数学分析教本

（中册）

太原理工大学数学学院　编

科学出版社

数学分析教本

（中册）

太原理工大学数学学院　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书作为数学分析课程的教材，共分上、中、下三册出版. 中册主要介绍一元函数积分学、多元函数微分学及重积分等基本内容.

本书注重概念引入的自然性与理论推证的严密性. 既注意内容的连贯和完整，也顾及教学安排上的机动和便利. 表述上力求准确、简明，深入浅出. 习题配备难易适当且题型多样.

本书适合理工科大学本科数学类各专业及其他相关专业的教学使用，也可供相关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析教本. 中册/太原理工大学数学学院编. —北京：科学出版社，2016.1

ISBN 978-7-03-046639-6

Ⅰ.①数… Ⅱ.①太… Ⅲ.①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 300823 号

责任编辑：王 静 / 责任校对：张凤琴

责任印制：霍 兵 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 1 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2016 年 1 月第一次印刷 印张：15 1/4

字数：307 000

定价：34.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

数学分析是数学类各专业最重要的一门数学基础课程. 其主要内容是实数域上数列及函数的极限理论、无穷级数与一元及多元函数的微积分学. 我们本着便于教、利于学的教学原则,根据多年的教学实践与体会,顺应当今数学教材的改革主流与趋势编写了此书.

在内容安排上,鉴于目前国内绝大部分学校数学分析课程都安排三个学期讲授,因此,本书分上、中、下三册编写,分别对应三个学期使用. 同时,考虑到学生所学其他课程对本课程知识的需要,我们先介绍数列的极限理论与一元及多元函数的微积分学主体内容(上、中册),而将曲线与曲面积分、无穷级数、广义积分与含参变量积分等内容安排在下册. 在习题配备方面,从学生学习的实际情况出发,按照本课程的基本要求,从数量与质量两个角度把握,合理地配备了本书的习题. 并且力求题型多样,培养学生从不同角度思考问题,同时特别注重对学生举反例的训练.

本书主要特色在于章节的合理安排与内容的自然表述. 在定积分部分,较为详细地论述了定积分的可积性. 对于二重、三重积分,乃至一般的多重积分,均着重讲述其积分方法,但相应的内容与叙述的方式都完全与定积分类同. 我们不厌其烦地重复,而不作统一处理,目的是希望学生能牢固地掌握积分的思想与具体的运算步骤. 在多元函数微分学部分,引入了导数概念,使其内容能够与一元函数的相应部分完全对应起来. 关于隐函数定理的介绍,采用了先给出隐函数的求导方法,再给出定理证明的两步走办法. 根据我们的教学实践,以上的种种做法都有利于学生克服多元函数微积分学烦琐与复杂的困难,使之感觉到这部分内容仅是一元函数微积分学的一个自然过渡与推广而已,实现了教材"便于教、利于学"的初衷.

本书能够顺利完成,得益于太原理工大学数学学院领导的远见卓识,以及对教学的积极鼓励、支持.

本书在编写过程中参考了国内外许多教材及教学参考书,诚挚感谢前辈的教学理念、思想、观点、手法及提供的大量素材.

本书由太原理工大学数学学院数学分析教学团队成员刘进生、张玲玲、卢准炜、秦效英、滕凯民、郭祖记、温志涛等教师集体讨论,并由刘进生、张玲玲、卢准炜三位教授执笔完成.

鉴于编者水平有限,书中不当之处恳请读者批评指正.

编　者

2015 年 10 月

目　　录

第 9 章　不定积分

正如加法有其逆运算减法、乘法有其逆运算除法一样，求导数或者求微分也有其逆运算，即求原函数或者求不定积分. 本章主要内容为不定积分的概念与性质、求不定积分的两大基本方法，即换元积分法与分部积分法. 同时也给出一些特殊函数不定积分的计算方法. 它们是整个积分学计算的基础.

9.1　不定积分的概念

9.1.1　原函数

定义 9.1.1　设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义. 若存在可导函数 $F(x)$，使得

$$F'(x)=f(x),\quad \forall x\in I,$$

则称 $F(x)$为 $f(x)$在区间 I 上的一个原函数.

例如，因为$\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$，所以$\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 在$(-\infty,+\infty)$内的一个原函数；因为$(\sin x)'=\cos x$，所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内的一个原函数. 需要提醒读者注意的是原函数除满足可导条件外，它的定义域必须是一个区间.

如果 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，那么对于任何常数 C，因为

$$(F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x),$$

所以 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$的原函数. 此外，如果两个函数 $F(x)$和 $G(x)$均为函数 $f(x)$的原函数，那么 $F(x)-G(x)$必是某个常数，这是因为

$$(F(x)-G(x))'=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

由此得到如下定理.

定理 9.1.1　若 $F(x)$是 $f(x)$在区间 I 上的一个原函数，则

(1) $F(x)+C$ 也是 $f(x)$在区间 I 上的原函数，其中 C 为任意常数；

(2) $f(x)$在区间 I 上的任意两个原函数之间，只能相差某个常数.

定理 9.1.1 表明，如果用某种方法找到了函数 $f(x)$的一个原函数 $F(x)$，那么当 C 取遍所有的常数时，$F(x)+C$ 就表示了 $f(x)$的一切原函数.

下面给出 $f(x)$原函数的几何意义. 设 $f(x)$为闭区间$[a,b]$上的连续函数，且 $f(x)\geqslant 0$. 显然，当 $x\in[a,b]$时，区间$[a,x]$上由函数 $f(t)$确定的曲边梯形 AMND(图 9-1)的面积是 x 的函数，记为 $P(x)$. 同时记 $f(t)$在$[x,x+\Delta x]$上的最

小值、最大值分别为 m 及 M，那么 $m\Delta x \leqslant \Delta P(x) \leqslant M\Delta x$，于是 $m \leqslant \dfrac{\Delta P(x)}{\Delta x} \leqslant M$，注意到当 $\Delta x \to 0$ 时，m 及 M 均趋于 $f(x)$，所以得到 $P'(x)=f(x)$. 即在一定的条件下，由区间 $[a,x]$ 及其上的函数 $f(t)$ 所构成的变动面积 $P(x)$ 就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

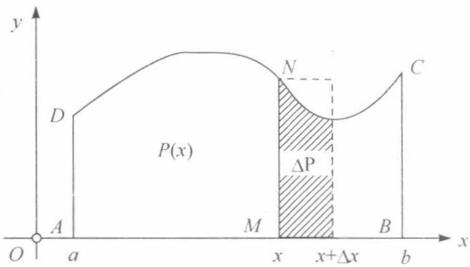

图 9-1

同时，这一结论也提示我们，连续函数应该存在原函数. 我们先将结论写在下面，其证明将在第 10 章给出.

定理 9.1.2　如果 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $f(x)$ 在 I 上存在原函数.

另一方面，根据例 7.2.5，任何一个函数的导函数无第一类间断点，所以当 $f(x)$ 在区间 I 存在第一类间断点时，$f(x)$ 在 I 上没有原函数.

定义 9.1.2　如果 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，那么 $f(x)$ 的原函数族 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$ 的不定积分，记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C,$$

其中符号 $\int$ 称为积分号，读作“积分”，并称 x 为积分变量，$f(x)$ 为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，任意常数 C 为积分常数.

根据定义 9.1.2，上述例子就可表为

$$\int x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3+C;$$

$$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C.$$

定义 9.1.2 也告诉我们

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C \Leftrightarrow F'(x)=f(x), \tag{9.1.1}$$

即 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$ 只不过是 $F'(x)=f(x)$ 的另一种表现形式. 然而，数学就是这样，形式的变化往往孕育着新内容、新分支及新领域的产生，甚至可能给数学

本身带来无穷的变化. 这是数学的特点，请读者感悟.

9.1.2 不定积分的几何意义

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则称 $y=F(x)$ 的图像为 $f(x)$ 的一条积分曲线. 将 $y=F(x)$ 的图像沿着 y 轴方向任意平移，就得到一切 $y=F(x)+C$ 的图像，其中 C 是任意常数. 因对每一个固定的常数 C，$F(x)+C$ 均为 $f(x)$ 的原函数，故 $y=F(x)+C$ 的图像都是 $f(x)$ 的积分曲线. 注意到不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 表示 $f(x)$ 的所有原函数，从而 $f(x)$ 的不定积分在几何上表示 $f(x)$ 的所有积分曲线组成的曲线族(即所谓 $f(x)$ 积分曲线族). 易见，积分曲线共同的特点是在横坐标相同点处的切线相互平行(图 9-2).

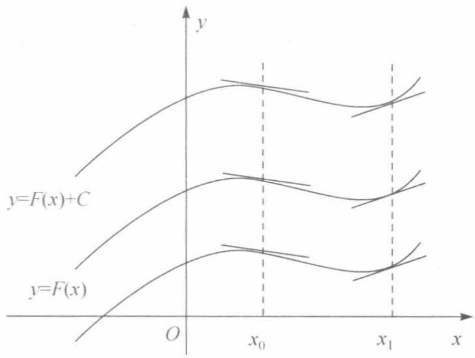

图 9-2

例 9.1.1 已知曲线 $y=f(x)$ 过点(2,3)，且其上任一点处的切线斜率等于该点横坐标的两倍，求此曲线的方程.

解 由导数的几何意义与已知条件得到

$$f'(x)=2x,$$

即 $f(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数. 因为

$$\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C,$$

故必有某个常数 C，使得

$$f(x)=x^2+C,$$

又该曲线过点(2,3)，故 $3=4+C$，即 $C=-1$，于是所求曲线方程为 $y=x^2-1$. □

9.1.3 基本积分表

利用式(9.1.1)，每一个微分公式都对应着一个积分公式. 为读者应用方便，将一些常用的基本积分公式列在下面：

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ (k 为给定的常数),特别地,$\int 0\mathrm{d}x = C$,$\int 1\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C$;

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C(\mu \neq -1)$;

(3) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$;

(4) $\int a^{x}\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C(a > 0$,且 $a \neq 1)$;

(5) $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$;

(6) $\int \dfrac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C$;

(7) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;

(8) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$;

(9) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$;

(10) $\int \sec^{2} x\mathrm{d}x = \tan x + C$;

(11) $\int \csc^{2} x\mathrm{d}x = -\cot x + C$;

(12) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$;

(13) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$;

(14) $\int \mathrm{sh} x\mathrm{d}x = \mathrm{ch} x + C$;

(15) $\int \mathrm{ch} x\mathrm{d}x = \mathrm{sh} x + C$;

(16) $\int \dfrac{1}{\mathrm{sh}^{2} x}\mathrm{d}x = -\mathrm{cth} x + C$;

(17) $\int \dfrac{1}{\mathrm{ch}^{2} x}\mathrm{d}x = \mathrm{th} x + C$.

上面公式的正确性都能够通过求导运算来验证,在这里只对公式(3)进行验证,其他留作读者练习.

当 $x>0$ 时,$|x|=x$,所以

$$(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x};$$

而当 $x<0$ 时，$|x|=-x$，所以

$$(\ln|x|)'=(\ln(-x))'=\frac{(-x)'}{-x}=\frac{1}{x}.$$

即当 $x\neq 0$ 时，$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$，因此 $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$. 应该注意的是，公式(3)严格来说只是一种形式，因为 $\frac{1}{x}$ 的定义域不是一个区间，它不符合原函数的定义.

公式(1)到(17)是积分运算的基础，必须牢记，其他一些复杂的积分运算最后都会转换成这类形式积分.

注 9.1.1 公式(2)有几个特殊情形，它们经常使用，如

$$\int\mathrm{d}x=x+C,\quad \int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+C,\quad \int\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}+C$$

等，读者应熟记.

例 9.1.2 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{1}{x^4}\mathrm{d}x$；(2) $\int x^5\sqrt{x}\mathrm{d}x$；(3) $\int 2^x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int\frac{1}{x^4}\mathrm{d}x=\int x^{-4}\mathrm{d}x=\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+C=-\frac{1}{3x^3}+C.$

(2) $\int x^5\sqrt{x}\mathrm{d}x=\int x^{\frac{11}{2}}\mathrm{d}x=\frac{x^{\frac{11}{2}+1}}{\frac{11}{2}+1}+C=\frac{2}{13}x^{\frac{13}{2}}+C=\frac{2}{13}x^6\sqrt{x}+C.$

(3) $\int 2^x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\int(2\mathrm{e}^{-2})^x\mathrm{d}x=\frac{(2\mathrm{e}^{-2})^x}{\ln(2\mathrm{e}^{-2})}+C=\frac{2^x\mathrm{e}^{-2x}}{\ln 2-2}+C.$ □

9.2 不定积分的性质

性质 9.2.1 下列结论成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x);\tag{9.2.1}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.\tag{9.2.2}$$

证明 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$. 从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F(x)+C]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)=f(x),$$

所以式(9.2.1)正确. 而由不定积分的定义知式(9.2.2)成立. □

式(9.2.1)说明 $d\int f(x)dx = f(x)dx$. 即先积分,后微分,结论为被积分表达式,也即积分号 $\int$ 与微分号 d 抵消掉了. 又在 $\int F'(x)dx$ 中,如果将 dx 理解为自变量的微分,被积表达式 $F'(x)dx$ 则为 $F(x)$ 的微分 $dF(x)$,那么 $\int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C$, 这与式(9.2.2)一致. 因此,在不定积分的记号 $\int f(x)dx$ 中,可以将 d 视为微分记号. 这样式(9.2.2)就可以写成 $\int dF(x) = F(x) + C$. 这说明先微分,后积分,在相差常数的意义下,微分号 d 与积分号 $\int$ 抵消掉了. 因而,我们说不定积分与微分两者是互为逆运算的. 下文中读者将会看到在记号 $\int f(x)dx$ 中将 d 视为微分记号会给积分的计算带来很大的方便. 这也是不定积分 $\int f(x)dx$ 记号复杂的缘故.

例 9.2.1　已知 $\int f(x)dx = 2^x + x + C$, 求 $f(x)$.

解　$f(x) = \frac{d}{dx}\int f(x)dx = \frac{d}{dx}(2^x + x + C) = 2^x\ln 2 + 1.$　□

性质 9.2.2　如果 k 为非零常数,则 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

证明　如果 $F'(x)=f(x)$,则 $\int f(x)dx = F(x) + C$, 于是

$$k\int f(x)dx = k[F(x) + C] = kF(x) + C_1.$$

由于 k 为非零常数,所以 $C_1 = kC$ 也是任意常数,且 $[kF(x)]' = kF'(x) = kf(x)$,即 $kF(x)$ 是 $kf(x)$ 的一个原函数. 因此

$$\int kf(x)dx = kF(x) + C_1,$$

从而结论成立.　□

性质 9.2.3　$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

证明　如果 $F_1'(x)=f_1(x)$, $F_2'(x)=f_2(x)$,则有

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx = F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2 = F_1(x) + F_2(x) + C, \tag{9.2.3}$$

其中 $C=C_1+C_2$ 也是任意常数. 而

$$[F_1(x)+F_2(x)]' = F_1'(x)+F_2'(x) = f_1(x)+f_2(x),$$

即 $F_1(x)+F_2(x)$是 $f_1(x)+f_2(x)$的一个原函数. 因此,

$$\int[f_1(x)+f_2(x)]\mathrm{d}x=F_1(x)+F_2(x)+C. \tag{9.2.4}$$

于是,由式(9.2.3)及(9.2.4)知结论成立. □

性质 9.2.2 和性质 9.2.3 统称为不定积分的线性性,合并为

$$\int[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)]\mathrm{d}x=k_1\int f_1(x)\mathrm{d}x+k_2\int f_2(x)\mathrm{d}x, \tag{9.2.5}$$

其中 k_1,k_2 是不全为零的常数. 容易证明式(9.2.5)对有限个函数的情形也是成立的,即

$$\int\Big(\sum_{i=1}^{n}k_if_i(x)\Big)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}k_i\int f_i(x)\mathrm{d}x, \tag{9.2.6}$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是不全为零的常数.

例 9.2.2 求不定积分 $\int\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}\mathrm{d}x&=\int\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x}\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x+2\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=x+2\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+\ln|x|+C\\&=x+4\sqrt{x}+\ln|x|+C.\end{aligned}$$
□

在求不定积分的过程中,经常需要适当应用代数及三角的知识对被积函数进行恒等变形,从而用不定积分的线性性质将所求的不定积分化为基本积分表中已有的形式.

例 9.2.3 求不定积分 $\int\frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

解 将分子 $2x^2+1$ 写成$(x^2+1)+x^2$,把一个分式拆成两个分式的和,得到

$$\begin{aligned}\int\frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x&=\int\frac{(x^2+1)+x^2}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+\arctan x+C.\end{aligned}$$
□

例 9.2.4 求不定积分 $\int\frac{x^4}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解 将分子减 1 再加 1,变形后积分得到

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4}{x^2+1}\mathrm{d}x&=\int\frac{x^4-1+1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x\\&=\int(x^2-1)\mathrm{d}x+\arctan x=\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C.\end{aligned}$$
□

例 9.2.5　求不定积分 $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$.

解　$\int \tan^2 x\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = \tan x - x + C.$ □

例 9.2.6　求不定积分 $\int \sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int \sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{1-\cos x}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \sin x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos x\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}(-\cos x + x + \sin x) + C.\end{aligned}$$ □

例 9.2.7　求不定积分 $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \tan x - \cot x + C.\end{aligned}$$ □

9.3　不定积分的换元积分法

9.2 节主要利用基本积分表和不定积分的线性性质直接计算一些函数的不定积分. 但是能够直接积分的不定积分是非常有限的. 本节介绍一种求不定积分的基本方法——换元积分法. 换元积分法的基本做法是对被积表达式进行变量代换(即换元),使换元后的积分容易算出. 其理论依据是复合函数的求导法则. 根据换元方式的不同,通常将换元积分法分为第一类换元法和第二类换元法.

9.3.1　第一类换元法

定理 9.3.1　设 $f(u)$具有原函数 $F(u)$,$u=\varphi(x)$可导,则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C. \tag{9.3.1}$$

证明　因为 $f(u)$具有原函数 $F(u)$,所以 $F'(u)=f(u)$,而 $u=\varphi(x)$可导,所以由复合函数的求导法则可得

$$[F(\varphi(x))]' = F'[\varphi(x)]\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

从而式(9.3.1)成立. □

式(9.3.1)说明如果已知 $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$,那么在计算不定积分

$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$ 时，可以作变量代换 $u=\varphi(x)$，于是

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = \int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C,$$

然后再将 $u=\varphi(x)$ 代回，就得到所要求的不定积分 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C$.

例 9.3.1 求不定积分 $\int (3+2x)^6 \mathrm{d}x$.

解 由于 $\int u^6 \mathrm{d}u = \frac{1}{7}u^7 + C$，而若令 $u=\varphi(x)=3+2x$，那么 $\varphi'(x)=2$，于是由式(9.3.1)得到

$$\begin{aligned}\int (3+2x)^6 \mathrm{d}x &= \int [\varphi(x)]^6 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int [\varphi(x)]^6 \varphi'(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int u^6 \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}u^7 + \frac{1}{2}C_1 = \frac{1}{14}(3+2x)^7 + C.\end{aligned}$$ □

当对式(9.3.1)熟练掌握后，就可以简化上述书写过程，即不必引入新变量 u. 例如，例 9.3.1 可以写成

$$\begin{aligned}\int (3+2x)^6 \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (3+2x)^6 \mathrm{d}(3+2x) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}(3+2x)^7 + C = \frac{1}{14}(3+2x)^7 + C.\end{aligned}$$

所以通常第一类换元法式(9.3.1)也称为凑微分法，意思即为将所求的不定积分 $\int g(x)\mathrm{d}x$ 凑成 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 的形式(关键步骤)，并且 $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$ 已知，从而问题得到解决.

例 9.3.2 求不定积分 $\int \frac{\ln x + 1}{x}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\ln x + 1}{x}\mathrm{d}x = \int (\ln x + 1)\mathrm{d}(\ln x + 1) = \frac{1}{2}(\ln x + 1)^2 + C.$ □

例 9.3.3 求不定积分 $\int \sin x\cos x\mathrm{d}x$.

解 方法一 $\int \sin x\cos x\mathrm{d}x = \int \sin x\mathrm{d}\sin x = \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$

方法二 $\int \sin x\cos x\mathrm{d}x = -\int \cos x\mathrm{d}\cos x = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C.$

方法三 $\int \sin x\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \sin 2x\mathrm{d}(2x) = -\frac{1}{4}\cos 2x + C.$

□

利用三角公式，容易验证$\frac{1}{2}\sin^2 x$，$-\frac{1}{2}\cos^2 x$及$-\frac{1}{4}\cos 2x$这三个函数之间确实只相差常数.

例 9.3.4　求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}(a \neq 0)$；　(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$；　(3) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}(a \neq 0)$.

解　(1) $$\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\int \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx=\frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$$

(2) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}d\left(\frac{x}{a}\right)=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

(3) 由于$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$，所以
$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\int \frac{1}{2a}\cdot\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=\frac{1}{2a}\int \frac{1}{x-a}dx-\frac{1}{2a}\int \frac{1}{x+a}dx$$
$$=\frac{1}{2a}\int \frac{1}{x-a}d(x-a)-\frac{1}{2a}\int \frac{1}{x+a}d(x+a)=\frac{1}{2a}\ln|x-a|-\frac{1}{2a}\ln|x+a|+C$$
$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$
□

例 9.3.5　求下列不定积分：

(1) $\int \tan x dx$；(2) $\int \cot x dx$；(3) $\int \csc x dx$；(4) $\int \sec x dx$.

解　(1) $$\int \tan x dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int \frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C.$$

(2) $$\int \cot x dx=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\int \frac{d\sin x}{\sin x}=\ln|\sin x|+C.$$

(3) $$\int \csc x dx=\int \frac{dx}{\sin x}=\int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int \frac{dx}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}d\tan\frac{x}{2}$$
$$=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

因为

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\csc x-\cot x,$$

所以上述不定积分又可表为

$$\int\csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C.$$

(4) $\int\sec x\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+C$

$=\ln|\sec x+\tan x|+C.$ □

例 9.3.6 求下列不定积分：

(1) $\int\sin^2x\mathrm{d}x$； (2) $\int\cos3x\cos2x\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int\sin^2x\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int\cos2x\mathrm{d}(2x)$

$=\frac{x}{2}-\frac{\sin2x}{4}+C.$

(2) 利用三角函数的积化和差公式

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)],$$

得

$$\cos3x\cos2x=\frac{1}{2}(\cos x+\cos5x),$$

于是

$$\int\cos3x\cos2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\cos x+\cos5x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int\cos x\mathrm{d}x+\frac{1}{5}\int\cos5x\mathrm{d}(5x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{10}\sin5x+C.$$ □

例 9.3.7 求不定积分 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$.

解 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\int\frac{\mathrm{d}(a^2-x^2)}{2\sqrt{a^2-x^2}}=-\sqrt{a^2-x^2}+C.$ □