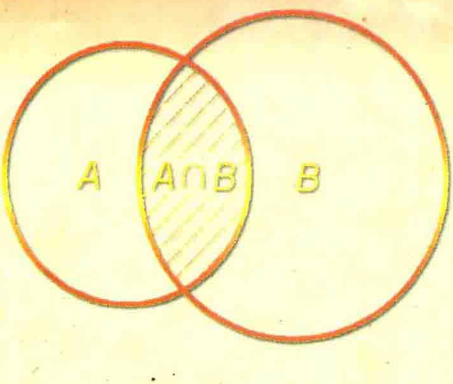
高中数学

龙门专题

函数

傅荣强 主编

（修订版）



龍門書局

主编 傅荣强
本册主编 朱岩 傅荣福
编 孙华清 朱宏

函数

(修订版)

龙门专题

龍門書局

(修订版)

函　数

傅荣强　主编

责任编辑　王　敏　乌　云

龙门书局　出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

化学工业出版社印刷厂印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

2002 年 1 月修　订　版　　开本:890×1240　A5

2002 年 3 月第七次印刷　　印张:10

印数:120 001－150 000　　字数:370 000

ISBN 7-80160-131-9/G·167

定　价:10.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

参考书几乎是每一位学生在学习过程中必不可少的。如何发挥一本参考书的长效作用，使学生阅读后，能更透彻、迅速地明晰重点、难点，在掌握基本的解题思路和方法的基础上，举一反三、触类旁通，这是教参编者和读者共同关心的问题。这套《龙门专题》，就是龙门书局本着以上原则组织编写的。它包括数学、物理、化学、生物四个学科共计 55 种，其中初中数学 12 种，高中数学 12 种，初中物理 5 种，高中物理 7 种，初中化学 4 种，高中化学 10 种，高中生物 5 种。

本套书在栏目设置上，主要体现了循序渐进的特点。每本书内容分为两篇——"基础篇"和"综合应用篇"（高中为"3 + X"综合应用篇）。"基础篇"中的每节又分为"知识点精析与应用"、"视野拓展"两个栏目。其中"**知识点精析与应用**"着眼于把基础知识讲透、讲细，帮助学生捋清知识脉络，牢固掌握知识点，为将成绩提高到一个新的层次奠定扎实的基础。"**视野拓展**"则是在牢固掌握基础知识的前提下，为使学生成绩"更上一层楼"而准备的。需要强调的是，这部分虽然名为"拓展"，但仍然立足于教材本身，主要针对教材中因受篇幅所限言之不详，但却是高（中）考必考内容的知识点（这类知识点，虽然不一定都很难，但却一直是学生在考试中最易丢分的内容），另外还包括了一些不易掌握、失分率较高的内容。纵观近年来高（中）考形势，综合题与应用题越来越多，试行"3 + X"高考模式以后，这一趋势更加明显。"综合应用篇"正是为顺应这种形势而设，旨在提高学生的综合能力与应用能力，使学生面对纷繁多样的试题，能够随机应变，胸有成竹。

古人云：授人以鱼，只供一饭之需；授人以渔，则一生受用无穷。这也是我们编写这套书的宗旨。作为龙门书局最新推出的《龙门专题》，有以下几个特点：

1. *以"专"为先*　本套书共计 55 种，你尽可以根据自己的需要从

中选择最实用、最可获益的几种。因为每一种都是对某一个专题由浅入深、由表及里的诠释，读过一本后，可以说对这个专题的知识就能够完全把握了。

2. 讲解细致完备　由于本套书是就某一专题进行集中、全面的剖析，对知识点的讲解自然更细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识，能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小，更易于理解和记忆。

3. 省时增效　由于“专题”内容集中，每一本书字数相对较少，学生可以有针对性地选择，以实现在较短时间里对某一整块知识学透、练透的愿望。

4. 局限性小　与教材“同步”与“不同步”相结合。“同步”是指教材中涉及的知识点本套书都涉及，并分别自成一册；“不同步”是指本套书不一定完全按教材的章节顺序编排，而是把一个知识块作为一个体系来加以归纳。如归纳高中立体几何中的知识为四个方面、六个问题，即“点、线、面、体”和“平行、垂直、成角、距离、面积、体积”。让学生真正掌握各个知识点间的相互联系，从而自然地连点成线，从“专题”中体味“万变不离其宗”的含义，以减小其随教材变动的局限性。

5. 主次分明　每种书的前面都列出了本部分内容近几年在高考中所占分数的比例，使学生能够根据自己的情况，权衡轻重，提高效率。

本套书的另一特点是充分体现“减负”的精神。“减负”的根本目的在于培养新一代有知识又有能力的复合型人才，它是实施素质教育的重要环节。就各科教学而言，只有提高教学质量，提高效率，才能真正达到减轻学生负担的目的。而本套书中每本书重点突出，讲、练到位，对于提高学生对某一专题学习的相对效率，大有裨益。这也是本书刻意追求的重点。

鉴于本书立意的新颖，编写难度很大，又受作者水平所限，书中难免有疏漏之处，敬请不吝指正。

编　者

2001年11月1日

编委会（高中数学）

（修订版）

零点1

目 录

第一篇　基础篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科，简说研究“数”和“形”的学科．代数是它的侧重研究运算方法的一个分支，函数是代数的一个节点．

函数的本质是研究两个非空数集变量之间的对应关系．

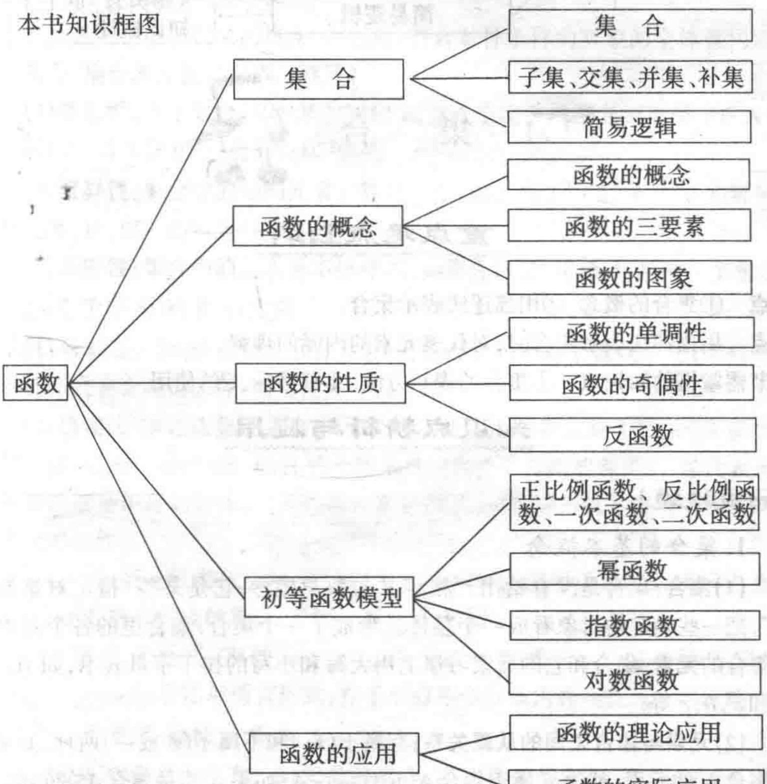
函数研究的主要问题是：

(1)根据已知条件，求出函数的解析式(表格，图象)；

(2)通过函数的解析式(表格，图象)，研究函数的性质．

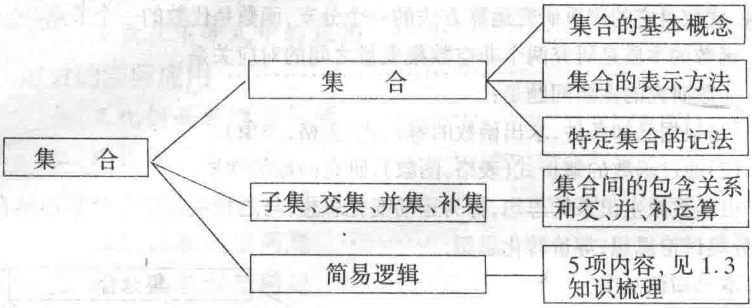
由函数派生出来的思想，称为运动变化思想，与之相关的思想是数形结合思想，分类讨论思想，等价转化思想．

本书知识框图

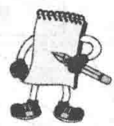


第一讲 集 合

本讲知识框图



1.1 集 合



重点难点归纳

重点 ①集合的概念.②用描述法表示集合.

难点 用描述法表示集合时,对代表元素的内涵的理解.

本节需掌握的知识点 ①集合的表示方法.②符号∈、∉的使用.

知识点精析与应用

【知识梳理】

1.集合的基本概念

(1)集合:集合是没有给出严格定义的数学概念,它是某些“指定对象的全体”,把一些确定的对象看成一个整体就形成了一个集合.集合里的各个对象叫做集合的元素.集合和它的元素习惯上用大写和小写的拉丁字母表示,如 A,B,C 和 a,b,c 等.

(2)元素与集合之间的从属关系:有属于(∈)和不属于(∉或$\overline{\in}$)两种.如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A,记作 $a\in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就

说 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$（或 $a\bar{\in}A$）.

(3)集合的三个特征：对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的，互异的，无序的.

(4)集合的类型：含有有限个元素的集合叫做有限集；含有无限个元素的集合叫做无限集；不含有任何元素的集合叫做空集，记作 $\varnothing$.

2. 集合的表示方法

(1)列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法.

(2)描述法：把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，它的一般形式是 $\{P|P$ 适合的条件$\}$，其中 P 叫做代表元素.

3. 特定集合的记法

$\mathbf{N}$（自然数集），$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$（正整数集），$\mathbf{Z}$（整数集），$\mathbf{Q}$（有理数集），$\mathbf{R}$（实数集）.

【知识点精析】

自然数集

1. 关于集合的基本概念

集合是一个不加定义的概念. 一般地，符合某种条件的对象的全体就构成了一个集合. 集合的元素具有以下性质：

(1)确定性：对于集合 A 和某一对象 x，有一个明确的判断标准是 $x\in A$，还是 $x\notin A$，二者必居其一，而且只居其一.

(2)互异性：集合中的相同元素只算是一个，如方程 $x^2-2x+1=0$ 的解集用集合记为 $\{1\}$，而不能写为 $\{1,1\}$.

(3)无序性：集合中的元素是不排序的，如集合 $\{1,2\}$ 与 $\{2,1\}$ 是同一个集合.

2. 关于集合的表示方法

(1)列举法：列举法适合表示有限集，当集合中元素的个数较少时，用列举法表示这样的集合较为方便，而且使人一目了然.

(2)描述法：描述法是把集合中元素的公共属性写在大括号内，用来表示集合的方法. 它的一般形式（$\{P|P$ 适合的条件$\}$）有两个方面的含义，一是代表元素 P 的属性就是集合的属性，二是代表元素 P 所适合的条件，就是集合中所有的元素适合的条件.

描述法的语言形式有三种：文字语言，符号语言，图形语言. 如，表示由直线 $y=x$ 上所有的点构成的集合，可用下列三种方法：

①文字语言形式：直线 $y=x$ 上所有的点的集合；②符号语言形式：$\{(x,y)|y=x\}$；③图形语言形式：在平面直角坐标系内画出直线 $y=x$（略）.

3. 关于空集和特定集合

按规定，空集是不含有任何元素的集合. 在这样的规定下，空集有两个方面

的作用:①空集客观地反映了一些问题的实际意义.如,方程组$\begin{cases}x+y=1\\x+y=3\end{cases}$的解的集合就是空集;又如,不等式 $x^2<0$ 的解的集合也是空集.②空集在反映集合与集合之间的关系上起到了“桥梁”的作用,使一些难以表达的问题,得到了简明扼要的表达.如,$M=\{(x,y)\mid x+y=16\}$,$N=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$,则 M 与 N 的关系可简记为$M\cap N=\varnothing$.

N、$\mathbf{N}^*$、**Z**、**Q**、**R** 等的意义是约定俗成的,解题中作为已知使用,不必重述它们的意义.

4.需要注意的几个问题

(1)①符号“$\in$,$\notin$”只能用在元素与集合之间,表示元素与集合的从属关系,如$0\in\mathbf{N}$,$0\notin\mathbf{N}^*$,除此之外,“$\in$,$\notin$”没有其它用途.②无论何时何地,“$x\in\varnothing$”的写法都是错误的.

(2)a 与$\{a\}$是不同的,a 表示一个元素,$\{a\}$表示由一个元素 a 构成的集合,一般称$\{a\}$为单元素集;特别地,0 与$\{0\}$是不同的.

(3)$\{0\}$与$\varnothing$是不同的,$\{0\}$表示由一个元素 0 构成的集合,$\varnothing$是不含任何元素的集合.

(4)表示无限集必须用描述法;语言形式可以是文字语言,可以是符号语言,也可以是图形语言.列举法实施不了对无限集中的所有元素的一一列举.

【解题方法指导】

1.集合的基本概念问题

[例 1] 下面的各组对象能否构成集合?

(1)所有漂亮的人;

(2)所有大于 0 的负数;

(3)不大于 3、不小于 0 的所有整数;

(4)所有正偶数.

按客观标准衡量,看其是否有确定的意义?

解 (1)所有漂亮的人不能构成集合.这是因为找不到判别人的漂亮与否的客观标准,对集合而言,“所有漂亮的人”也就没有确定的意义.

(2)所有大于 0 的负数能够成集合,它是空集.这是因为大于 0 的客观标准是存在的,即一切正数都大于 0,而大于 0 的负数是不存在的,所以说所有大于 0 的负数能够成集合,它是空集$\varnothing$.

(3)不大于 3、不小于 0 的所有实数 x 满足 $0\leqslant x\leqslant 3$,其中的整数是 0、1、2、3,所以不大于 3、不小于 0 的所有整数能构成集合$\{0,1,2,3\}$.

(4)所有正偶数能够成集合,这个集合是$\{n\mid n=2n,n\in\mathbf{N}^*\}$.

[例 2]　设集合 $A=\{k^2-k,2k\}$，求实数 k 的取值范围.

解　根据集合中元素的互异性，有 $k^2-k\neq 2k$.

解得　$k\neq 0,k\neq 3$.

$\therefore$ 实数 k 的取值范围是 $\{k\mid k\in\mathbf{R}$，且 $k\neq 0,k\neq 3\}$.

2. 元素与集合之间的从属关系问题

[例 3]　用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空：

(1) 3.14 $\underline{\ \in\ }$ $\mathbf{Q}$，0 $\underline{\ \notin\ }$ $\mathbf{N}^*$，$\sqrt{2}$ $\underline{\ \notin\ }$ $\mathbf{Z}$，$(-1)^0$ $\underline{\ \in\ }$ $\mathbf{N}^*$；

(2) $2\sqrt{3}$ $\underline{\ \notin\ }$ $\{x\mid x<\sqrt{11}\}$，$3\sqrt{2}$ $\underline{\ \in\ }$ $\{x\mid x>4\}$，$\sqrt{2}+\sqrt{5}$ $\underline{\ \in\ }$ $\{x\mid x\leqslant 2+\sqrt{3}\}$；

(3) 3 $\underline{\ \notin\ }$ $\{x\mid x=n^2+1,n\in\mathbf{N}^*\}$，$5$ $\underline{\ \in\ }$ $\{x\mid x=n^2+1,n\in\mathbf{N}^*\}$；

(4) $(-1,1)$ $\underline{\ \notin\ }$ $\{y\mid y=x^2\}$，$(-1,1)$ $\underline{\ \in\ }$ $\{(x,y)\mid y=x^2\}$.

解　(1) $\in$、$\notin$、$\notin$、$\in$；

(2) $2\sqrt{3}=\sqrt{12}>\sqrt{11}$，$3\sqrt{2}=\sqrt{18}>\sqrt{16}=4$，

$$\sqrt{2}+\sqrt{5}=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2}$$

这里实际上是在比较 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ 与 $2+\sqrt{3}$ 的大小

$$=\sqrt{7+2\sqrt{10}}<\sqrt{7+2\sqrt{12}}$$

$$=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$$，故填 $\notin$、$\in$、$\in$；

(3) 令 $n^2+1=3$，$n=\pm\sqrt{2}\notin\mathbf{N}^*$，令 $n^2+1=5$，

$n=\pm 2$，$2\in\mathbf{N}^*$. 故填 $\notin$、$\in$；

(4) $\notin$，$\in$.（因为 $\{y\mid y=x^2\}$ 中元素是数，而 $(-1,1)$ 代表一个点）.

点评　确定元素是否在集合中，要根据元素是否满足代表元素所适合的条件来确定. 是，使用符号"$\in$"，否则使用"$\notin$".

[例 4]　设 a,b 是整数，集合 $E=\{(x,y)\mid (x-a)^2+3b\leqslant 6y\}$，点 $(2,1)\in E$，但点 $(1,0)\notin E$，$(3,2)\notin E$，求 a,b 的值.

分析　$(2,1)\in E$，$(2,1)$ 适合不等式 $(x-a)^2+3b\leqslant 6y$；$(1,0)\notin E$，$(3,2)\notin E$，$(1,0)\in\{(x,y)\mid (x-a)^2+3b>6y\}$，$(3,2)\in\{(x,y)\mid (x-a)^2+3b>6y\}$，这其中符号"$\leqslant$"到"$>$"的过渡十分关键.

解　$\because (2,1)\in E$，

可与下面的说法类比：$A\subseteq I$，$x\in I\Rightarrow$ 若 $x\notin A$，则必有 $x\in\complement_I A$.

$\therefore (2-a)^2+3b\leqslant 6$.　①

$\because (1,0)\notin E$，$(3,2)\notin E$，

$\therefore (1-a)^2+3b>0$　②

$(3-a)^2+3b>12$　③

$(x-a)^2+3b$ 与 $6y$ 的关系有且仅有两种：$(x-a)^2+3b\leqslant 6y$；$(x-a)^2+3b>6y$. 二者必居其一，而且只居其一. $(1,0)$ 和 $(3,2)$ 不适合其一，必适合其二.

由①、②得 $6-(2-a)^2>-(1-a)^2$，

展开并整理，得 $2a+3>0, a>-\frac{3}{2}$.

类似地，由①、③得 $a<-\frac{1}{2}$.

$\therefore -\frac{3}{2}<a<-\frac{1}{2}$.

解答本题的思维可以和日常生活中的事情联系起来.一件事有两种可能，不得兼有.那么这件事不是第一种可能，就是第二种可能.

又$\because a, b$ 为整数，

$\therefore a=-1$，代入①、②

得 $-4\leqslant 3b\leqslant -3$,

$\therefore b=-1$.

综上所述，$a=-1, b=-1$.

点评 (1)本题解法具有一般性.E 是点集(平面区域)，把平面上所有点的集合 I 视为全集，对任意的 (x,y) 有：或者 $(x,y)\in E$，或者 $(x,y)\notin E$，即 $(x,y)\in \complement_I E$，如点 $(1,0)$ 和 $(3,2)$ 就属这样的点.(2)本题由 $(1,0),(3,2)\notin E$ 得 $(1,0),(3,2)\in \complement_I E$，得到了不等式②和③，应用的数学思想是等价转化思想.

3.集合的表示方法问题

[例5] 用另一种方法表示下列集合：

描述法(列举法)的另一种方法是列举法(描述法)

(1){绝对值不大于3的整数}；

(2){能被3整除的且小于10的正数}；

(3) $\{x \mid x=|x|, x\in \mathbf{Z}, 且\ x<5\}$;

(4) $\{x \mid (2x-1)(x+2)(x^2+1)=0, x\in \mathbf{Z}\}$;

(5) $\{(x,y) \mid x+y=6, x\in \mathbf{N}^*, y\in \mathbf{N}^*\}$.

解 (1){绝对值不大于3的整数}还可以表示为 $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$；

(2) $\{3,6,9\}$；

(3) $\because x=|x|, \therefore x\geqslant 0$，又$\because x\in \mathbf{Z}$，且 $x<5$，$\therefore \{x \mid x=|x|, x\in \mathbf{Z}$，且 $x<5\}$ 还可表示为 $\{0,1,2,3,4\}$；

(4) $\{-2\}$；

(5) $\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$.

[例6] 用列举法表示下列集合：

(1) $A=\{x \mid x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}, a, b$ 为非零实数$\}$；

(2) $A=\{x \mid \frac{6}{3-x}\in \mathbf{Z}, x\in \mathbf{N}^*\}$.

解析 (1)关键是根据绝对值的定义化简 $x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}$.当 $a>0, b>0$ 时，$x=2$；当 $a<0, b<0$ 时，$x=-2$；当 a、b 异号时，$x=0$.所以，$A=\{-2,0,2\}$.

(2)关键是应用元素 x 满足的条件：$\frac{6}{3-x}\in \mathbf{Z}$，且 $x\in \mathbf{N}^*$，得到 x 的值. x 所取的正整数，要使 $3-x$ 整除 6. 故 $3-x=\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 6$，$x=2,4,1,5,6,0,-3,9$. 而 $x=0,-3$ 舍去. 这样，$A=\{1,2,4,5,6,9\}$.

【基础训练题】

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x\mid x\leqslant\sqrt{12}\}$，$a=\sqrt{12}$，则下列关系中正确的是 （ D ）

A. $a\subsetneqq M$　　B. $a\notin M$　　C. $\{a\}\in M$　　D. $\{a\}\subsetneqq M$

2. 下列集合中，表示同一个集合的是 （ B ）

A. $M=\{(3,2)\}$，$N=\{(2,3)\}$

B. $M=\{3,2\}$，$N=\{2,3\}$

C. $M=\{(x,y)\mid x+y=1\}$，$N=\{y\mid x+y=1\}$

D. $M=\{1,2\}$，$N=\{(1,2)\}$

3. 设 $M=\{1,2\}$，下面表示方法正确的是 （ C ）

A. $2\notin M$　　B. $1\notin M$　　C. $1\in M$　　D. $1\in M$，或 $1\notin M$

4. 下列表示方法正确的是 （ D ）

A. $0\in\varnothing$　　B. $\varnothing\in\{0\}$　　C. $\varnothing\notin\{0\}$　　D. $0\in\{0\}$

二、填空题

5. 用适当的符号填空.

(1) $\sqrt{2}$ __$\notin$__ $\mathbf{Q}$，$1-\sqrt{2}$ __$\notin$__ $\mathbf{Q}$；(2) $\frac{1}{2}$ __$\notin$__ $\mathbf{N}^*$，0 __$\notin$__ $\mathbf{N}^*$；

(3) 0 __$\in$__ $\mathbf{Z}$，$2+\sqrt{3}$ __$\in$__ $\mathbf{R}$.

6. $A=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\notin\mathbf{Q}\}$，下列实数：$-\frac{1}{3}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，π，$-0.101010\cdots$，$3^{-\frac{1}{2}}$，$\sqrt[3]{-2}$，$\cos60°$ 中，集合 A 中的元素是 __$\frac{\sqrt{2}}{2}$，π，$3^{-\frac{1}{2}}$__. $\sqrt[3]{-2}$

7. 设 $\frac{1}{2}\in\left\{x\,\middle|\,x^2-ax-\frac{5}{2}=0\right\}$，则集合 $\left\{x\,\middle|\,x^2-\frac{19}{2}x-a=0\right\}$ 中所有元素的和为 __$\frac{19}{2}$__. [illegible] -5　$\frac{1}{2}$，9

8. 用列举法表示下列集合：

(1) 12 的正约数的集合为 __$\{1,2,3,4,6,12\}$__. (2) 20 以内的质数的集合为 __$\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$__.

(3) $\{x\mid x^2-4=0\}=$ __$\{2,-2\}$__ (4) $\{x\mid x^4-1=0,x\in\mathbf{R}\}=$ __$\{1,-1\}$__

三、解答题

9. 方程 $ax+b=0$，当 a,b 满足什么条件时，解集是有限集；当 a,b 满足什么条件时，解集是无限集？

$\Delta=4-4a<0$　$a>1$　$a\geq$

10. 已知集合 $A=\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$. (1) 若 A 中只有一个

$a=0$　$x=-\frac{1}{2}$

$\Delta=4-4a=0$　$a=1$　$(x+1)^2=0$　$x=-1$

元素,求 a 的值,并求出这个元素;(2)若 A 中至多只有一个元素,求 a 的取值范围.

【答案与提示】

一、 1.D(集合 M 是一个无穷集,元素 $a=\sqrt{12}\in M$,因此单元素集合 $\{a\}\subsetneqq M$.) 2.B(因为B中集合 M 和集合 N 都是由2、3这两个数字组成的集合,而集合里元素的顺序不固定,即无序性,$\therefore M$、N 表示相同集合.) 3.C(元素与集合之间的关系是从属关系,用符号 $\in$ 或 $\notin$ 表示,二者有且只有一个可选择,所以本题答案C正确.) 4.D($\varnothing$ 本身是集合,不含任何元素,符号 $\in$、$\notin$ 只能用在元素与集合之间.)

二、 5.(1)$\notin$,$\notin$;(2)$\notin$,$\notin$;(3)$\in$,$\in$. 6.A 是无理数集合,所以集合 A 中的元素是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,π,$3^{-\frac{1}{2}}$,$\sqrt[3]{-2}$. 7.$\because \frac{1}{2}\in\left\{x\,\middle|\,x^2-ax-\frac{5}{2}=0\right\}$,$\therefore$ 有 $\left(\frac{1}{2}\right)^2-a\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{2}=0$,解得 $a=-\frac{9}{2}$,把 a 代入 $x^2-\frac{19}{2}x-a=0$,得 $x^2-\frac{19}{2}x+\frac{9}{2}=0$,由韦达定理 $x_1+x_2=\frac{19}{2}$,x_1+x_2 即为集合 $\left\{x\,\middle|\,x^2-\frac{19}{2}x-a=0\right\}$ 中所有元素的和. 8.(1)$\because$ 12的正约数为1,2,3,4,6,12,$\therefore$ 12的正约数的集合为 $\{1,2,3,4,6,12\}$. (2)$\because$ 20以内的质数是2,3,5,7,11,13,17,19,$\therefore$ 20以内的质数的集合是 $\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$. (3)$\because x^2-4=0$ 的根为2或 -2,$\therefore \{x\mid x^2-4=0\}=\{2,-2\}$. (4)$\because$ 在实数集内 $x^4-1=0$ 的根只有1或 -1,$\therefore \{x\mid x^4-1=0,x\in\mathbf{R}\}=\{1,-1\}$.

三、 9.$a\neq0$ 时解集是有限集;当 $a=0$ 且 $b=0$ 时解集是无限集.

10.(1)为使方程 $ax^2+2x+1=0$ 只有一个根,须 $a=0$,解得 $x=-\frac{1}{2}$;或 $a\neq0$ 时,$\Delta=4-4a=0$,即 $a=1$ 时,解得 $x=-1$(重根). (2)A 中只有一个元素时,已求得 $a=0$ 或 $a=1$,A 中没有元素时 $a\neq0$,由 $\Delta<0$ 得 $a>1$.$\therefore$ 所求 a 的取值范围是 $\{a\mid a\geqslant1\}\cup\{0\}$.

视野拓展

我们来剖析一下集合的描述法.

集合的表示方法之描述法定义:把集合中元素的公共属性描述出来,写在大括号"{ }"内,这种表示集合的方法叫做描述法.描述法的形式是 $\{P\mid P$ 适合的条件$\}$,其中 P 一般称之为代表元素.

1.对 P 的剖析

P 在集合 $\{P\mid P$ 适合的条件$\}$ 中的作用是"两个代表"的作用.第一个代表作

用，P 代表集合$\{P|P$ 适合的条件$\}$的属性，就是说 P 是什么属性的元素，集合就是什么属性的集合. 如，P 是点，则集合就是点集，P 是蔬菜，则集合就是蔬菜的集合. 第二个代表作用，P 所适合的条件代表集合中所有元素适合的条件. 如，在集合$\{(x,y)|y^2=2x\}$中，P 是点(x,y)，P 适合的条件是 $y^2=2x$，则在集合$\{(x,y)|y^2=2x\}$中，所有的元素都适合条件 $y^2=2x$，无一例外.

2. 集合$\{P|P$ 适合的条件$\}$的载体趋势

在集合$\{P|P$ 适合的条件$\}$中，P 有两个"特性". 第一个特性，P 具有任意性，P 具有确定的意义时，它可以代表现实世界的万事万物，P 不具有确定的意义时，这时约定集合是空集$\varnothing$. 第二个特性，P 适合的条件具有灵活性，这是因为所有的关于"数"与"形"的关系都可以用 P 所适合的条件客观地反映出来. 如，不等式 $x^2-ax>0$ 的解集可写为$\{x|x^2-ax>0\}$；又如，圆 $x^2+y^2=1$ 上的所有点的集合可表示为$\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$等.

由于 P 具有任意性，P 适合的条件具有灵活性，所以以集合$\{P|P$ 适合的条件$\}$为载体，数以万计的数学问题就会产生，只要把有关条件嵌入集合中. 如，曲线 $C_1: y=f(x)$与曲线 $C_2: y=g(x)$没有交点、有且只有一个交点可以分别表示为

$C_1=\{(x,y)|y=f(x)\}$与 $C_2=\{(x,y)|y=g(x)\}$的关系分别是 $C_1\cap C_2=\varnothing$和 $C_1\cap C_2$ 是单元素集.

由以上可知，集合$\{P|P$ 适合的条件$\}$的载体趋势是：以集合为载体，可以产生数以万计的数学题，不过是将一些数学问题的已知条件嵌入集合之中并变通语言表述形式罢了.

【思维拓展训练题】

1. 写出一元一次方程的解的集合.
2. 写出一元一次方程的集合.
3. 写出实系数一元二次方程的解的集合(有实数解).
4. 写出一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$的图象上所有点的集合. $\{(x,y)|y=kx+b\}$
5. 写出抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的顶点的集合.
6. 写出不等式$\frac{1}{x}<3$ 的解的集合. $\{x|\frac{1}{x}<3\}$
7. $\{1,2\}\in\{1,2,3\}$，这种表示方法是否正确?
8. $\{1,2\}\in\{\{1,2\},\{3,4\}\}$，这种表示方法是否正确?
9. $\mathbf{Q}\in\{\mathbf{Q},\mathbf{N}^*\}$，这种表示方法是否正确?
10. 设 P 是直角三角形，直角边是 a 和 b，斜边是 c，写出 P 的集合.