NUMERICAL ANALYSIS OF SEVERAL KINDS OF IMPULSIVE DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

几类脉冲延迟微分方程的数值分析

张贵来 著

東北大學出版社
Northeastern University Press

Numerical analysis of several kinds of impulsive delay differential equations

几类脉冲延迟微分方程的数值分析

张贵来 著

东北大学出版社

·沈 阳·

图书在版编目（CIP）数据

几类脉冲延迟微分方程的数值分析 / 张贵来著. — 沈阳 ：东北大学出版社，2015. 11

ISBN 978-7-5517-1132-6

Ⅰ. ①几… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①微分方程—数值分析 Ⅳ. ①O241. 8

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 255372 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110819
电话：024－83687331（市场部） 83680267（总编室）
传真：024－83680180（市场部） 83680265（社务部）
E-mail：neuph@ neupress. com
http：//www. neupress. com
印 刷 者：沈阳市第二市政建设工程公司印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：145mm × 210mm
印　　张：3
字　　数：83 千字
出版时间：2015 年 11 月第 1 版
印刷时间：2015 年 11 月第 1 次印刷
责任编辑：孙 锋 郎 坤　　责任校对：叶 子
封面设计：刘江旸　　责任出版：唐敏志

ISBN 978-7-5517-1132-6　　定　　价：35. 00 元

前 言

脉冲延迟微分方程在现实生活中有着广泛的应用，如种群生态学、流行病动力学、生物技术、神经网络、脉冲控制等领域。由于脉冲延迟微分方程解的显式表达式难以求得，因此研究相应的数值方法并讨论其数值解的稳定性具有较大的理论意义和实际价值。

脉冲常延迟微分方程有着广泛的应用，其精确解的存在性、稳定性和振动性都得到了广泛的研究。然而脉冲常延迟微分方程数值解的稳定性只得到了初步的研究，并且其数值解的振动性还是一个空白领域。本书尝试填补这个空白，不仅研究了其数值解的稳定性，还研究了其数值解的振动性。

一直到最近，自变量分段连续型脉冲微分方程精确解的稳定性才得到初步的研究，而其数值解还是一个空白领域。本书尝试填补这个空白，针对该方程构造了高阶收敛的数值格式，并研究了其数值解的稳定性和振动

性。

本书不仅运用稳定函数的帕德逼近理论分别研究了自变量分段连续的脉冲微分方程、自变量分段连续的超前脉冲微分方程、自变量分段连续的延迟脉冲微分方程数值解的稳定性和振动性，而且运用没有脉冲扰动微分方程的数值解理论研究了脉冲常延迟微分方程数值解的稳定性和振动性。

本书展示了作者关于脉冲常延迟微分方程和自变量分段连续型脉冲微分方程数值解研究的一些初步结果，希望能够起到抛砖引玉的作用，从而使更多的人来研究脉冲延迟微分方程数值解。

感谢刘明珠教授的指导与帮助；感谢家人和朋友的鼓励和支持；感谢以下项目的资助：

东北大学秦皇岛分校科研项目：XNB201415

河北省自然科学基金项目：A2015501130

河北省高等学校科学研究项目：ZD2015211

张贵来

2015 年 4 月于秦皇岛

目 录

第一章 绪 论

许多发展过程具有这样的特性：不仅与当前的状态有关，还依赖过去的状态，而且系统经历一个不受系统控制的瞬间作用或系统的状态在短时间内发生迅速改变，但这个短暂的扰动时间与整个发展过程时间相比可以忽略不计。这时连续型微分方程已经不能刻画这种现象，分析这种变化过程的特征和规律时，往往需要考虑不连续的延迟动力系统，即脉冲延迟微分方程。其最突出的特点就是能够充分考虑到延迟现象和瞬时突变现象的影响，能够深刻准确地反映事物的变化规律。

脉冲延迟微分方程在现实生活中有着广泛的应用，如种群生态学、流行病动力学、生物技术、神经网络、脉冲控制等领域。由于脉冲延迟微分方程解的显式表达式难以求得，研究相应的数值方法并讨论其数值解的性态具有较大的理论意义和实际价值。

第一节 脉冲常延迟微分方程数值的研究现状

脉冲微分方程理论是 1960 年由 Mil'man 和 Myshkis[1] 在论文 *On the Stability of Motion in the Presence of Impulses* 中首次提出的，并因此为数学界增添了一个新的分支。自 20 世纪 80 年代，脉冲微分方程受到了许多专家学者的关注，并且得到了一些重要的成果[2,3]。然而脉冲微分方程的数值解到 21 世纪才开始被广泛研究。2001 年，Randelovic 等人[4] 率先研究了脉冲微分方程 Euler 方法的收敛性。

2008 年，冉晓娟和刘明珠等人[5]研究了如下标量线性脉冲常微分方程数值解的收敛性和稳定性：

$$\begin{cases} x'(t)=ax(t),\ t>0,\ t\neq k \\ \Delta x(t)=bx(t^-),\ t=k \\ x(0^+)=x_0 \end{cases}$$

其中，a，b，x_0 都为实数且 $b\neq -1$，$k\in \mathbf{N}$。该论文得到了出乎意料的结论，引起了专家学者对于脉冲微分方程数值方法稳定性的关注。

在文献［6］中，梁慧等人把文献［5］中的结论推广到多维的线性脉冲微分方程。作者研究了多维的线性脉冲微分方程精确解的渐近稳定性以及变步长 Runge-Kutta 方法的渐近稳定性。

近年来，脉冲时刻固定的脉冲常微分方程数值解得到了广泛的研究[7-9]。对于脉冲时刻依赖状态的非线性常脉冲微分方程，R. Baier 等人[10]也给出了高阶收敛的数值方法。

在脉冲常微分方程的理论飞速发展的同时，脉冲延迟微分方程精确解的存在性、振动性、有界性等方面也受到了许多专家学者的重视，而且获得了大量的成果[11-19]。但是，其数值解的研究还处于刚刚起步的状态，关于脉冲延迟微分方程数值解的理论和成果很少。2010 年，丁效华教授、吴开宁和刘明珠教授[20]将改进的显式 Euler 方法应用于一类标量线性脉冲常延迟微分方程，并且证明了其收敛阶为 1。

文献［21］研究了一类线性脉冲延迟微分方程，构造了如下的数值方法：当系统不发生脉冲的时候，直接运用 Euler 方法计算方程的近似值，当系统发生脉冲的时候，数值解也相应地发生跳跃，并且在精确解指数稳定的条件下考虑数值解的指数稳定性。对于一类脉冲时刻和脉冲强度比较特殊的线性和非线性脉冲常延迟微分方程，文献［22-24］分别给出了精确解渐近稳定和没有脉冲扰动的延迟微分方程精确解稳定的等价条件，构造了高阶收敛的数值方法，并且研究了其稳定性、渐近稳定性和指数稳

定性。

然而其数值解的振动性仍然是一个空白领域。本书将填补这个空白，不仅研究其数值解的稳定性，还研究其数值解的振动性。

第二节 自变量分段连续型脉冲微分方程数值解的研究现状

1977 年，Myshkis[25]最先注意到存在自变量分段连续的延迟微分方程。1983 年，Wiener[26]开始对该类方程精确解的性质进行研究。目前，关于自变量分段连续的微分方程已经有大量的研究，最初归功于 Cooke，Wiener 和 Shah 等人，他们在文献中研究了该类方程精确解的稳定性、振动性以及周期解的存在性。而且，目前已广泛地展开对没有脉冲扰动的自变量分段连续的延迟微分方程数值解问题研究。也被广泛地研究了。

1994 年，Wiener[27]最先提出了自变量分段连续型脉冲微分方程求解开放的问题。然而一直到最近，自变量分段连续型脉冲微分方程精确解的振动性和稳定性才得到初步的研究。

2010 年，F. Karakoc，H. Bereketoglu 和 G. Seyhan[28]研究了如下线性齐次脉冲分段连续型延迟微分方程的振动解和周期解的存在性：

$$\left.\begin{array}{ll} x'(t)+a(t)x(t)+b(t)x([t-1])=0, & t\neq n \\ x(n^+)-x(n^-)=d_n x(n), & t\in\mathbf{N} \end{array}\right\} \tag{1.2.1}$$

其中，$a(t)$，$b(t)$表示连续函数，d_n 为实数，$[t-1]$表示不大于 $t-1$ 的最大整数。

2010 年，H. Bereketoglu，G. Seyhan 和 A. Ogunundal[29]研究了如下线性非齐次脉冲超前滞后混合型分段连续微分方程，分别给出了周期解、振动性、渐近稳定性的充分条件：

$$\left.\begin{aligned} &x'(t)+a(t)x(t)+b(t)x([t])+c(t)x([t+1])=f(t), && t\neq n \\ &x(t^{+})-x(t^{-})=d_n x(t^{+}), && t=n\in\mathbf{N} \end{aligned}\right\} \tag{1.2.2}$$

其中，$a(t)$，$b(t)$，$c(t)$，$f(t)$表示连续函数，d_n 为实数。

2013 年，Bereketoglu 等人[30]研究了如下线性非齐次分段连续型延迟微分方程的精确解的振动性：

$$\left.\begin{aligned} &x'(t)=a(t)(x(t)-x([t-1]))+f(t), && t\neq n \\ &x(n^{+})-x(n^{-})=d_n x(n), && t\in\mathbf{N} \end{aligned}\right\} \tag{1.2.3}$$

2013 年，F. Karakoc，A. Ogununal 和 H. Bereketoglu[31]研究了如下非线性脉冲分段连续微分方程的精确解存在唯一性，并且给出了该方程的精确解是振动的充分条件：

$$\left.\begin{aligned} &x'(t)+a(t)x(t)+f(x([t-1]))=0, && t\neq n \\ &x(n^{+})-x(n^{-})=d_n x(n), && t\in\mathbf{N} \end{aligned}\right\} \tag{1.2.4}$$

综上，脉冲延迟微分方程应用广泛。不仅脉冲常延迟微分方程的精确解得到了广泛的研究，而且分段连续型微分方程精确解的振动性也得到了初步研究，但是不论是脉冲常延迟微分方程还是脉冲分段连续型微分方程数值解的稳定性和振动性都有待于研究。本书研究了脉冲时滞微分方程和脉冲分段连续型微分方程数值解的稳定性和振动性。

第二章　分段连续型脉冲微分方程的渐近稳定性

本章研究如下自变量分段连续型脉冲微分方程：

$$\left.\begin{aligned}&x'(t)+ax(t)+bx([t])=0,\ t\geqslant 0,\ t\neq k,\ k=1,\ 2,\ \cdots\\&\Delta x(k)=cx(k),\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad k=1,\ 2,\ \cdots\\&x(0)=x_0\end{aligned}\right\}\tag{2.0.1}$$

其中，a，b，c 和 x_0 都是实数，$\Delta x(k)=x(k)-x(k^-)$，$[t]$表示不大于 t 的最大整数。首先，给出了该方程的精确解渐近稳定的充分必要条件。然后，在精确解稳定的条件下，应用帕德逼近理论研究了 Runge-Kutta 方法作用于式(2.0.1)的渐近稳定性。进一步考虑了两种特殊情况的渐近稳定性：当 $b=0$ 时，方程(2.0.1)变为脉冲常微分方程；当 $c=0$ 时，方程(2.0.1)变为没有脉冲扰动的自变量分段连续型微分方程。最后，给出了一些数值实验来验证所得到的结果。

第一节　精确解的渐近稳定

定义 2.1.1　(见文献［28］)　在$[0,\ \infty)$上的函数 $x(t)$被称为式(2.0.1)的解，如果

(1)除了点$[t]\in[0,\ \infty)$，在$[0,\ \infty)$上，$x(t)$都是连续的；

(2)$x(t)$在点$[t]\in[0,\ \infty)$处右连续且左极限存在；

(3)$x(t)$在$[t]\in[0,\ \infty)$处右导数存在，在$[0,\ \infty)$上的其

他点处可微并且满足方程 $x'(t)+ax(t)+bx([t])=0$；

(4)对于任意的 $k\in\mathbf{Z}^+$，$x(k)$ 满足 $\Delta x(k)=cx(k)$，并且有 $x(0)=x_0$。

定义 2.1.2 方程(2.0.1)的零解(平凡解或精确解)是渐近稳定的，如果方程(2.0.1)的解 $x(t)$，对于任意的初始值 x_0 都有

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0 \tag{2.1.1}$$

注 2.1.1 方程(2.0.1)零解是渐近稳定的也可以这样定义：

(1)对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x_0|<\delta$ 时，方程(2.0.1)的解 $x(t)$满足 $|x(t)|<\varepsilon$，则称方程(2.0.1)的零解是稳定的。

(2)方程(2.0.1)的零解是稳定的，并且存在 $\delta_1>0$，当 $|x_0|<\delta_1$ 时，方程(2.0.1)的解 $x(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。

注 2.1.2 本章的结果按照注 2.1.1 的定义仍然成立，当然，此时数值解的渐近稳定性的定义也需相应改变。由于本章研究的方程是线性的，方便起见，只考虑定义 2.1.2。

定理 2.1.1 当 $a\neq0$ 时，方程(2.0.1)在 $t\in[0,\infty)$上存在唯一解

$$x(t)=m_0(\{t\})\cdot n_0^{[t]}\cdot x_0$$

其中，$\{t\}=t-[t]$，$m_0(t)=\mathrm{e}^{-at}+\dfrac{b}{a}(\mathrm{e}^{-at}-1)$，$n_0=\dfrac{1}{1-c}\cdot\left[\mathrm{e}^{-a}+\dfrac{b}{a}(\mathrm{e}^{-a}-1)\right]$。

当 $a=0$ 时，方程(2.0.1)在$[0,\infty)$上存在唯一解

$$x(t)=\frac{(1-b)^{[t]}}{(1-c)^{[t]}}(1-b\{t\})x_0$$

因此，当 $a\neq0$ 时，方程(2.0.1)渐近稳定的充分必要条件是

$$\frac{1}{|1-c|}\cdot\left|\mathrm{e}^{-a}+\frac{b}{a}(\mathrm{e}^{-a}-1)\right|<1 \tag{2.1.2}$$

当 $a=0$ 时，方程(2.0.1)渐近稳定的充分必要条件是

$$\left|\frac{1-b}{1-c}\right|<1 \tag{2.1.3}$$

集合 H_0 与 H 都是 $\mathbf{R}^3$ 的子集，并且分别满足式(2.1.2)和式(2.1.3)，即

$$H_0=\left\{(0,\ b,\ c):\ \left|\frac{1-b}{1-c}\right|<1\right\}$$

$$H=\left\{(a,\ b,\ c):\ \frac{1}{|1-c|}\cdot\left|\mathrm{e}^{-a}+\frac{b}{a}(\mathrm{e}^{-a}-1)\right|<1\right\}$$

当 $a+b\neq0$时，可以将 H 分成以下区域：

$$H_1=\left\{(a,\ b,\ c):\ a<0,\ \mathrm{e}^{-a}<\frac{b}{a+b}\text{且}(a,\ b,\ c)\in H\right\}$$

$$H_2=\left\{(a,\ b,\ c):\ a<0,\ \mathrm{e}^{-a}>\frac{b}{a+b}\text{且}(a,\ b,\ c)\in H\right\}$$

$$H_3=\left\{(a,\ b,\ c):\ a>0,\ \mathrm{e}^{-a}<\frac{b}{a+b}\text{且}(a,\ b,\ c)\in H\right\}$$

$$H_4=\left\{(a,\ b,\ c):\ a>0,\ \mathrm{e}^{-a}>\frac{b}{a+b}\text{且}(a,\ b,\ c)\in H\right\}$$

第二节　Runge-Kutta 方法的渐近稳定

v 级 Runge-Kutta 方法作用于方程(2.0.1)：

$$\left.\begin{aligned}
&x_{k,l+1}=x_{k,l}-h\sum_{i=1}^{v}b_i(aY_{k,l}^{i}+bx_{k,0}),l=0,1,\cdots,m-1,k=0,1,\cdots\\
&Y_{k,l}^{i}=x_{k,l}-h\sum_{j=1}^{v}a_{ij}(aY_{k,l}^{j}+bx_{k,0}),l=0,1,\cdots,m-1,k=0,1,\cdots\\
&x_{k+1,0}=\frac{1}{1-c}\cdot x_{k,m},\qquad k=0,1,\cdots\\
&x_{0,0}=x_0
\end{aligned}\right\} \tag{2.2.1}$$

其中步长 $h=\dfrac{1}{m}$，$m\geqslant1$，m 为整数 b_i 为权重，横坐标 $c_i=\sum\limits_{j=1}^{v}a_{ij}$，

矩阵 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{v}$。

定义 2.2.1 作用于方程(2.0.1)的 Runge-Kutta 方法式(2.2.1)被称为渐近稳定的，若存在正常数 M 使得 $m\geqslant M$，$h=\frac{1}{m}$且 $z=-ah$ 满足

(1)$I-zA$ 可逆；

(2)由方法式(2.2.1)得到的值 $x_{k,l}(0\leqslant l\leqslant m)$满足$\lim\limits_{k\to\infty}X_k=0$，其中

$$X_k=(x_{k,0},\ x_{k,1},\ \cdots,\ x_{k,m})$$

定理 2.2.1 当 $a\neq 0$ 时，方法式(2.2.1)是渐近稳定的当且仅当

$$\frac{1}{|1-c|}\cdot\left|R(z)^m+\frac{b}{a}(R(z)^m-1)\right|<1 \qquad (2.2.2)$$

其中 $R(z)=1+zb^{\mathrm{T}}(I-zA)^{-1}e$，$e=(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 为 v 维向量。另一方面，当 $a=0$ 时，若$\left|\frac{1-b}{1-c}\right|<1$，则相容的 Runge-Kutta 方法式(2.2.1)都是渐近稳定的。

证明 $\Leftarrow$设 $I-zA$ 可逆。对于任意的 $k=0,\ 1,\ \cdots,\ l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m$ 都有

$$\begin{aligned}x_{k,l}&=R(z)x_{k,l-1}+\frac{b}{a}(R(z)-1)x_{k,0}\\&=\left(R(z)^l+\frac{b}{a}(R(z)^l-1)\right)x_{k,0}\end{aligned}$$

故 $x_{k+1,0}=\frac{1}{1-c}\cdot\left(R(z)^m+\frac{b}{a}(R(z)^m-1)\right)\cdot x_{k,0}$，$k=1,\ 2,\ \cdots$。由式(2.2.2)可知$|x_{k+1,0}|\leqslant|x_{k,0}|$且$\lim\limits_{k\to\infty}x_{k,0}=0$。故对于任意的 $k=0,\ 1,\ \cdots,\ l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m$ 都有

$$\begin{aligned}|x_{k,l}|&=\left|\left(R(z)^l+\frac{b}{a}(R(z)^l-1)\right)x_{k,0}\right|\\&=\left|R(z)^l+\frac{b}{a}(R(z)^l-1)\right|\cdot|x_{k,0}|\\&\leqslant C|x_{k,0}|\to 0,\ k\to\infty\end{aligned}$$

其中，$C=\max\limits_{0\leqslant l\leqslant m}\left\{\left|R(z)^{l}+\dfrac{b}{a}(R(z)^{l}-1)\right|\right\}$。

因此，Runge-Kutta 方法式(2.2.1)是渐近稳定的。

$\Rightarrow$若$\left|R(z)^{m}+\dfrac{b}{a}(R(z)^{m}-1)\right|\geqslant 1$，则对于任意的 $k\in\mathbf{Z}^{+}$ 都有

$$
\begin{aligned}
|x_{k,0}| &= \left|R(z)^{m}+\frac{b}{a}(R(z)^{m}-1)\right|\cdot|x_{k-1,0}| \\
&= \left|R(z)^{m}+\frac{b}{a}(R(z)^{m}-1)\right|^{k}\cdot|x_{0,0}| \\
&\geqslant |x_{0,0}| = |x(0)|
\end{aligned}
$$

这与 Runge-Kutta 方法式(2.2.1)是渐近稳定的矛盾。

集合 S 是由 Runge-Kutta 方法式(2.2.1)渐近稳定的点(a，b，c)构成的渐近稳定区域，即

$$S=\left\{(a,\ b,\ c):\ \frac{1}{|1-c|}\left|R(z)^{m}+\frac{b}{a}(R(z)^{m}-1)\right|<1\right\}$$

引理 2.2.1　（见文献［32－35］）　函数 e^{z} 的(j，k)帕德逼近 $R(z)=\dfrac{P_j(z)}{Q_k(z)}$，其中

$$P_j(z)=1+\frac{j}{j+k}\cdot z+\frac{j(j-1)}{(j+k)(j+k-1)}\cdot\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{j!\ k!}{(j+k)!}\cdot\frac{z^j}{j!}$$

$$Q_k(z)=1-\frac{k}{j+k}\cdot z+\frac{k(k-1)}{(j+k)(j+k-1)}\cdot\frac{z^2}{2!}+\cdots+(-1)^{k}\frac{j!\ k!}{(j+k)!}\cdot\frac{z^j}{k!}$$

其误差为

$$e^{z}-R(z)=(-1)^{k}\cdot\frac{j!\ k!}{(j+k)!\ (j+k+1)!}\cdot z^{j+k+1}+o(z^{j+k+2})$$

函数 e^{z} 的 $j+k$ 阶分子为 j、分母为 k 的帕德逼近唯一。

引理 2.2.2　（见文献［36，37］）　设 $R(z)$ 是函数 e^{z} 的(j，k)帕德逼近，若 $z>0$($a<0$，$z=-ah$)，则

(1) $R(z)<e^z$ 当且仅当 k 为偶数。

(2) 当 $0<z<\eta$ 时，$R(z)>e^z$ 当且仅当 k 为奇数。

又若 $z<0(a>0, z=-ah)$，则

(1) $R(z)>e^z$ 当且仅当 j 为偶数。

(2) 当 $\zeta<z<0$ 时，$R(z)<e^z$ 当且仅当 j 为奇数，其中 η 为 $Q_k(z)=0$ 的实根，ζ 为 $P_j(z)=0$ 的实根。

引理 2.2.3 若 Runge-Kutta 方法作用于下面的方程

$$\begin{cases} y'(t)=-ay, & t\geqslant 0 \\ y(0)=y_0 \end{cases}$$

是收敛的（在本书中，要求该假设总是成立的），则有

$$\lim_{m\to\infty, mh=1} R(z)^m=\lim_{m\to\infty, mh=1} R(-ah)^m=e^{-a}$$

此引理可由 Runge-Kutta 方法收敛的定义直接得到，故省略。

定理 2.2.2 若 Runge-Kutta 方法式(2.2.1)的稳定函数 $R(z)$ 是函数 e^z 的 (j, k) 帕德逼近，那么

(1) 当 $h<\min\left\{\frac{\eta}{-a}, h_1\right\}$ 时，$H_1\subseteq S$ 当且仅当 k 是奇数。

(2) 当 $h<h_2$ 时，$H_2\subseteq S$ 当且仅当 k 是偶数。

(3) 当 $h<h_1$ 时，$H_3\subseteq S$ 当且仅当 j 是偶数。

(4) 当 $h<\min\left\{\frac{\zeta}{-a}, h_2\right\}$ 时，$H_4\subseteq S$ 当且仅当 j 是奇数，其中 $z=-ha$，$h=\frac{1}{m}$，m 为整数，且

$$h_1=\sup\left\{x: R(-ah)^m<\frac{b}{a+b}\text{对于任意的 } h\in(0, x)\right\}$$

$$h_2=\sup\left\{x: R(-ah)^m>\frac{b}{a+b}\text{对于任意的 } h\in(0, x)\right\}$$

证明 简单起见，只证明(1)，其他的可以类似证明。由引理 2.2.3，可知 $\lim_{m\to\infty, mh=1} R(z)=e^{-a}$。又由 $e^{-a}\leqslant\frac{b}{a+b}$，有 $R(z)^m\leqslant\frac{b}{a+b}$，对于 $z=-ah$，$h\leqslant h_1$。当 $h<\min\left\{\frac{\eta}{-a}, h_1\right\}$，$h=\frac{1}{m}$，$m$ 为