祥金,汪成咏,蒋志刚主编,—北京:新华出版社,2005.4

ISBN 7－5011－7048－7

Ⅰ.考...　Ⅱ.①曾...②汪...③蒋...　Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题　Ⅳ.013—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第028135号

编　　者:曾祥金　汪成咏　蒋志刚
责任编辑:王子予　王兴旺
出版发行:新华出版社
地　　址:北京石景山区京原路8号
邮政编码:100043
印　　刷:北京市燕鑫印刷厂印刷
开　　本:787×1092毫米 1/16
印　　张:22.75
版　　本:2005年4月第1版　2006年2月第2次修订　2006年2月第2次印刷
书　　号:ISBN 7－5011－7048－7
定　　价:30.00元

前　言

全国硕士研究生入学数学统一考试是国家为招收硕士研究生而实施的具有选拔功能的水平考试。要求考生系统地理解数学的基本概念和基本理论，掌握数学的基本方法。还要求考生具备抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力。

笔者从多年参与硕士研究生入学考试的数学试卷的阅卷经历中了解到，大多数考生的数学成绩并不理想。许多考生在对于不太困难的考题的解答中，往往由于最初几步的基本运算不过关，使得后面的运算或论证无以为继，导致得分率偏低。究其原因乃是由于考生的基本功不扎实、对数学的基本方法掌握不够、基本的运算能力不强所致。

为了帮助广大考生在复习中提高运算能力，提高综合分析问题和解决问题的能力，笔者从历年考研试题及各类教学参考书中精心挑选500道习题，给予详尽的分析和解答，而编成此书。

本书重点突出，例题的选择和编排典型、精到而合理，针对性强。

一、重视强化基本概念和基本理论的训练。对于考生难以掌握的一些重要概念和定理，特意安排了一定量的例题，从各个侧面揭示概念和定理的实质，加深考生对于基本概念和基本定理的理解。

二、重视加强基本的运算能力。通过安排大量典型的例子和对这些例题的详尽的分析和解答，揭示出种种运算规律和技巧，并适时地加以归纳和总结。其中有些方法在别的教参上难以见到，例如：利用凑微分法求全微分的原函数，不用构作同解方程组而直接根据阶梯矩阵给出线性方程组的基础解系与特解等，这些方法既方便又实用。

三、重视强化各种解题方法的综合运用。鉴于考生的数学建模能力的不足，特意就微分、积分的应用问题，微分方程的综合题等安排了足够多的例题。对于令考生有些为难的证明题、涉及微分中值定理的等式，也给予足够的关注，对证明的关键点都作了细致地分析。

在本书的编写过程中，北京交通大学的柳金甫教授负责概率统计部分的撰写，文都考研信息中心做了大量有益的工作，在此均表示衷心的感谢。由于时间仓促，错误和疏漏之处在所难免，诚请广大读者和专家批评和指正。

编　者

2006年2月

目　　录

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限与连续

本章概述

函数是高等数学的主要研究对象，它反映客观世界中变量与变量间的依存关系. 极限是微积分理论的基础，连续、导数、定积分、重积分、线面积分的概念都建立在极限论的基础之上. 数列与函数极限的计算、函数连续性与间断点的讨论是本章重点考察的内容. 两个重要的极限公式为三角函数、反三角函数、指数函数与对数函数的求导公式奠定了基础. 函数的奇偶性可以用来简化定积分、重积分等的计算. 可以利用导函数的符号判断函数的单调性. 连续函数的零点定理可用于方程根的讨论. 零点定理与单调性结合起来可以确定方程根的数目. 用连续函数的介值定理可将闭区间上连续函数及周期连续函数的值域问题转化为最大值与最小值问题. 闭区间上连续函数的一致连续性保证了闭区间上连续函数的可积性，进而保证连续函数存在原函数，从而为积分论奠定了基础.

对于本章而言，要求考生准确地理解函数概念，包括分段函数、复合函数、反函数、隐函数. 会解反函数、分段函数的复合函数以及与之相关的综合问题. 要求考生理解极限概念，掌握极限性质与四则运算法则、极限存在的两个准则；掌握利用两个重要极限求极限的方法，掌握罗必达法则；理解无穷小、无穷大概念及无穷小比较的方法，会用等价无穷小求极限. 这是极限论的主要内容. 灵活运用罗必达法则以及无穷小的等价代换用以简化极限的计算是一种重要方法，本章选用了大量例子来帮助考生掌握提高. 还要求考生理解连续性概念，会判断间断点的类型；理解闭区间上连续函数的性质，并会运用这些性质.

考试要求

1. 理解函数概念，包括分段函数、复合函数、反函数、隐函数
2. 理解极限概念，掌握极限性质与四则运算法则、极限存在的两个准则
3. 掌握利用两个重要极限求极限的方法，掌握罗必达法则
4. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限
5. 理解连续性概念，会判断间断点的类型
6. 理解闭区间上连续函数的性质，并会运用这些性质

重点、难点

函数、极限、连续概念. 综合运用极限的四则运算法则、无穷小的等价代换、罗必达法则求极限的计算方法.

重要定义、定理、公式

(一) 极限定义

定义 1 对于给定的数列 $\{a_n\}$ 及实数 a，若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，使当 $n > N$ 时，有 $|a_n - a| < \varepsilon$，则称 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

定义 2 对给定函数 $f(x)$ 及数 A，若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. 类似可定义 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$.

定义 3 对给定函数 $f(x)$ 及数 A，若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$，使当 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$. 类似可定义 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

(二) 两个重要极限

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}}$$

(三) 极限存在的判别准则

定理 1 (夹逼准则) 若 $\exists N > 0$，当 $n \geqslant N$ 时，$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{x\to\infty} y_n = \lim\limits_{x\to\infty} z_n = a$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$.

定理 2 (夹逼准则) 若当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

注：定理 2 对于其它极限过程也成立.

定理 3 (单调有界原理) 若数列 $\{a_n\}$ 单调且有界，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 必存在.

定理 4 (极限与单侧极限的关系) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}$ 都存在且相等，其值等于 A.

注 定理 4 也适用于 $x \to \infty$ 的情形. 定理 4 对于确定函数在分段点处的极限十分重要.

(四) 无穷小与无穷大

定义 4 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则称数列 $\{a_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时为无穷小. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$) 则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ ($x \to \infty$) 时为无穷小.

定义 5 (1) 若对于 $\forall M > 0, \exists N > 0$，使当 $n > N$ 时有 $|a_n| > M$，则称数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为无穷大.

(2) 若对于 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$ ($\exists X > 0$)，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ ($|x| > X$) 时有 $|f(x)| > M$，则称 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ ($x \to \infty$) 时的无穷大.

定义 6 设在同一极限过程中，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为无穷小

(1) 如果 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小.

(2) 如果 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小，记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

(3) 如果 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小.

(4) 如果 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小.

(五) 重要的等价无穷小(当 $x \to 0$ 时)

$$\boxed{\sin x \sim x;\ \tan x \sim x;\ \arcsin x \sim x;\ \arctan x \sim x;\ \ln(1+x) \sim x}$$

$$\boxed{e^x - 1 \sim x;\ a^x - 1 \sim x\ln a;\ (1+x)^\alpha \sim \alpha x;\ 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2}$$

定理5　(无穷小的等价代换)若在同一极限过程中有等价的无穷小 $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$，与 $\beta(x) \sim \beta_1(x)$，则

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

(六) 罗必达法则

设 $f(x)$，$g(x)$ 设同一极限过程中的无穷小(无穷大)，且 $f'(x)$、$g'(x)$ 存在. 如果 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\infty)$，则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\infty)$

(七) 连续与间断

定义7　(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 连续. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ($\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$)，则称 $f(x)$ 在 x_0 左(右) 连续.

(2) 若 $f(x)$ 在 x_0 的一个去心邻域内有定义，x_0 不是 $f(x)$ 的连续点，则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

定理6　$f(x)$ 在 x_0 连续当且仅当 $f(x)$ 在 x_0 既左连续又右连续.

可去间断点　极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ 或 $f(x_0)$ 无定义，则称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点.

跳跃间断点　$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在但不相等，则称 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点. 可去间断点与跳跃间断点归为第一类间断点，其特征是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在. 其余的间断点归为第二类间断点，其特征是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 至少一个不存在. 特别地，当 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 至少一个为无穷大，则 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

常考题型

(一) 函数概念及其运算　　(二) 极限概念与性质

(三) 综合运用无穷小的等价代换与罗必达法则计算极限

(四) 数列的极限　　(五) 确定极限式中的参数　　(六) 连续与间断

(一) 函数概念及其运算

【例 1】　设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leqslant 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$，$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1 \\ -x, & x \leqslant 1 \end{cases}$，求 $f[g(x)]$，$f[f(x)]$，$g[f(x)]$ 与 $g[g(x)]$.

分析　本题考察分段函数的复合运算，而函数的复合本质上是作变量替换，故本题的关键是正确地作变量代换.

【详解】 $f[g(x)]=\begin{cases}g^2(x), & g(x)>1\\ -g(x), & g(x)\leqslant 1\end{cases}$

由 $g(x)$ 的表达式可知，对于 $\forall x\in(-\infty,\infty)$，$g(x)\geqslant 2$，因此 $f[g(x)]=g^2(x)$，故

$$f[g(x)]=\begin{cases}(2-x)^2, & x\leqslant 0\\ (2+x)^2, & x>0\end{cases}\qquad f[f(x)]=\begin{cases}f^2(x), & f(x)>1\\ -f(x), & f(x)\leqslant 1\end{cases}$$

由 $f(x)$ 的表达式可知，当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)\leqslant 1$；而当 $x>1$ 或 $x<-1$，$f(x)>1$. 故

$$f[f(x)]=\begin{cases}x^2, & x<-1\\ x, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ x^4 & x>1\end{cases}$$

同理

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-x, & x<0\\ 2+x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2+x^2, & x>1\end{cases};\quad g[g(x)]=\begin{cases}4-x, & x\leqslant 0\\ 4+x, & x>0\end{cases}.$$

注　求分段函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合 $f[g(x)]$ 的方法是：先换元（$x\to g(x)$），形式地定出 $f[g(x)]$，然后根据 $f(x)$ 的分段区间划分 $g(x)$ 的值域，从而划分 $g(x)$ 的定义域，最后再具体进行计算化简.

一些同学在作分段函数的复合时，往往忘记计算化简后还要确定准确的表达式这一步骤，容易出错.

【例 2】　设 $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))(n\geqslant 2)$，而 $f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)$.

分析　本题是利用递归关系求函数列的问题，摸清基本规律，归纳出 $f_n(x)$ 的公式.

【解法一】　直接计算，有

$$f_2(x)=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},f_3(x)=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},f_4(x)=\frac{x}{\sqrt{1+4x^2}}. \quad ①$$

对于 ①，观察归纳可得　$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$　②

则由 ② 有　$$f_{n+1}(x)=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+nx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}} \quad ③$$

由数学归纳法可知 ② 对于任意自然数 n 成立.

【解法二】　由递推公式有 $\dfrac{1}{f_{n+1}^2(x)}=\dfrac{1}{f_n^2(x)}+1$，因而 $\dfrac{1}{f_n^2(x)}=\dfrac{1}{f^2(x)}+n-1=\dfrac{1}{x^2}+n$，又由递推公式看出 $f_n(x)$ 与 x 有相同的符号，故 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

【例 3】　(1) 设 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2x^4+x^3+x^2-x+2}{x^4+3x^3+5x^2-3x+1}$，求 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

(2) 设 $\varphi(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，而 $f(\varphi(x))=\sqrt{2+x-x^2}$，求函数 $f(x)$ 的定义域.

分析　求函数定义域，通常是先根据函数的表达式定出自变量所满足的条件，然后定出定义域来. 题中没有直接给出 $f(x)$ 的表达式，故此先求 $f(x)$.

【详解】（1）因

$$\frac{2x^4+x^3+x^2-x+2}{x^4+3x^3+5x^2-3x+1}=\frac{2x^2+x+1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{x^2+3x+5-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(x-\frac{1}{x}\right)+5}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x-\frac{1}{x}\right)+7}$$

所以由 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{2x^4+x^3+x^2-x+2}{x^4+3x^3+5x^2-3x+1}$，得 $f(x)=\frac{2x^2+x+5}{x^2+3x+7}$. 故

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{2x^4+x^3+9x^2+x+2}{x^4+3x^3+9x^2+3x+1}$$

（2）令 $u=\varphi(x)$，即 $u=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 $x+\sqrt{1+x^2}=\mathrm{e}^u$，从而 $1+x^2=(\mathrm{e}^u-x)^2$，解得 $x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^{-u})=\mathrm{sh}u$. 因此 $f(x)=\sqrt{2+\mathrm{sh}x-\mathrm{sh}^2x}$. 欲使函数有意义，则 $2+\mathrm{sh}x-\mathrm{sh}^2x\geqslant 0$，从而 $-1\leqslant \mathrm{sh}x\leqslant 2$. 因此函数的定义域为 $[\ln(\sqrt{2}-1),\ \ln(2+\sqrt{5})]$.

【例 4】（1）设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，而 $f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 的定义域.（88，1）

（2）设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$ 且 $f[\varphi(x)]=\ln x$，求 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x$.（95，2）

分析　题中没有直接给出 $\varphi(x)$ 的表达式，因此关键在求出 $\varphi(x)$.

【详解】（1）因为 $f[\varphi(x)]=\mathrm{e}^{\varphi^2(x)}$，由 $f[\varphi(x)]=1-x$，则 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$. 由于 $\varphi(x)\geqslant 0$，故有 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 欲使函数有意义，$\ln(1-x)\geqslant 0$，从而 $x\leqslant 0$. 故 $\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0]$.

（2）令 $x^2-1=u$，则 $x^2=u+1$，从而 $f(u)=\ln\frac{u+1}{u-1}$. 因此，$f[\varphi(x)]=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}$. 由于 $f[\varphi(x)]=\ln x$，有 $\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x$，解得 $\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$. 因此

$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x=x+2\ln|x-1|+C.$$

注　（1）对于已知 $\varphi(x)$ 及 $f[\varphi(x)]=g(x)$，求 $f(x)$ 的问题，其步骤为：一、作变量代换 $u=\varphi(x)$；二、解出 $x=\varphi^{-1}(u)$；三、求出 $f(u)=g[\varphi^{-1}(u)]$，则就定出 $f(x)$.

（2）已知 $f(x)$ 及 $f[\varphi(x)]=g(x)$，求 $\varphi(x)$ 的问题，实质是由 $f(y)=g(x)$ 求隐函数 $y=\varphi(x)$ 的问题，由方程 $f(y)=g(x)$ 解出 y 即可.

（二）极限概念与性质

【例 5】　利用数列极限的定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

分析　考虑 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$，则不等式等价于 $n<(1+\varepsilon)^n=1+n\varepsilon+\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2+\cdots$. 若 $n<\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$，则必有 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$. 而由 $n<\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$ 推出 $n>\frac{2}{\varepsilon^2}+1$，故可取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}+1\right]$. 其中 $[x]$ 表示不超过数 x 的最大整数.

【证明】　对于任意的正数 ε，无论 ε 怎样小，取一正整数 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}+1\right]$. 则当 $n>N$ 时，有

$n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$，从而 $n < \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$. 由此推出

$$1 \leqslant n < \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 < (1+\varepsilon)^n$$

因此由上式有 $1 \leqslant \sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon$，即有 $|\sqrt[n]{n}-1| < \varepsilon$. 由数列极限的定义可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. 证毕.

【例 6】 证明：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 成立的充分必要条件是对于任意满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0 (n \geqslant 1)$ 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) = A$.

分析　本题为抽象极限的证明，利用极限的定义比较合适.

【证明】 必要性：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则对于任意的正数 ε，存在正数 $\delta > 0$，当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)-A| < \varepsilon$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，则对于上述给定的 $\delta > 0$，存在自然数 N，当 $n > N$ 时，有 $0 < |x_n - x_0| < \delta$，从而有 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$，由数列极限的定义可知 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) = A$. 必要性得证.

充分性：用反证法. 设对于任意满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0 (n \geqslant 1)$ 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) = A$. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在或存在而不等于 A，则存在一个正数 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于任意的 $\delta > 0$ 都有 x 满足 $0 < |x-x_0| < \delta$ 及 $|f(x)-A| > \varepsilon_0$. 于是对于任意的自然数 n，存在 x_n 满足 $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ 及 $|f(x_n) - A| > \varepsilon_0$，则得到 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$，与假设矛盾. 充分性得证.

注　本例的结论对于 $x \to \infty$ 的极限过程也成立. 它揭示出函数极限与数列极限之间的深刻联系，也是利用函数极限方法计算某些数列极限的理论依据. 例如求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，若数列 $\{x_n\}$ 为 n 的函数 $f(n)$ 或 $\frac{1}{n}$ 的函数 $f\left(\frac{1}{n}\right)$，则

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ 或} \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to0+} f(x)$$

可利用罗必达法则或其它方法计算.

【例 7】 证明：$0 < \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$ 及 $\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n (n = 1,2,\cdots)$.

分析　不等式涉及极限 $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 且很精确，故对极限的考察应比较精细.

【证明】 首先由于数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ 单调增加且收敛于 e，因而

$$0 < \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ (n \geqslant 1)$$

由牛顿二项定理可知对于 $x > 0$ 有 $(1+x)^n > 1 + nx$. 故

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}(n+1) = \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}(n+1) > \left(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right)(n+1)$$

$$= n+1+\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} > n+2$$

即有 $(n+1)^{2n+3} > n^{n+1}(n+2)^{n+2}$. 因此

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2},(n=1,2,\cdots)$$

从而数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$单调下降且收敛于 e,故 $\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$. 因此

$$\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\frac{\mathrm{e}}{n}<\frac{3}{n},(n=1,2,\cdots)$$

故 $0<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\frac{3}{n}(n=1,2,\cdots)$ 成立.

由等式
$$n!=\frac{n^{n}}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

以及 $2<\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}<\mathrm{e}(k=1,2,\cdots)$ 有

$$2\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n}<n!<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^{n},\ (n=1,2,\cdots)$$

从而例中第二个不等式也成立. 证毕.

【例 8】 求极限(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{2}+3x+x^{2}\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$

分析　当 $x\to0$ 时,因 $\sin\frac{1}{x}$ 有界,$x^{2}\to0$,所以 $x^{2}\sin\frac{1}{x}\to0$,(1) 为$\frac{0}{0}$型不定式. 当 $x\to\infty$ 时,因 $\sin x$ 有界,故 $x-\sin x$ 与 $x+\sin x$ 均为无穷大,(2) 为$\frac{\infty}{\infty}$型不定式.

【详解】　(1) 因 $\sin\frac{1}{x}$ 有界,故$\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$. 从而

$$\lim_{x\to0}\frac{x^{2}+3x+x^{2}\sin\frac{1}{x}}{\sin x}\xlongequal{\sin x\approx x}\lim_{x\to0}\frac{x^{2}+3x+x^{2}\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}(x+3+x\sin\frac{1}{x})=3$$

(2) 因 $x\to\infty$ 时,$\frac{1}{x}\to0$,而 $\sin x$ 有界,故$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1$$

注　(1)、(2) 分别为$\frac{0}{0}$型与$\frac{\infty}{\infty}$型不定式,但不能用罗必达法则. 若对(1) 用罗必达法则

$$\lim_{x\to0}\frac{x^{2}+3x+x^{2}\sin\frac{1}{x}}{\sin x}\xlongequal{\text{罗必达}}\lim_{x\to0}\frac{3x+3+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

而$\lim\limits_{x\to0}(2x+3+2x\sin\frac{1}{x})=3$,$\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$不存在,因而$\lim\limits_{x\to0}(2x+3+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x})$不存在,故$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x+3+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$也不存在. 用罗必达法则导出(1) 极限不存在,显然错误. 若对(2) 用罗必达法则,有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}\xlongequal{\text{罗必达}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

令 $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$,则 $f(2n\pi)=0,f\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=1(n=1,2,\cdots)$,因而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 不存在.用罗必达法则导出(2)极限不存在,错误.

【例 9】 (97,2) 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

分析 若只保留高阶无穷大,则分子相当于 $\sqrt{4x^2}+x=2|x|+x=|x|$,分母相当于 $|x|$,因而极限为 1.

【详解】

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|^{-1}\sqrt{4x^2+x-1}+x|x|^{-1}+|x|^{-1}}{|x|^{-1}\sqrt{x^2+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}-1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=1.$$

注 当问题中出现以下两种情况:(ⅰ)当 $x\to x_0$ 时含 $\sin\dfrac{1}{x-x_0},\cos\dfrac{1}{x-x_0}$ 的极限,(ⅱ)当 $x\to\infty$ 时含 $\sin x,\cos x$ 的极限,慎用或不用罗必达法则,而采用"无穷小乘有界量为无穷小"的结论.

【例 10】 (93,2) 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$

分析 当 $x\to-\infty$ 时,$\sqrt{x^2+100}=|x|\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}\sim|x|+\dfrac{100|x|}{2x^2}=-x-\dfrac{50}{x}$,因此 $\sqrt{x^2+100}+x\sim-\dfrac{50}{x}\to0$,极限为 $0\cdot\infty$ 型不定式.

【详解】

$$\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-100}{\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}+1}=-50.$$

【例 11】 求(1) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin 2x}{|x|}\right]$ (2) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{3}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]$

分析 当 $x\to0^+$ 时,$\dfrac{1}{x}\to+\infty$,因而 $e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$;当 $x\to0^-$ 时,$\dfrac{1}{x}\to-\infty$,故 $e^{\frac{1}{x}}\to0$;而 $|x|$ 应视为分段函数,因此先求单侧极限.

【详解】 (1)

$$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}+\frac{\sin 2x}{|x|}\right]=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{3e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{1}{x}}-1}+\frac{\sin 2x}{x}\right]=-1+2=1$$

$$\lim_{x\to0^-}\left[\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}+\frac{\sin 2x}{|x|}\right]=\lim_{x\to0^-}\left[\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}-\frac{\sin 2x}{x}\right]=3-2=1$$

因此

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}+\frac{\sin 2x}{|x|}\right]=1$$

(2) 同理

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{3}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=1$$

注 极限式内含绝对值或当 $x\to 0$ 时极限式内含 $e^{\frac{1}{x}}$、$e^{-\frac{1}{x}}$，先求左右极限. 本例中虽然 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{|x|}$ 都不存在，但 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin 2x}{|x|}\right]$ 存在.

【例 12】 (03,2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x} & x<0\\ 6 & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{1}{4}x} & x>0\end{cases}$

问 a 为何值时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，a 为何值时 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

分析 可去间断点的条件是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，连续性的条件是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 所以连续与可去间断都蕴涵 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

【详解】 当 $x\to 0^-$ 时，$\ln(1+ax^3)\sim ax^3$，$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}\xlongequal{\text{罗必达}}\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2}-1}\sqrt{1-x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{-\dfrac{1}{2}x^2}\sqrt{1-x^2}=-6a$$

当 $x\to 0^+$ 时，$\sin\dfrac{1}{4}x\sim\dfrac{1}{4}x$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{\dfrac{1}{4}x^2}\xlongequal{\text{罗必达}}\lim_{x\to 0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{\dfrac{1}{2}x}$$

$$\xlongequal{\text{罗必达}}2\lim_{x\to 0^+}(a^2e^{ax}+2)=2a^2+a$$

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续或第一类间断，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，从而 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，故 $2a^2+4=-6a$，得 $a=-1$ 或 $a=-2$.

当 $a=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6=f(0)$，$f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

当 $a=-2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=12\neq f(0)$，$f(x)$ 在 $x=0$ 第一类间断.

注 在分段点处求极限或考察连续性，应先计算左、右极限，后应用“极限与单侧极限的关系”得出极限存在与否的结论.

【例 13】 设 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$，而 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)v(x)=k$.

求证 $\lim\limits_{x\to x_0}(1+u(x))^{v(x)}=e^k$.

【证明】 熟知当 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$ 时，有 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=A^B$. 因为

$$\lim_{x\to x_0}(1+u(x))^{v(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\right]^{u(x)v(x)}$$

由极限公式 $\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e$，可知底数部分的极限为 $\lim\limits_{x\to x_0}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}=e$，由题设条件，指

数部分的极限为$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)v(x)=k$,故命题成立.

注 由例中证明的事实,我们给出简化 1^∞ 型不定式的步骤如下:

1. 将底数改写成 $1+u(x)$ 的形式,定出 $u(x)$;
2. 计算出 $u(x)$ 与指数 $v(x)$ 的乘积的极限:$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)v(x)$ 并记这个极限为 k;
3. 定出 1^∞ 型不定式的极限的值$\lim\limits_{x\to x_0}(1+u(x))^{v(x)}=\mathrm{e}^k$.

(三)综合运用无穷小的等价代换与罗必达法则计算极限

【例 14】 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x^2}$

分析 当 $x\to 0$ 时,$\sin x^2\sim x^2$,作等价无穷小代换,简化计算.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\xlongequal{\text{罗必达}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}\xlongequal{\text{罗必达}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$.

注 利用泰勒公式 $\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+0(x^3)$,有 $x-\sin x=\dfrac{1}{6}x^3+0(x^3)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3+0(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}$$

因此更清楚地看出分子 $x-\sin x$ 为什么不宜作 $\sin x\sim x$ 等价代换的原因.

【例 15】 设$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=2$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$.

分析 由于$\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\dfrac{6+f(x)}{x^2}+\dfrac{\sin 6x-6x}{x^3}$,而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-6x}{x^3}$可由罗必达法则或泰勒公式算出,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$可转化为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-6x}{x^3}$的计算.

【解法一】 因$\dfrac{6+f(x)}{x^2}=\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}-\dfrac{\sin 6x-6x}{x^3}$,而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x-6x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6\cos 6x-6}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-36\sin 6x}{6x}=-36$$

故
$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x-6x}{x^3}=38$$

【解法二】 当 $x\to 0$ 时,$\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$,故

$$\sin 6x=6x-\frac{(6x)^3}{6}+o(x^3)=6x-36x^3+o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x-6x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-36x^3+o(x^3)}{x^3}=-36$$

从而
$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x-6x}{x^3}=38.$$

【例 16】 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\tan x}-a^{\sin x}}{(\sqrt[3]{1+x}-1)(1-\cos x)}$

分析 当 $x\to 0$ 时,$\sqrt[3]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{3}x$,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,$a^{\tan x-\sin x}-1\sim(\tan x-\sin x)\ln a$.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\tan x}-a^{\sin x}}{(\sqrt[3]{1+x}-1)(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a^{\tan x-\sin x}-1)a^{\sin x}}{\dfrac{1}{6}x^3}=6\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\ln a$

$$\xlongequal{\text{罗必达}}6\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-\cos x}{3x^2}\ln a\xlongequal{\text{罗必达}}6\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x+\sin x}{6x}\ln a=3\ln a$$

【例 17】 计算$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$

分析　本题为 $\infty-\infty$ 型不定式，先化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型，再计算.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}\xlongequal{\sin^2 x\sim x^2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\frac{\sin x+\cos x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\xlongequal{\text{罗必达}}2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{2}{3}$$

注　在分子中，$\sin^2 x\sim x^2$，但不宜作等价代换. 若将 $\sin^2 x$ 代换为 x^2，则计算结果为 1，是错误的. 有的同学会将分子中 $\cos^2 x$ 代换为 1，计算结果则为 $-\dfrac{1}{3}$，同样是错误的.

【例 18】 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

分析　直接用罗必达法则计算涉及幂指函数的极限，不太容易，因此先作无穷小的等价代换化简，再计算.

【详解】 因$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$，从而当 $x\to 0$ 时，$e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-1\sim\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x}e=e\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\xlongequal{\text{罗必达}}e\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-1}{2x}=e\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)}=-\frac{e}{2}$$

注　利用泰勒公式 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+0(x^2)$ 也可以算出极限值.

【例 19】 (04,2) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1}{x^3}$

【解法一】 当 $x\to 0$ 时，$e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1\sim x\ln\dfrac{2+\cos x}{3}=x\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right)\sim x\dfrac{\cos x-1}{3}$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\dfrac{2+\cos x}{3}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

$$=-\frac{1}{6}$$

【解法二】

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\dfrac{2+\cos x}{3}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+\cos x)-\ln 3}{x^2}\xlongequal{\text{罗必达}}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-\sin x}{2+\cos x}}{2x}$$

$=-\dfrac{1}{6}$

【例 20】 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\sin x-1-\dfrac{x^2}{2}}{(1-\sqrt[8]{1-x^2})\ln\left(1+\dfrac{2}{3}x\right)}$

【详解】 当$x\to0$时,$1-\sqrt[8]{1-x^2}\sim\dfrac{1}{8}x^2$,$\ln\left(1+\dfrac{2}{3}x\right)\sim\dfrac{2}{3}x$,故

$$原式=12\lim_{x\to0}\frac{e^x-\sin x-1-\frac{x^2}{2}}{x^3}\xlongequal{罗必达}12\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x-x}{3x^2}$$

$$\xlongequal{罗必达}12\lim_{x\to0}\frac{e^x+\sin x-1}{6x}\xlongequal{罗必达}12\lim_{x\to0}\frac{e^x+\cos x}{6}=4$$

注　不定式的计算通常在变形后化为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型,在计算$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式时,宜将无穷小因子等价代换成形式简单的无穷小因子,而极限非零的因子先算出极限,再利用罗必达法则,达到有效简化计算的目的.但应注意在加、减的环境下,慎作或无把握时不作无穷小的等价代换.

【例 21】 (03,1)求$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

分析　当$x\to0$时,$\cos x\to1$,$\ln(1+x^2)\to0$,因而极限是1^∞型不定式.

【详解】 原式$=\lim\limits_{x\to0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$,而当$x\to0$时$\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$,$\ln(1+x^2)\sim x^2$

$$\lim_{x\to0}(\cos x-1)\frac{1}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

故原式$=e^{-\frac{1}{2}}$.

注　若$\lim\limits_{x\to\triangle}u(x)=0$,$\lim\limits_{x\to\triangle}v(x)=\infty$,并且$\lim\limits_{x\to\triangle}u(x)v(x)=k$,则$\lim\limits_{x\to\triangle}(1+u(x))^{v(x)}=e^k$,其中$\triangle=x_0$或$\infty$.因$\lim\limits_{x\to\triangle}(1+u(x))^{v(x)}=\lim\limits_{x\to\triangle}e^{v(x)\ln(1+u(x))}=e^{\lim\limits_{x\to\triangle}v(x)\ln(1+u(x))}$,而$\lim\limits_{x\to\triangle}v(x)\ln(1+u(x))=\lim\limits_{x\to\triangle}u(x)v(x)=k$.本例中$u(x)=\cos x-1$,$v(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}$.

【例 22】 计算$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

分析　当$x\to0$时,$\dfrac{\arcsin x}{x}\to1$,$\dfrac{1}{x^2}\to\infty$,极限为1^∞型不定式.

【详解】 因$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{\arcsin x-x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,而

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x-x}{x}\frac{1}{x^2}\xlongequal{罗必达}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{3x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=\frac{1}{6}$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{6}}$.

【例 23】　(02,2) 已知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，且满足

$$\lim_{h\to0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}} \qquad ①$$

求 $f(x)$.

分析　本题的极限为 1^{∞} 型不定式，先求极限.

【解法一】　因 $\lim\limits_{h\to0}\left(\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim\limits_{h\to0}\left(1+\dfrac{f(x+xh)-f(x)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}$，而

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+xh)-f(x)}{f(x)}\,\frac{1}{h} = \frac{x}{f(x)}\lim_{h\to0}\frac{f(x+xh)-f(x)}{xh} = \frac{xf'(x)}{f(x)} \qquad ②$$

故
$$\lim_{h\to0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}} \qquad ③$$

由 ① 与 ③ 有
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^2} \qquad ④$$

从而 $f(x)=Ce^{-\frac{1}{x}}$. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，则 $C=1$，$f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$.

【解法二】　在 ① 两端取对数有

$$\frac{1}{x} = \lim_{h\to0}\frac{\ln f(x+xh)-\ln f(x)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{f(x+xh)-f(x)}{f(x)}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{f(x+xh)-f(x)}{hf(x)} = \frac{x}{f(x)}\lim_{h\to0}\frac{f(x+xh)-f(x)}{xh} = \frac{xf'(x)}{f(x)} \qquad ⑤$$

由 ⑤ 得 $f(x)=Ce^{-\frac{1}{x}}$. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，则 $C=1$，$f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$.

注　在 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+xh)-f(x)}{xh} \xlongequal{t=xh} \lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x+t)-f(x)}{t} = f'(x)$ 的计算中用到导数的定义. 虽然它是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式，但不能用罗必达法则，不然则有 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x+t)-f(x)}{t} = \lim\limits_{t\to0}f'(x+t)=f'(x)$，这要求 $f'(x)$ 连续，而题设条件仅有 $f(x)$ 可导而无 $f'(x)$ 连续的假定.

【例 24】　设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶导数，$\lim\limits_{x\to0}\left(x+\dfrac{f(x)}{x}-2\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$，求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$. 令 $g(x)=f(x)-3x+2x^2$，求 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{g(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

【详解】　因 $x+\dfrac{f(x)}{x}-2=\left(\left(x+\dfrac{f(x)}{x}-2\right)^{\frac{1}{x}}\right)^{x}$，由题设条件有 $\lim\limits_{x\to0}\left(x+\dfrac{f(x)}{x}-2\right)=1$.

从而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=3$，$f(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}x=0$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=3$.

由于 $\lim\limits_{x\to0}\left(x+\dfrac{f(x)-3x}{x}\right)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\dfrac{f(x)-3x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$，故

$$3=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)-3x}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x+\dfrac{f(x)-3x}{x}}{x}=1+\lim_{x\to0}\frac{f(x)-3x}{x^2}$$