LECTURES ON DYNAMICS OF STRUCTURES

结构动力学讲义

曾庆元　周智辉　文　颖　编著

人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co.,Ltd.

Lectures on Dynamics of Structures

结构动力学讲义

曾庆元　周智辉　文　颖　编著

人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co.,Ltd.

内 容 提 要

本讲义共分7章，系统地论述了结构动力学的基本原理，除了传统的结构动力学理论，还包括本书第一作者在结构动力学领域的两项原创性成果，即弹性系统动力学总势能不变值原理与形成系统矩阵的“对号入座”法则。

本讲义可作为大学工程学科（包括土木工程、机械工程、载运工具等）高年级学生以及研究生的教材或教学参考书，也可供有关教师、研究人员及工程技术人员参考。

Summary of Contents

This book systematically introduces the fundamental concepts and principles of the subject of "Structural Dynamics". It covers topics not only of the classical theory of vibration of structures but of two original contributions presented by the senior author of this book, namely the principle of total potential energy with stationary value in elastic system dynamics and the "set in right position rule" for formulating system matrices.

The book can be used as a textbook or supplementary material for engineering undergraduates with a background in Civil, Mechanical and Vehicle Operation Engineering as well as graduate students, it will also be a handy reference for college teachers, researchers and practical engineers.

图书在版编目（CIP）数据

结构动力学讲义/曾庆元，周智辉，文颖编著. —北京：人民交通出版社股份有限公司，2015.8

ISBN 978-7-114-12331-3

Ⅰ.①结… Ⅱ.①曾… ②周… ③文… Ⅲ.①结构动力学—高等学校—教材 Ⅳ.①O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 135351 号

书　　名：结构动力学讲义
著 作 者：曾庆元　周智辉　文　颖
责任编辑：周　宇　李　喆
出版发行：人民交通出版社股份有限公司
地　　址：（100011）北京市朝阳区安定门外外馆斜街3号
网　　址：http://www.ccpress.com.cn
销售电话：（010）59757973
总 经 销：人民交通出版社股份有限公司发行部
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京盛通印刷股份有限公司
开　　本：787×1092　1/16
印　　张：12.25
字　　数：255千
版　　次：2015年10月　第1版
印　　次：2015年10月　第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-114-12331-3
定　　价：35.00元

前　言

1980 年以来，我为长沙铁道学院（现为中南大学）桥梁、轨道、岩土工程、应用力学等专业讲授硕士生课程“结构动力学”。当时，我感到按一般顺序即由单自由度讲到多自由度，许多概念不便交代，如线性体系的微振动、主振动、振动按固有振型展开等。另外，觉得“结构动力学”的根本内容是能量原理的应用；而阐述能量原理如何应用于结构振动分析，必须针对多自由度体系。因此，讲授中先论述多自由度体系的振动分析，得出振型叠加法；然后，问题归结为单自由度体系的振动分析。这样，与一般著作的顺序不一致，学生复习不便，便提议印发讲稿。该讲稿在长沙铁道学院一直沿用 30 余年，油印稿尽管能够一定程度地满足本校研究生的教学需要，但为了让更多学生或科研工作者读到该书稿，决定在原稿的基础上做一定的修改补充将其出版。

本讲义共分为 7 章。第 1 章介绍结构振动的基本概念。第 2 章介绍运动方程的建立，除拉格朗日方程与哈密尔顿原理等经典理论外，还叙述了本人提出的弹性系统动力学总势能不变值原理。第 3 章为线性微振动的正则化方程，从一般多自由度系统出发，推导出解耦的正则化方程，从而将多自由度系统线性微振动方程转化为单自由度方程的求解。第 4 章为单自由度体系的振动，一方面继续阐述第 3 章留下的单自由度方程的求解问题，另一方面引出了动力学的一些物理概念。第 5 章为结构振动问题的矩阵分析，本章特色在于运用本人提出的形成系统矩阵“对号入座”法则，建立矩阵形式的系统运动方程。第 6 章为频率和振型的近似计算，介绍了瑞利能量法、瑞利—里兹法、矩阵迭代法以及子空间迭代法求解结构自振特性的原理与过程。第 7 章介绍了逐步积分法，阐述了逐步积分法的基本思路，介绍了几种代表性的逐步积分方法，并对解的稳定性与精度分析作了详细阐述。

在本讲义整理出版的过程中，我重新梳理了原稿的思路，提出了补充和完善意见。周智辉和文颖两位副教授根据补充和完善意见，查阅相关文献，完成了对原书稿的整理工作。硕士研究生林立科、杨露、钱志东、刘国、姜博、刘征宇、李特完成了本书稿文字打印和图表绘制工作。

本讲义出版过程中，得到了人民交通出版社和周宇编辑的大力支持，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中的错漏之处在所难免，敬请广大读者提出宝贵意见。

曾庆元

2015 年 5 月

目　录

第1章　结构振动引论

1.1　结构振动问题的重要性

移动车辆、强风、地震、机械制造偏差引起的不平衡力等外部作用都迫使结构发生振动。在不利情况下，振动使结构不能正常使用，噪声强烈，甚至破坏。

1847年英国Chester铁路桥在列车通过时由于剧烈振动而导致桥梁垮塌，首次引出了车桥系统振动分析问题。1940年11月美国塔科马(Tacoma)吊桥在18m/s的大风中动力失稳而破坏，震惊当时的桥梁工程界。1957年武汉长江大桥通车典礼，公路桥面上人山人海、桥梁摇晃，晃动持续到晚上人群散去为止。1966年四川渡口两座钢拱桥由于大量群众聚集而出现晃动，使该桥限制运营。2001年，上海铁路局发现南京长江大桥128m下承简支钢桁梁在提速货物列车通过时，晃动较大，横向振幅超过9mm，担心该梁横向刚度不能满足列车安全运行要求，对桥上列车走行安全性与舒适性进行了评估。

最近几十年，全球处于地震高发期，如1960年智利地震、1976年中国唐山地震、1985年墨西哥地震、1995年日本阪神地震、2001年印度地震以及2008年中国汶川地震，给所在国家经济建设和人们生命财产安全造成了严重破坏。为了减少或避免地震对工程结构物的破坏，必须对一些重点建设项目和地震高设防地区的结构物进行抗震设计。飞机机翼的颤振、发动机的异常振动，曾多次造成飞机事故。在机械工程中，振动影响精密仪器及一些设备的功能，降低机械加工的精度和光洁度，加剧机械部件的疲劳和磨损。振动也有有利的一面，各种发生器，钟表及一些生产设备的振动传输、振动筛选、振动研磨、振动打桩等都是利用机械振动的有利特点。

研究结构振动的目的在于：了解结构振动的机理和规律，从中引出防止或降低振动危害的方法。例如在机械中设法消除或隔离有害振动，在桥梁中防止动力失稳和危害正常使用的振动。

1.2　结构动力学的主要内容

1. 振动位形描述

由于惯性力是导致结构振动的根本原因，因此对惯性力的描述至关重要。惯性力与结构质量有关，其大小为质量与加速度之积，其方向与加速度方向相反。实际结构的质量是连续分布的，因而实际结构中惯性力的大小与方向也是连续分布的，若要准确考虑和确定结构的全部惯性力，就必须确定结构的振动位形。为此需掌握任意时刻振动位形的描述方法。振动位形一般由

结构质点的位置坐标决定。例如:精确地描述简支梁在竖平面的振动需要获取沿梁长度方向连续分布质点的位置坐标 $v_n(n=1,2,\cdots)$,如图 1-2-1a)所示。这在实际振动分析中非常困难,也无十分必要。作为满足工程精度要求的结构振动近似分析,可将梁划分为有限区段(单元),区段的振动变位由其节点变位来描述。进一步说,梁的动位移可由节点位移来表示。或者将具有分布质量的梁简化为集中质量系,梁的振动位形由各集中质量(节点)的振动坐标确定,如图 1-2-1b)所示。上述节点变位常称为广义坐标(Generalized Coordinates)。"广义"一词用于强调该坐标反映节点变位(可以包括节点所在位置和转角信息),而不是泛指梁内部各质点的实际位置(物理坐标),由它们能决定结构任意时刻的振动位形。广义坐标选取过程的实质是结构动力学计算模型的抽象,关系到计算工作的简繁和计算结果的精粗,是结构振动分析非常重要的第一步。

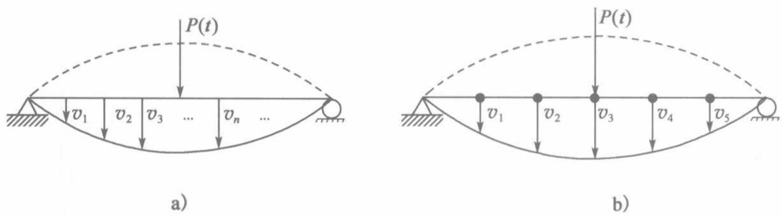

图 1-2-1 梁的振动位形描述

a)分布质量;b)集中质量

2. 激振源分析

引起结构振动的各种因素统称为激振源,实际结构振动的激励源很复杂且受随机因素支配。例如列车对桥梁的动力作用就是很复杂的激扰,它包括轮对蛇行引起的轮轨接触力、车辆惯性偏载、轨道表面空间不平顺产生的附加力等。这些激扰一般难以用确定性的数学式定量描述,但满足统计规律性。地震对结构的动力输入用地震时记录的地震动加速度波表示,但不同地区相同级别的地震加速度波不能用统一的数学式表示,具有随机性。同样,风力对建筑物的作用也是随机的。上述动力作用统称为随机荷载。

实际工程中也存在特殊的振动激励,尽管任意时刻的振动幅值随机变化,但这些变化均是围绕某一确定性均值发生微小波动,这类激励用随时间按确定性规律变化的函数来表述已具有足够的精度。例如匀速转动的转子偏心引起的谐振激扰。

根据激扰作用能否用确定性数学方法描述,结构振动激励分为两大类:

(1)随机性动力荷载——荷载随时间的变化规律不能精确表述,每次试验均得出差异较大的荷载量值,但可由概率论描述量值的统计规律特征。

(2)确定性动力荷载——荷载随时间的变化完全清楚,通过不同次试验能得出基本相同(考虑试验记录误差)的荷载值。其典型形式如图 1-2-2 所示。

确定性动力荷载包括周期性荷载与非周期性荷载。其中,周期性荷载可分为简谐荷载[图 1-2-2a)]与复杂周期荷载[图 1-2-2b)];非周期性荷载可分为持续时间极短的冲击荷载

[如冲击波或爆炸波,图 1-2-2c)]和具有一定持续时间荷载[如实测地震激励,图 1-2-2d),确定性分析时将它视为确定性荷载]。

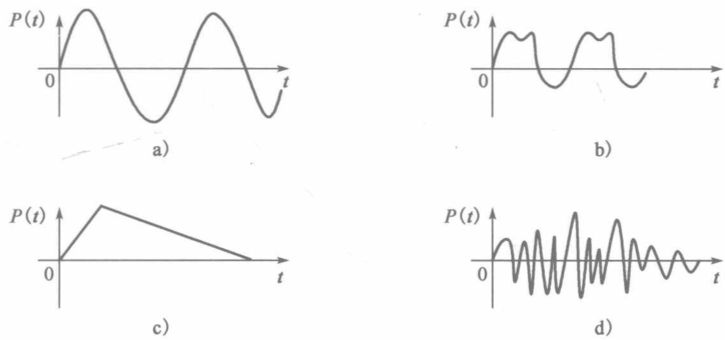

图 1-2-2　典型确定性振动激扰时程

a)简谐荷载;b)复杂周期荷载;c)冲击荷载;d)任意非周期性荷载

3. 振动耗能机理与阻尼力

结构振动过程中出现的机械能耗散机制(阻尼)很复杂,至今未完全分析清楚。与能量耗散相对应的结构振动阻尼力可由下列因素引起:固体材料变形时的内摩擦,结构连接部位的摩擦(例如钢结构螺栓连接处的摩擦),混凝土裂纹的张开与闭合,结构构件与非结构构件之间的摩擦(如梁与支座的摩擦),结构周围外部介质引起的阻尼(如空气、流体的影响等)。确切了解阻尼对结构振动的影响,需要先建立各类型阻尼力的数学表达式,这部分内容将在 4.7 节阻尼理论中详细介绍。

4. 振动微分方程的建立

这是解决结构振动问题的关键,也是前述各项工作的落脚点。有很多结构的振动问题无法解决,关键在于不知如何建立具有明确边界条件的振动微分方程,例如研究车轨桥振动问题,必需建立列车—轨道—桥梁系统空间振动方程,而不是分别建立列车、轨道和桥梁运动方程后再进行迭代求解。因为车轮—钢轨相互作用力、位移衔接条件尚属未知,分别建立方程并迭代求解难以得出满足轮轨约束条件的车轨桥系统振动适定解。

建立振动微分方程的主要途径包括:直接动力平衡法和能量方法。采用前述广义坐标的概念,建立描述结构振动位形的多自由度模型。此时,结构振动规律可用下面微分方程组描述(代表动力平衡方程)

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q} \tag{1-2-1}$$

式中:$\boldsymbol{q}$——广义坐标(位移)列阵;

$\dot{\boldsymbol{q}}$——广义速度列阵;

$\ddot{\boldsymbol{q}}$——广义加速度列阵;

$\boldsymbol{M}$——质量矩阵;

C——阻尼矩阵；

K——刚度矩阵；

Q——与广义坐标互为能量共轭的广义力列阵。

5. 振动微分方程的求解

线性振动微分方程求解方法比较成熟,可分成以下两大类：

(1)常系数线性振动方程的解法：主要包括经典方法——数值积分法(如 Euler 方法,Runge-Kutta 方法)、变分方法、振型叠加法、逐步积分法、加权残数法。

(2)变系数线性振动微分方程的解法：主要包括变分法、逐步积分法、加权残数法。

非线性振动方程求解至今无普遍的分析解法,一般用小参数法、变分法以及加权残数法求解。随着电子计算机的快速发展,较多采用逐步积分法。

6. 振动测试

振动测试主要目的是检验理论分析结果的正确性、修正理论分析模型和测定理论分析中需要的参数和资料,例如结构各阶固有振动频率、振型,阻尼系数,作为动力输入的地震加速度资料等都是振动测试内容,它们是结构振动分析的基础。

1.3 振动分类

(1)按激扰因素是否定性为随机作用,振动分为确定性振动与随机振动。

(2)按激扰因素的类型,振动分为自由振动、强迫振动、自激振动和参数激振。

①自由振动——外部扰动导致系统偏离初始平衡位置或系统具备初始速度,扰动迅速撤除后系统发生的振动,称为自由振动。

②强迫振动——系统在持续外界激扰下发生的振动,分为与振动初始条件相关的瞬态振动和具有与激扰相同频率的稳态振动。由于阻尼作用,瞬态振动快速衰减,故强迫振动又称为稳态振动。

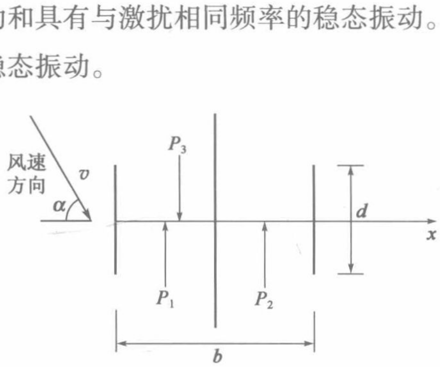

图 1-3-1 桥梁截面气动力特性示意图

③自激振动——激扰受系统振动控制,由振动系统的反馈作用,不断输入能量,而激起系统的常幅振动或幅度继续增长的振动。例如时钟定幅振动,吊桥在风力作用下的自激振动,飞机机翼和尾翼的颤振等等。如图 1-3-1 所示,一吊桥梁断面,当恒定风速 v 与水平轴 x 成一夹角 α 时,作用于桥梁上下表面的风压力分布不相同。流向上表面的气流受到阻碍,流速减小,压力增大。下表面特别是桥前缘处流速增大,压力减小。梁上下表面的压力不相等,形成压力差。这就是气流对吊桥自激振动的作用力。它的合力的作用方向及作用点取

决于桥梁截面形状，可由风洞试验测定。对图 1-3-1 所示截面，当梁的迎风边受扰动而向下运动时，可能出现下列情况：

a. 当 $\frac{d}{b}>0.24$ 时，空气压力的位置和方向为图 1-3-1 中 P_3，它助长桥梁向下运动并加剧偏转，使桥梁竖向弯曲及扭转振动越来越大以致失去动力稳定而破坏。

b. 当 $\frac{d}{b}=0.08\sim0.24$ 时，空气压力如图 1-3-1 中 P_2，它阻止桥梁向下运动但助长偏转，使桥梁发生不稳定的扭转振动。

c. 当 $\frac{d}{b}<0.08$ 时，空气压力如图 1-3-1 中 P_1，它阻止桥梁向下运动并减少其偏转，因此桥梁是稳定的。

④参数激振——系统特性参数按一定规律随时间改变而激发的振动。秋千摆动是参激振动的一个最简单的例子。荡秋千时，人在秋千最大振幅位置蹲下去，此时有效摆长为图 1-3-2a）中的 l_1。而在中间位置站起来，此时有效摆长为 l_2，这样，在秋千摆动过程中，系统的重心周期性下降和上升，变化规律如图 1-3-2a），就能使秋千越摆越高，这是摆长周期性变化激起的共振。另一例子是受周期变化轴向压力作用下直杆发生振幅逐渐增大的横向振动［图 1-3-2b）］。轴向力影响直杆横向弯曲振动，周期性变化的轴向力导致横向弯曲振动方程中的参数发生周期性改变（具体方程见文献［2］第 17 章），当作用力频率 $\bar{\omega}$ 与压杆横向振动固有频率 ω 满足一定关系，即 $\bar{\omega}=\frac{2\omega}{K}(K=1,2,3,\cdots)$ 时，压杆横向振幅越来越大［图 1-3-2c）］，以致丧失稳定性，这就是杆件轴线方向激扰力周期性变化激起杆件横向共振现象。

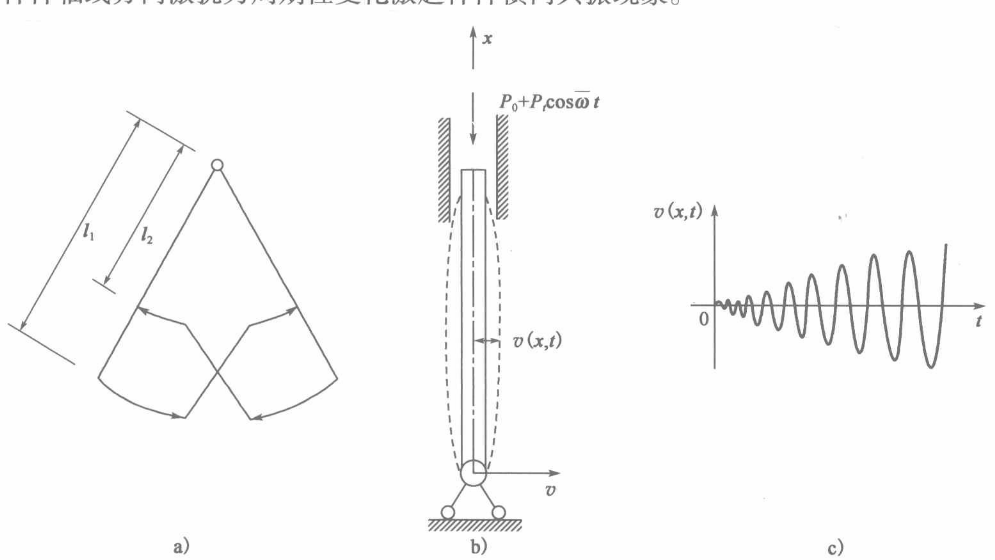

图 1-3-2　参数激振实例与响应特性

a）秋千摆动示意图；b）直杆横向振动失稳；c）参数共振响应曲线

(3)按描述系统振动的微分方程是否为线性,振动分为线性振动和非线性振动。

①线性振动——系统在线性阻尼和线弹性恢复力作用下发生的微幅振动,即作用于振动系统的内部抵抗力均可表示成系统状态变量(如速度,位移)的线性函数。

②非线性振动——系统振动状态用非线性阻尼、非线性刚度表征。例如,地震引起的结构破坏性倒塌,强风作用下柔性结构的大幅振动均属于非线性振动。

1.4 振动问题的几种提法

系统受外界激扰作用发生振动,而表述系统振动状态的物理量(如加速度、速度以及位移等)称为响应,也称为反应。激扰称为系统动力输入,响应称为输出,两者由系统的振动特性(质量特性 M、刚度特性 K、阻尼特性 C)联系着,如图 1-4-1 所示。

图 1-4-1 描述系统振动的三要素

三者中知其两者就可求第三者,故有以下几种提法:

(1)在外部激扰与系统特性已知的情况下,求系统响应,称为振动分析。

(2)在系统特性与系统响应已知的情况下,反推系统输入特性,称为振动环境预测。

(3)在外部激扰与系统响应均为已知的情况下,确定系统特性称为振动特性测定或系统识别(辨识)。也可改为下面的提法:给定外部激扰,如何设计系统,使得系统响应满足指定条件,这就是振动综合和设计。

工程振动问题往往错综复杂。它可能同时包含系统识别、振动分析、振动综合和设计等几个方面的问题。将实际问题抽象为力学模型,其实质是系统识别问题。按力学模型列方程求解,其实质是振动分析问题。而振动分析并不是问题的终了,其结果还必须用于改进设计,这就是振动综合和设计的问题。

第 2 章　运动方程的建立

除应用牛顿第二定律可直接导出运动系统控制微分方程外，其余建立运动方程的方法都是基于达朗贝尔原理（D'Alembert's Principle），将动力问题转化为动力平衡问题，并运用能量方法简化列式。建立系统运动方程的方法包括：

（1）牛顿第二定律（Newton's Second Law of Motion）。

（2）虚位移原理（Principle of Virtual Displacements）。

（3）拉格朗日方程（Lagrange's Equations）。

（4）哈密尔顿原理（Hamilton's Principle）。

（5）弹性系统动力学总势能不变值原理（Principle of Total Potential Energy with Stationary Value in Elastic System Dynamics）❶。

第（1）、（2）种方法在经典力学教材上多有阐述，这里不再赘述。下面主要讲述第（3）~（5）种方法，并进行比较。

2.1　系统的约束、广义坐标及自由度

运动方程描述系统振动形态的变化规律。振动形态的表述与系统约束、广义坐标及自由度等概念相关。故建立运动方程之前，先介绍这些概念。

1. 约束质点系及自由质点系

讨论系统振动时选取地球作为参照系，取固结于地球的笛卡尔坐标系（如图 2-1-1 所示），该坐标系称为基础坐标系。0 表示坐标系原点。桥梁、房屋等都固结在地球上，不能自由运动，只能作满足外部约束条件的运动。这种系统称为约束质点系，或称非自由质点系。天空中的飞机、飞鸟等能相对于地球（即基础坐标系）沿各方向自由运动，称为自由质点系。其中每个质点在满足系统内部约束条件外，都可以相对于基础坐标系在各方向自由运动。

2. 约束分类及其数学表述

对质点的位置和速度所施加的几何或运动学的限制称为约束，通过约束方程表示。例如结构边界条件就是一类约束方程。下面简要介绍常见的约束分类。

（1）根据约束方程所涉及的状态变量分为几何约束和运动约束：

---

❶此原理由本书第一作者提出，可以方便地建立具有复杂动力作用的系统有限元方程，已成功解决列车—轨道—桥梁等复杂系统振动方程的建立问题。

几何约束——只限制系统质点的位置。例如图 2-1-2 中质点 m 的位置坐标(x,y,z)必须满足方程

$$x^2+y^2+z^2=l^2 \tag{2-1-1}$$

式(2-1-1)称为约束方程,l 为刚杆的长度。由式(2-1-1)可解出 $z=\pm\sqrt{l^2-(x^2+y^2)}$,可见只要知道 x、y 即知道 z,故描述质点 m 在 t 时刻空间位置坐标 $x(t)$、$y(t)$、$z(t)$ 中只有两个坐标是相互独立的。也可取球坐标 $\psi(t)$、$\varphi(t)$ 表示质点 m 的位置,两者是相互独立的,故独立坐标的选择不是唯一的。

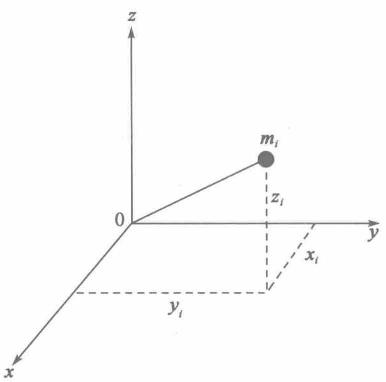

图 2-1-1　基础坐标系下质点位置描述

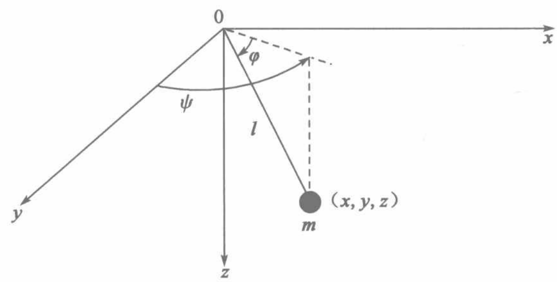

图 2-1-2　描述质点运动的独立坐标

运动约束——不仅限制质点位置,还限制质点的运动速度。例如图 2-1-3 所示圆柱滚筒沿水平地面 x 方向运动,其质心 C 的位置必须满足

$$z_C=R \tag{2-1-2}$$

式(2-1-2)为几何约束方程。若只能滚动,不能滑动,则滚筒与地面接触点 D 的速度为零,即

$$\dot{x}_C-R\dot{\varphi}=0 \tag{2-1-3}$$

此为运动约束方程。但经过积分,可得 $x_C=R\varphi+c$(c 为积分常数),运动约束变为几何约束。但是,有些运动约束方程不能积分为几何约束方程。如图 2-1-4 所示,冰刀在冰面上的运动可以简化为杆 AB 在一平面上的运动,而质心 C 的速度 v_C 始终沿 AB 的方向,它在 x 和 y 方向上的两个分速度 $\dot{x}_C$、$\dot{y}_C$ 应满足关系式

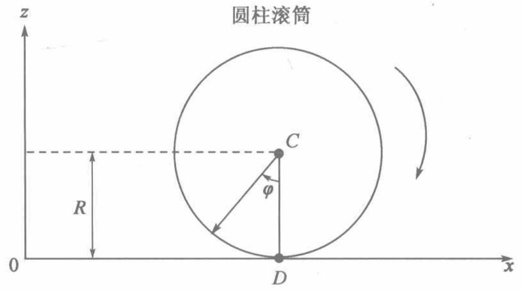

图 2-1-3　圆柱筒水平滚动

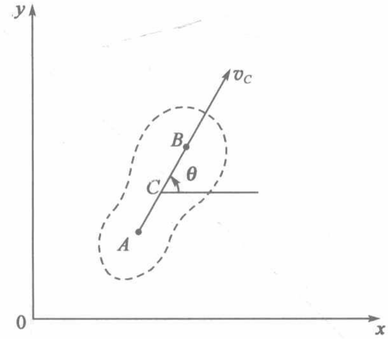

图 2-1-4　冰刀面内运动

$$\frac{\dot{y}_C}{\dot{x}_C} = \tan\theta \quad 或 \quad \dot{x}_C\sin\theta - \dot{y}_C\cos\theta = 0$$

上式是一个运动约束方程，由于杆 AB 和 x 轴夹角 θ 随着体系运动而不断变化，故上式是一个不可积分的运动约束方程。如何判别运动约束方程是否可积，可参考文献[12]。

(2)根据约束方程是否显含时间变量分为稳定（定常）约束和非稳定（非定常）约束：

稳定约束——约束方程不显含时间变量 t，设力学体系由 l 个质点组成，约束方程一般表达式为

$$f_c(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_l) = 0 \quad 或 \quad f_c(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_l,y_l,z_l) = 0 \tag{2-1-4}$$

式中：　$\boldsymbol{r}_i$——第 i 个质点的位置矢量；

(x_i,y_i,z_i)——基础坐标系下的第 i 个质点的坐标分量，$i=1,2,\cdots,l$。

非稳定约束——约束方程显含时间变量 t，例如图 2-1-5 所示平面摆的悬支点 j 按 $y_0 = a\sin\omega t$ 正弦模式沿铅垂方向上下运动，则质点 m 的约束方程为

$$x^2 + (y - a\sin\omega t)^2 = l^2 \tag{2-1-5}$$

非稳定约束的一般表达式为

$$f_c(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_l,t) = 0$$

或

$$f_c(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_l,y_l,z_l,t) = 0 \tag{2-1-6}$$

(3)根据约束方程是否显含质点速度项分为完整约束和非完整约束：

完整约束——包含几何约束和可积分的运动约束，其约束方程不包含坐标对时间的导数（速度分量）。式(2-1-4)与式(2-1-6)表示的约束均为完整约束。

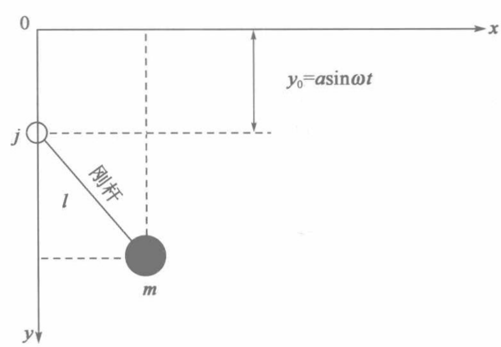

图 2-1-5　作垂向运动的单摆

不可积分的运动约束称为非完整约束，其约束方程包含坐标对时间 t 的导数。其一般表示式为

$$f_c(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_l,\dot{\boldsymbol{r}}_1,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_l,t) = 0$$

或

$$f_c(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_l,y_l,z_l,\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1,\cdots,\dot{x}_l,\dot{y}_l,\dot{z}_l,t) = 0 \tag{2-1-7}$$

式中：　$\dot{\boldsymbol{r}}_i$——第 i 个质点的速度矢量；

$(\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i)$——基础坐标系下的第 i 个质点的速度分量，$i=1,2,\cdots,l$。

如前所述，图 2-1-4 所示冰面上运动的冰刀对应运动约束方程不可积分，属于非完整约束。因此，如果给定了一个含有质点速度的约束方程，那么就应当研究是否可以通过该方程对时间的积分得到式(2-1-4)或式(2-1-6)形式的方程。若这是可以的，则约束是完整的。反之就是非完整约束。

所有约束均为完整约束的质点系称为完整系统，只要存在一个或一个以上非完整约束的质点系称为非完整系统。

3. 广义坐标与自由度

根据1.2节的介绍，完全描述系统振动位形的独立变量称为广义坐标。例如，考虑图2-1-6中梁在铅垂面内振动，梁截面的竖向挠度 $V(X,t)$ 决定梁竖向振动位形，但它不是广义坐标，原因是相邻截面的挠度必须是连续的。因此各个截面的挠度不是可以独立改变的量，所以不能直接用挠度作为系统广义坐标。

根据简支梁的边界约束条件，梁的振动位形可用傅立叶级数展成

$$V(X,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) \sin \frac{i\pi X}{L} \tag{2-1-8}$$

其中，由各正弦函数正交性可知，位移分量 $a_i(t)\sin\frac{i\pi X}{L}$，$(i=1,2,3,\cdots)$ 相互独立，故各个正弦函数的幅值 $a_i(t)$ 可以作为待定的广义坐标，$\sin\frac{i\pi X}{L}$ 则称为振型函数。

需要注意的是，式(2-1-8)是在考虑简支梁边界条件的基础上建立的。对于具有任意约束条件平面梁的振动位形宜用有限元法描述，将全梁分成 n 个单元，N 个节点[如图2-1-7a)所示]，梁单元的振动位移 $v(x,t)$ 由节点竖向位移 v 及节点截面转角 $v'\left[v'=\frac{\partial v}{\partial x}\right.$，如图2-1-7b)$\left.\right]$所示)通过单元形函数插值得到，故有

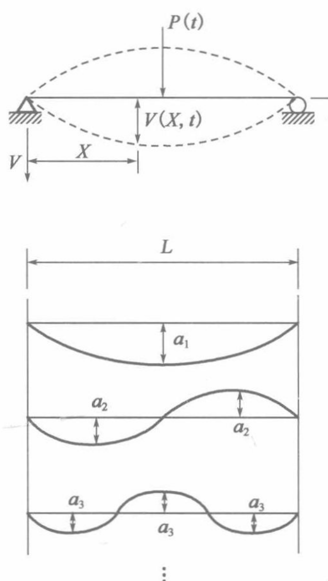

图2-1-6 简支梁竖向振动位形描述

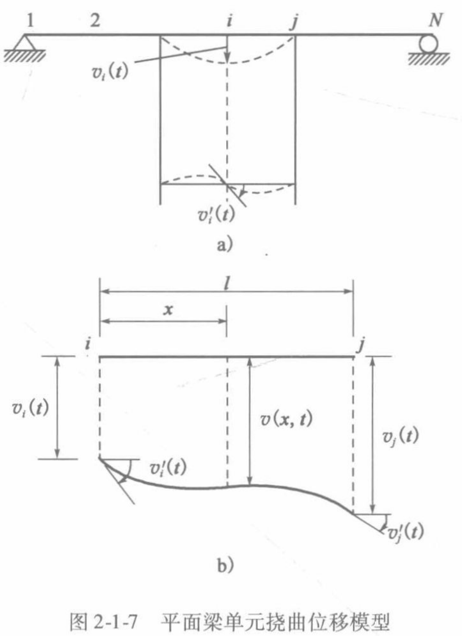

图2-1-7 平面梁单元挠曲位移模型

a)单元划分示意图；b)单元位移模型

$$v(x,t) = \boldsymbol{N}\boldsymbol{q}_e \tag{2-1-9}$$

式中：$\boldsymbol{q}_e = \{v_i(t) \quad v_i'(t) \quad v_j(t) \quad v_j'(t)\}^{\mathrm{T}}$——单元节点位移列向量；

$\boldsymbol{N} = \{N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)\}$——单元形函数矩阵。

形函数 $N_1(x)$、$N_2(x)$、$N_3(x)$ 和 $N_4(x)$ 的物理意义如图 2-1-8 所示。

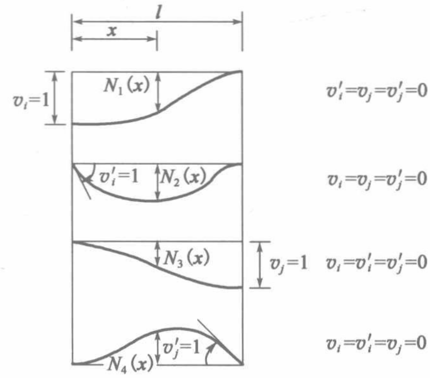

图 2-1-8　平面梁单元位移形函数

由图 2-1-8 可知，节点竖向位移和转角所引起的梁位移是相互独立的，故梁各节点位移参数 $v_i(t)$，$v_i'(t)$（$i=1,2,\cdots,N$）可选为广义坐标，它们的意义类似于图 2-1-6 中的 a_i，只是这里以单元为研究对象，而不是全梁，适用于任意截面及支承条件的平面梁结构振动分析。式(2-1-9)中平面梁单元形函数解析表达式见第 5 章。根据 1.2 节关于广义坐标的简要讨论，出于简化列式考虑，将全梁质量分散堆聚于若干质点（如图 2-1-9 所示），这些集中质量也称为堆聚质量。忽略每个集中质量的转动惯量影响，即不考虑各质点所在截面转角位移。因此，梁的振动位形可由各堆聚质量的竖向位移 $v_i(t)$ 确定，由图 2-1-9 知，这些质点位移相互独立，$v_i(t)$ 可选为广义坐标，这样大幅减少了描述平面梁振动位形的广义坐标数量。

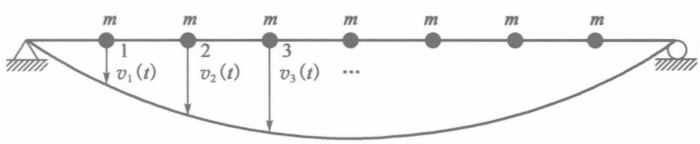

图 2-1-9　堆聚质量梁

对于集中质量体系，若考虑其转动惯量的影响，则需引入质量所在截面的转角。例如，图 2-1-10 所示车辆在铅垂平面内的振动，车辆视作刚体，质量 m 集中于其形心，考虑车辆转动惯量，描述车辆振动形态需用 2 个广义坐标，即竖向位移 $v(t)$ 和转角位移 $\theta(t)$。

任一时刻，在约束许可的条件下，能自由变化的独立变量的数目，称为体系的自由度，常以 n 表示。对于具有完整约束的体系，自由度 n 与广义坐标数相等。有的文献上说：自由度的数目等于为了完全确定体系形状所必需的独立坐标数目。显然这是针对完整体系说的。下面给出完整体系广义坐标数的计算方法，假设约束数为 k_1，体系质点数为 N，质点（节点）自由度数为 n_0，则体系的自由度数 $n = n_0 N - k_1$。

例如，由图 2-1-6 所示简支梁端部约束条件知，竖向位移 $v_1(t)$ 和 $v_N(t)$ 均为零，两者是几何约束方程，具有 N 个节点的平面梁竖向振动自由度数为 $n = 2N - 2$。