全日制普通高级中学（必修）

数学第一册（下）

教师教学用书

人民教育出版社中学数学室 编著

人民教育出版社

全日制普通高级中学（必修）

数学第一册(下)

教师教学用书

人民教育出版社中学数学室　编著

人民教育出版社

全日制普通高级中学（必修）
数学第一册(下)
教师教学用书
人民教育出版社中学数学室　编著
*
人民教育出版社　出版发行
网址：http://www.pep.com.cn
保定天德印务有限公司印装　全国新华书店经销
*
开本：889 毫米 × 1 194 毫米　1/16　印张：4.75　字数：120 000
2006 年 10 月第 2 版　2007 年 12 月第 5 次印刷
印数：23 001 ~ 29 000
ISBN 978-7-107-17108-6 / G · 10198（课）　定价：5.50 元
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与本社出版科联系调换。
（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

说　明

本书是人民教育出版社中学数学室编著的《全日制普通高级中学教科书（必修）·数学第一册(下)》的教师教学用书．编写时按教科书分章安排，每章包括概述、内容分析、习题参考解答三部分．参加编写本书的有蔡上鹤、田载今，责任编辑是薛彬、张劲松．

目　录

第四章　三角函数

I　概　述

一、教学要求

1. 理解任意角的概念、弧度的意义；能正确地进行弧度与角度的换算.

2. 掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义，并会利用与单位圆有关的三角函数线表示正弦、余弦和正切；了解任意角的余切、正割、余割的定义；掌握同角三角函数的基本关系式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$，$\tan\alpha\cot\alpha=1$；掌握正弦、余弦的诱导公式.

3. 掌握两角和与两角差的正弦、余弦、正切公式；掌握二倍角的正弦、余弦、正切公式；通过公式的推导，了解它们的内在联系，从而培养逻辑推理能力.

4. 能正确运用三角公式，进行简单三角函数式的化简、求值及恒等式证明（包括引出半角、积化和差、和差化积公式，但不要求记忆）.

5. 会用与单位圆有关的三角函数线画出正弦函数、正切函数的图象，并在此基础上由诱导公式画出余弦函数的图象；了解周期函数与最小正周期的意义；了解奇偶函数的意义；并通过它们的图象理解正弦函数、余弦函数、正切函数的性质以及简化这些函数图象的绘制过程；会用“五点法”画正弦函数、余弦函数和函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的简图，理解 A、ω、φ 的物理意义.

6. 会由已知三角函数值求角，并会用符号 $\arcsin x$、$\arccos x$、$\arctan x$ 表示.

二、内容编排

1. 本章主要内容是任意角的概念、弧度制、任意角的三角函数、同角三角函数间的关系、诱导公式、两角和与差的三角函数、二倍角的三角函数，以及三角函数的图象和性质，已知三角函数值求角等. 内容结构如本章小结与复习中的图所示.

三角函数是中学数学的重要内容之一，它的基础主要是几何中的相似形和圆，研究方法主要是代数中的式子变形和图象分析，因此三角函数的研究已经初步把几何与代数联系起来了. 高等数学、物理学、天文学、测量学以及其他各种应用技术学科，都要经常用到三角函数及其性质，因此这些内容既是解决生产实际问题的工具，又是学习高等数学等学科的基础.

2. 章头引言指出，在我们周围运动着的物质世界里，存在着许多周期性的现象. 其中有些周期性变化，可以用数学工具来描述. 三角函数就是描述周期性变化的数学模型之一，它们有着良好的性质. 本引言开门见山地说出了三角函数最本质、有用的特性. 在引言的基础上，教科书把本章内容分为以下三部分：

第一部分是“任意角的三角函数”. 教科书首先将学生初中学过的角的概念推广到任意角的范围，并

引出终边相同的角的集合的概念．教科书还通过具体例子，用运动的观点讲述了角的概念推广的实际意义，以表明这一推广的必要性．然后，教科书介绍了弧度制，通过用弧度制对角的度量，更容易看清角与实数可以建立起一一对应的关系．因此，当教科书接着把三角函数的概念由锐角推广到任意角后，就易于把三角函数看成以实数为自变量的函数，使三角函数具有更广泛的意义和应用．最后，为了求任意角的正弦、余弦值，又根据三角函数的定义导出同角三角函数间的关系式

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha,\ \tan\alpha\cot\alpha=1$$

及正弦、余弦的诱导公式，并利用这些公式进行了一些化简及恒等式的证明．

第二部分是“两角和与差的三角函数”．教科书采用了相对而言比较易于教学的一种公式推导体系．先引入平面内两点间距离公式（只通过画图说明公式的正确性，不予严格证明），用距离公式推出余弦的和角公式 $C_{(\alpha+\beta)}$，然后按以下顺序推导其余的公式：

$$C_{(\alpha+\beta)}\to C_{(\alpha-\beta)}\to S_{(\alpha+\beta)}\to S_{(\alpha-\beta)}\to T_{(\alpha+\beta)}\to T_{(\alpha-\beta)}\to S_{2\alpha}、C_{2\alpha}、T_{2\alpha}.$$

在导出这些公式后，教科书安排了对它们的运用的训练（包括引出半角公式、和差化积及积化和差公式，但不要求学生记忆），并及时地解决了引言中的实际问题．

第三部分是“三角函数的图象和性质”．教科书先利用正弦线画出函数 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的图象，并根据“终边相同的角有相同的三角函数值”，把这一图象向左、右平行移动，得到正弦曲线；在此基础上，利用诱导公式 $y=\cos x=\cos(-x)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-(-x)\right]=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，把正弦曲线向左平行移动 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，得到余弦曲线．接着根据这两种曲线的形状和特点，研究了正弦函数、余弦函数的性质．然后又研究了函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的简图的画法，由此揭示这类函数的图象与正弦曲线的关系，以及 A、ω、φ 的物理意义，使学生根据周期函数和最小正周期的意义，以及从图象变化的过程中，进一步了解正弦函数、余弦函数的性质．接下来简要地介绍了利用正切线画出正切函数的图象以及正切函数的性质．最后讲述了如何由已知三角函数值求角，引进了 $\arcsin x$、$\arccos x$、$\arctan x$ 等记号．

3. 本章内容的重点是：任意角三角函数的概念，同角三角函数间的关系式、诱导公式及其运用，正弦、余弦的和角公式，正弦曲线的画法和正弦函数的性质．难点是：弧度制的概念，综合运用本章公式进行简单三角函数式的化简及恒等式的证明，周期函数的概念，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与正弦曲线的关系．关键是：使学生熟练掌握任意角三角函数的定义，讲清余弦的和角公式的特征及其向差角公式、正弦的和角公式的变化，正弦曲线的画法和正弦函数的性质．

4. 通过本章的学习，学生将进一步了解符号与变元、集合与对应、数形结合等基本数学思想在研究三角函数时所起的重要作用；在式子和图形的变化中，学生将看到分析、探索、化归、类比、平行移动、伸长和缩短这些常用的基本方法时隐时现．这些数学思想方法为学生学习数学和应用数学提供了一个新的领域，教科书对此作了渗透．教学时应注意及时提醒或强调．

三、课时分配

本章教学时间约需 36 课时，具体分配如下（仅供参考）：

4.1　角的概念的推广	约 2 课时
4.2　弧度制	约 2 课时
4.3　任意角的三角函数	约 2 课时
4.4　同角三角函数的基本关系式	约 2 课时
4.5　正弦、余弦的诱导公式	约 3 课时

Ⅱ 内容分析

引 言

章头图选取我国杭州钱塘江大潮的壮丽景色的一幅照片，说明物质世界存在着周期性现象. 这幅图片与本章的阅读材料“潮汐与港口水深”互相呼应. 教学中还可以让学生从自己的生活中找出例子，以感悟周期性现象是广泛存在的.

引言指出，三角函数是描述周期性变化的数学模型之一，它有着许多良好的性质. 三角函数描述的变化规律是周期性出现的，这是三角函数的本质特性，由此带来了极其广泛的应用.

4.1 角的概念的推广

1. 本节把学生学习的角从不大于周角的非负角扩充到任意角，使角也有正角、零角、负角之分. 在平面内建立适当的直角坐标系后，可以根据角的终边在哪一象限，把角划分为第一、二、三、四象限角和特殊角等几类，于是引入了第几象限角和终边相同的角的集合这样两个概念. 最后由特殊到一般地归纳出“任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和”这一结论.

2. 通过本节的学习，要使学生理解任意角的概念，学会在平面内建立适当的坐标系来讨论任意角；能在 $0°$ 到 $360°$ 范围内，找出与此范围外每一个已知角终边相同的角，并判定其为第几象限角；能写出与任一已知角终边相同的角的集合.

3. 本节的重点是任意角的概念，象限角的概念. 难点是把终边相同的角用集合和符号语言正确地表示出来. 理解任意角的概念，会在平面内建立适当的坐标系，通过数形结合来认识角的几何表示和终边相同的角的集合，是学好本节的关键.

4. 关于正文，在引入任意角的概念时，除了教科书上介绍的钟表的时针、体操运动员的转体外，还可举些实例，例如自行车的轮子、螺丝扳手与曲柄连杆等按不同方向旋转时所成的角，用以说明新概念的必要性和它的实际意义.

正角、负角是用来表示具有相反意义的旋转量的，其正、负规定出于习惯，就像正、负数的规定一样（就是说，我们也可规定按顺时针方向旋转所成的角为正角，按逆时针方向旋转所成的角为负角，就像也可规定向西为正，向东为负一样）. 如果一条射线没有作任何旋转（即旋转量为 0），那么说它形成了一个零角；零角无正负，就像实数 0 无正负一样. 对“旋转量”这个词没有下过定义，教学时可以看成用来对专门的数学概念进

行描述的一般性词语.

讲某角是第几象限角时，应强调平面直角坐标系的建立方法——角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合. 这是判断某角为第几象限角的前提. 在这个前提下，才能提到由终边所在象限来判定某角为第几象限角这一标准. 同时还应向学生指出，终边落在坐标轴上的角，不能成为任何象限的角. 注意，“x 轴的非负半轴”包括原点，这样才能成为角的始边(角的始边是以角的顶点为其端点的射线). 所以这里不能用“x 轴的正半轴”(“正半轴”这个词可用于其他场合，例如“在复平面内，y 轴的正半轴上的点都表示虚部大于0的纯虚数”)来代替. 此外，由于坐标轴上所有点的集合是一个无限集，如果以原点为分界点，把其两侧各看作一半，那么原点归入或不归入任何一侧都不会影响“一半”的含义，所以不要引导学生在这一点上发生争论.

角的概念推广后，学生对“0°到 90°的角”“第一象限角”“锐角”和“小于 90°的角”这些概念容易混淆，教学时应引导他们加以辨别. 应强调指出，“0°到 90°的角”指的是一个前闭后开的区间 $[0°,90°)$；而上述后面三种角的集合可以分别表示成 $\{\theta|k\cdot 360°<\theta<90°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$，$\{\theta|0°<\theta<90°\}$(即 $(0°,90°)$)，$\{\theta|\theta<90°\}$. 此外，当我们表示的范围既包括起点也包括终点时，可以使用符号“～”. 所以，“0°～90°的角”指的是一个闭区间 $[0°,90°]$. 教学时，对这些符号和词语的使用要认真对待. 教科书在把任意角的集合分成子集时，为了使每一个元素“不重不漏”，没有使用“～”这一符号.

讲与角 α 终边相同的角的一般形式 $\alpha+k\cdot 360°$ 时，应指出：(1) $k\in\mathbf{Z}$. (2) α 是任意角. (3) 终边相同的角不一定相等，但相等的角的终边一定相同. 终边相同的角有无限多个，它们相差 360°的整数倍.

5. 例 1 的目的是使学生能在 0°到 360°范围内，找出与此范围外任何已知角终边相同的角，并判定其为第几象限角，这是为以后证明恒等式、化简及利用诱导公式求三角函数的值打基础的. 在讲这个例题时，可补充草式如下：

(1) $-120°=240°-360°$；　　(2) $640°=280°+360°$；

$$\begin{array}{r} -1 \\ 360°\overline{)\,-120°} \\ \underline{-360°} \\ 240° \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1 \\ 360°\overline{)\,640°} \\ \underline{360°} \\ 280° \end{array}$$

(3) $-950°12'=129°48'-3\times 360°$.

$$\begin{array}{r} -3 \\ 360°\overline{)\,-950°12'} \\ \underline{-1\,080°} \\ 129°48' \end{array}$$

草式写在草稿纸上. 正的角度除以 360°，按通常的除法进行；负的角度除以 360°，商是负数，它的绝对值应比被除数为其相反数时相应的商大 1，以使余数为正值.

例 2 的目的是使学生理解终边在坐标轴上的角的集合，并对例 1 的作用进行补充. 这道例题的结果在形式上也可表述如下：

$$\begin{aligned} S&=S_1\cup S_2\\ &=\{\beta|\beta=90°+2k\cdot 180°,k\in\mathbf{Z}\}\\ &\quad\cup\{\beta|\beta=90°+(2k+1)180°,k\in\mathbf{Z}\}\\ &=\{\beta|\beta=(4k+1)90°,k\in\mathbf{Z}\}\\ &\quad\cup\{\beta|\beta=(4k+3)90°,k\in\mathbf{Z}\}\\ &=\{\beta|\beta=90°\text{的奇数倍}\}\\ &=\{\beta|\beta=(2n+1)90°,n\in\mathbf{Z}\}. \end{aligned}$$

教科书中的结果形式在今后更为常用，这两种形式在实质上是等价的.

例 3 的目的是使学生理解终边不在坐标轴上的角的集合，并对例 1、例 2 进行补充和巩固. 通过例 2 和例 3，学生又一次运用了集合表示法和符号语言；这是一种必要的训练，在今后会得到经常性的应用.

6. 本节练习的第 1 题主要是使学生认识“锐角”“第一象限角”这两个概念的区别与联系；第 2 题确定星期几，联系了实际，把教科书中的除数 360 换成每个星期的天数 7，又一次利用了“同余”（这里余数是 3）来确定 $7k$ 天后、$7k$ 天前也都是星期三，这样的练习不难，可以口答. 习题 4.1 的第 5 题是两道选择题，这样的题目出现在本章开头部分，可以不用论证的方法选出正确的答案，而改用特殊值法排除错误的答案（注意两道题的选择项（A）都不包括直角，而选择项（D）都包括直角，所以它们是不同的答案）. 本小节的其他练习题和习题都与例题相似，宜要求学生练好练熟.

4.2 弧度制

1. 本节向学生介绍了度量角的一种新单位制——弧度制，弧度与角度的换算方法，以及弧度的某些简单应用.

2. 通过本节的学习，要使学生理解弧度的意义，能正确地进行弧度与角度的换算，熟记特殊角的弧度数；了解角的集合与实数集 **R** 之间可以建立起一一对应的关系；掌握弧度制下的弧长公式，会利用弧度解决某些简单的实际问题.

3. 本节的重点是使学生理解弧度的意义，能正确地进行弧度与角度的换算. 弧度的概念及其与角度的关系，是本节乃至本章的难点；其中，讲清 1 弧度的角的意义，是建立弧度概念的关键.

4. (1) 本节介绍弧度制，自然首先涉及弧的概念. 圆上任意两点间的部分叫做圆弧，简称弧，所以弧又与圆心角有联系——弧的度数等于圆心角的度数. 随着角的概念的推广，圆心角与弧的概念也随之推广：从“形”上说，圆心角有正角、零角、负角之分，弧也就有正弧、零弧、负弧之分；从“数”上讲，圆心角与弧的度数就都有了正数、0、负数之分. 这样，圆心角、弧都被赋予了方向，就像后面要介绍的三角函数线是被赋予了方向的有向线段一样. 每一个圆心角都有一条弧与它对应，并且不同的圆心角对应着不同的弧，反过来也对. 这就是说，圆心角与弧是一一对应的.

(2) 在讲述 1 弧度的角的含义时，学生可能提出以下问题：为什么可以用等于半径的弧所对的圆心角作为角的度量单位呢？这个角是否与所取圆的半径的大小无关呢？又为什么可以用弧长与圆的半径的比值来度量弧所对的圆心角的大小，即这个比值是否与所取圆的半径的大小无关呢？为了从直观上说明这些问题，可先在黑板上画一个圆，用一段等于半径的塑缘电线或铁丝弯成弧形，使它与圆的某一段重合，再从圆心向这条弧的两个端点引两条射线，得到一个圆心角，这个角就是 1 弧度的角. 按此方法再取一个与上述圆半径不同的圆，同样可得到另一个圆心角. 用量角器量这两个角，可以看出它们相等. 又如果在第一个圆内取一条弧等于半径的 2 倍，得到一个圆心角，把这个圆心角移到第二个圆内，它所对的弧也等于半径的 2 倍. 这就直观地说明，当圆心角一定时，它所对的弧的长度与半径的比值是一定的，与所取圆的半径的大小无关. 因此，用圆心角所对的弧的长度与半径的比值来度量这个圆心角是合理的. 当然这一结论也可从数学上进行证明，为节省教学时间，课堂上可以略去.

(3) 角的概念推广后，无论用角度制还是用弧度制，都能在角的集合与实数集 **R** 之间建立一种一一对应的关系. 说“每个角有唯一的实数与它对应”时，这个实数可以取这个角的弧度数，或度数，或角度制下的分数，或角度制下的秒数，所以对应法则不是唯一的，但每一种对应法则下对应的实数是唯一的. 说“每一个实数也有唯一的一个角与它对应”时，对应法则也不是唯一的，但每一种对应法则下对应的角是唯一的. 所以不要认为只有弧度制才能将角与实数一一对应.

(4) 那么，弧度制与角度制相比，是否具有优点呢？分析角度制下度量角的方法，不难看出，在用角度表示角的时候，我们总是十进制、六十进制并用的. 例如角 $\alpha=66°32'2''$，其中 66、32、2 都是十进数，而度、分、秒之间的关系是六十进（退）位的. 于是，为了找出与角对应的实数（我们学的实数都是十进数），要经过一番计算，这就不太方便了. 但在用弧度表示角的时候，我们只用十进制，所以容易找出与角对应的实数. 此外，教科书还指出，弧度制下的弧长公式 $l=|\alpha|r$，比角度制下的弧长公式 $l=\frac{n\pi r}{180}$具有更为简单的形式. 当然，如果已知圆心角等于 α 弧度，那么用弧度制下的扇形面积公式 $S=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$ 求扇形面积，也比用角度制下的公式 $S=\frac{n}{360}\pi r^2$ 更为简单. 弧度制还将线段与弧的度量统一起来，使角与其三角函数值的单位统一起来，学生将在后续学习中逐渐体会这些优点.

(5) 引进弧度制后，应该与角度制进行对比，使学生明确：第一，弧度制是以“弧度”为单位来度量角的单位制，角度制是以“度”为单位来度量角的单位制；第二，1 弧度是等于半径长的弧所对的圆心角（或这条弧）的大小，而 $1°$是圆的$\frac{1}{360}$所对的圆心角（或这条弧）的大小；第三，无论是以“弧度”还是以“度”为单位，角的大小都是一个与半径大小无关的定值.

(6) 用公式 $|\alpha|=\frac{l}{r}$求圆心角时，应强调其结果是圆心角的弧度数的绝对值. 在物理学中计算角速度时经常要用到它，因此应要求学生掌握它及其两种变形式子 $l=|\alpha|r$ 及 $r=\frac{l}{|\alpha|}(|\alpha|\neq 0)$. 运用这两个公式时，如果已知的角以“度”为单位，应先把它化成弧度数后再计算. 可以看出，这些公式各有各的用处.

(7) 用“弧度”与“度”去度量每一个角时，除了零角以外，所得到的量数都是不同的. 但它们既然是度量同一个角的结果，二者就可以相互换算. 教学时应抓住

$$360°=2\pi\text{ 弧度}\longrightarrow 180°=\pi\text{ 弧度}$$

这个关键，并引导学生以此为基础，写出特殊角如 30°，45°，60°，90°，270°等的弧度数，以及度与弧度的换算公式. 最后，除了向学生说明可以利用科学计算器进行换算外，还要补充一些这样的例、习题.

(8) 教学时应特别指出：第一，用“弧度”为单位度量角时，“弧度”两字可以省略不写，这时弧度数在形式上虽然是一个不名数，但应当把它理解为名数，例如 $\sin 2$ 是指 $\sin(2\text{ 弧度})$，$\pi=180°$是指 π 弧度 $=180°$. 但用“度”为单位度量角时，“度”（即“°”）不能省去. 第二，用“弧度”为单位度量角时，常常把弧度数写成多少 π 的形式，如无特别要求，不必把 π 写成小数，例如 $45°=\frac{\pi}{4}$弧度，不必写成 $45°\approx 0.785$ 弧度.

(9) 讲完弧度制后，写出与角 α 终边相同的角（连同角 α 在内）时，要根据角 α 的单位来决定后一项的单位. 也就是说，两项所采用的单位制必须一致，防止出现$\frac{\pi}{3}+k\cdot 360°$或 $60°+2k\pi$ 一类写法.

(10) 度量角的单位制，除了角度制、弧度制外，军事上还常用一种密位制. 密位制的单位是“密位”. 1 密位就是圆的$\frac{1}{6\,000}$所对的圆心角（或这条弧）的大小. 因为 $360°=6\,000$ 密位，所以

$$1°=\frac{6\,000\text{ 密位}}{360}\approx 16.7\text{ 密位},$$

$$1\text{ 密位}=\frac{360°}{6\,000}=0.06°=3.6'=216''.$$

密位的写法是在百位上的数与十位上的数之间画一条短线，例如 7 密位写成 0－07，读作“零，零七”，478 密位写成 4－78，读作“四，七八”.

密位不属于我国法定计量单位，所以不必在课内介绍．以上小知识可用于课外数学兴趣小组的活动，使学生有利于理解某些军事题材的作品中所出现的这一词语.

5．例 1 的目的是练习角度与弧度的换算．在讲解时，“度”的单位“°”不能省略，“弧度”的单位“rad”暂不要省略，并且不要用“rad”的中文名称“弧度”作单位写在数据的后面．写法应以教科书中的为准.

例 3 是告诉学生，无论是利用角度制还是利用弧度制，都能在已知弧长 l 与半径 R 的情况下推出扇形的面积公式 $S=\frac{1}{2}lR$，但利用弧度制来推导要简单一些.

例 4 是求锐角三角函数值，其中角是用弧度表示的．例 5 是将任意角化为 0 到 2π 的角加上 $2k\pi$（$k\in$ **Z**）的形式，这是为今后利用诱导公式和锐角三角函数值表示任意角的三角函数值作准备的．例 6 则是有关弧度的一道应用题.

6．本节的练习和习题基本上是与正文和例题搭配的，此外还注意巩固上一节学过的“双基”．练习的第 10 题中，圆心角有正、负两个答案，但因为题目限定取圆心角的绝对值，所以舍去了负值．习题 4.2 的第 9 题与轮子的旋转方向没有关系；第 11 题是逆时针旋转，飞轮每 1 s 转过的弧度数当然应取正数.

4.3　任意角的三角函数

1．本节将三角函数的自变量从锐角推广到任意角．教科书先通过平面直角坐标系定义了任意角的正弦、余弦、正切函数，并利用与单位圆有关的有向线段，将这些函数值分别用它们的几何形式表示出来；然后定义了任意角的余切、正割、余割函数．接着，着重研讨了正弦、余弦、正切函数的定义域和这三种函数的值在各象限的符号；并根据三角函数的定义，得出“终边相同的角的同一三角函数的值相等”的结论及把此结论表示成第一组诱导公式（公式一）.

2．通过本节的学习，要使学生掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义，了解如何利用与单位圆有关的有向线段，将任意角 α 的正弦、余弦、正切函数值分别用正弦线、余弦线、正切线表示出来；了解余切、正割、余割的定义；掌握正弦、余弦、正切函数的定义域和这三种函数的值在各象限的符号；掌握公式一，会运用它们把求任意角的正弦、余弦、正切函数值分别转化为求 0° 到 360° 的这三种三角函数值.

3．本节的重点是任意角的正弦、余弦、正切的定义（包括这三种三角函数的定义域和函数值在各象限的符号），以及这三种函数的第一组诱导公式．前者也是本章教学内容的基本概念，如果学生掌握不好，将会给学习后续内容带来困难，所以它又是学好全章内容的关键．公式一是本节的另一个重点．利用与单位圆有关的有向线段，将任意角 α 的正弦、余弦、正切函数值分别用它们的几何形式表示出来，是学习本节的难点；使学生掌握单位圆的概念，了解三种线段的正、负与坐标轴的正、反方向之间的对应，以及这三种有向线段（的数量）与三种三角函数值之间的对应，则是克服这一难点的关键.

4．（1）本节定义了任意角的三角函数．定义对象从锐角三角函数推广到任意角三角函数，从四种三角函数增加到所有的六种三角函数；定义媒介则从直角三角形改为平面直角坐标系．为了突出现在的定义适用于任意角，教科书中提供了图 4－10，把终边出现在四个象限的情况都画出来了（注意图上表示角未用箭头，因为画了箭头，就只表示一个角了）．讲解时，必须讲清并强调 $\frac{y}{r}$，$\frac{x}{r}$，$\frac{y}{x}$，$\frac{x}{y}$，$\frac{r}{x}$，$\frac{r}{y}$ 这六个

比值的大小都与点 P 在角的终边上的位置无关，只与角的大小有关，即它们都是以角为自变量，以比值为函数值的函数，从而给出任意角的三角函数的定义.

(2) 使学生明确：$\sin\alpha$ 不是 sin 与 α 的乘积，而是一个比值；三角函数记号是一个整体，离开自变量的“sin”“tan”等是没有意义的. sin, cos, tan, cot, sec, csc 分别是英语中名词 sine[sain], cosine[ˈkosain], tangent [ˈtændʒənt], cotangent[koˈtændʒənt], secant[ˈsikənt], cosecant[koˈsikənt]（这里方括号内的字符分别是它前面的词的国际音标）的缩写. 注意，不论是否用缩写，每个词的第一个字母“s”或“c”或“t”都不能大写，所以不要让学生养成书写“Sin”，“Cos”等习惯. 另外，有的书上把 tan 写成 tg，把 cot 写成 ctg，本教科书遵照我国国家标准《量和单位》中的规定，统一使用前者（电子计算机和科学计算器上也使用前者）.

(3) 正弦线、余弦线、正切线分别是正弦、余弦、正切函数的一种几何表示. 这三种线段都是与单位圆有关的有向线段. 一条线段有两个端点，如果规定其中一个端点为起点，另一个为终点，这条线段就被看作带有方向，于是把它叫做有向线段. 表示有向线段时，要先写起点的字母，后写终点的字母. 当有向线段与数轴平行时，我们可根据此线段的方向（从起点向终点）与数轴的方向相同或相反，分别把它的长度加上正号或负号，这样所得的数，就是此有向线段的数值，它是一个实数. 学生将来学习解析几何时，上述“数轴”可推广为与任何方向（即不限于水平和垂直方向）的有向线段平行的任一“有向直线”.

与单位圆有关的某些特定的有向线段的数值可以用来表示三角函数值，称它们为三角函数线（分别叫做正弦线、余弦线、正切线……）. 三角函数线是有向线段，在用字母表示这些线段时，要注意它们的方向，分清起点和终点，书写顺序不能颠倒. 为此可以这样规定：凡含原点的线段，均以原点为起点；不含原点的线段，均以此线段与坐标轴的公共点为起点. 教科书中只介绍了正弦线、余弦线、正切线，其他三角函数线不宜向学生介绍.

在教学这一部分内容时，一定要紧密结合教科书中的图 4－12，并强调：正弦线、正切线的方向与 y 轴一致，向上为正，向下为负，它们的数值分别等于角 α 的正弦值、正切值；余弦线的方向与 x 轴一致，向右为正，向左为负，它的数值等于角 α 的余弦值. 这里的关键是讲清以下三个式子的全部含义：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{y}{1}=y=MP,$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{x}{1}=x=OM,$$

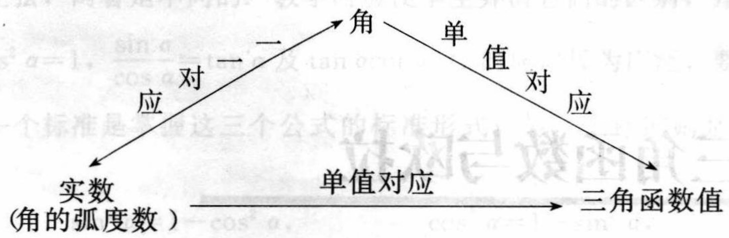
$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{MP}{OM}=\frac{AT}{OA}=AT.$$

此外，还应告诉学生，作正切线时，必须使 AT（这里起点 A 一定是单位圆与 x 轴的非负半轴的交点）在点 A 处与单位圆相切，终点 T 是切线与角 α 的终边的交点.

(4) 函数的定义域是函数概念的三要素（定义域、对应法则、值域）之一. 因此，对正弦、余弦、正切函数定义域的教学要十分重视. 确定这三种三角函数的定义域时，应抓住分母等于 0 时比值无意义这一关键. 为此需要注意：如果点 P 不是原点，那么角的终边 OP 落在坐标轴上的充要条件是点 P 的坐标中有且只有一个为 0，由此可以启发学生自己去得出结论，其中对于正切函数的定义域要特别小心. 在教科书中，用表格列出了这三种三角函数的定义域，最好让学生根据这份表格来进行对比和记忆.

由于角的集合与实数集之间可以建立一一对应关系，三角函数就可以看成以实数为自变量的函数. 例如，当采用弧度制来度量角时，每一个确定的角有唯一确定的弧度数，这是一个实数，所以六种三角函数

也都可以看成以实数为自变量，以比值为函数值的函数，即



当然，由于圆心角与它所对的弧之间也是一一对应的，所以三角函数又可以看成以弧为自变量的函数，这样就使三角函数具有更广泛的意义.

(4) 正弦、余弦、正切函数值的符号，是根据这三种函数的定义和各象限内的坐标的符号导出的. 因为从原点到角的终边上任一其他点的距离 $r=\sqrt{|x|^2+|y|^2}=\sqrt{x^2+y^2}$ 总是取正值，根据这三种函数的定义可知，正弦值、余弦值的符号分别取决于纵坐标 y、横坐标 x 的符号；正切值则是纵坐标 y、横坐标 x 同号时为正，纵坐标 y、横坐标 x 异号时为负. 三角函数值的符号十分重要，后面几乎处处要用到它，应要求学生在充分理解的基础上予以掌握. 教科书中的图 4－14 是帮助记忆的；还可以用口诀“全正、s 正、t 正、c 正”来记忆，此口诀表示正弦、余弦、正切这三种函数的值，“第一象限全正，第二象限只有 sin 正，第三象限只有 tan 正，第四象限只有 cos 正”，更可简化为“全、s、t、c”四字.

(5) 讲解第一组诱导公式前，可先举出实例. 例如，390°和－330°的角与 30°角的终边相同，所以它们的三角函数值也相同，即

$$\sin 390^\circ=\sin 30^\circ,\qquad \sin(-330^\circ)=\sin 30^\circ,$$
$$\cos 390^\circ=\cos 30^\circ,\qquad \cos(-330^\circ)=\cos 30^\circ,$$
$$\tan 390^\circ=\tan 30^\circ,\qquad \tan(-330^\circ)=\tan 30^\circ$$

等，然后再根据这三种三角函数的定义引出公式一，这样使学生更易于接受.

公式一的作用是：其一，可以把任意角的正弦、余弦、正切函数值，分别化为 0°到 360°的角的同一三角函数值（方法是先在 0°到 360°的范围内找出与它终边相同的角，再把它写成公式一的形式，然后得出结果）；其二，便于研究这三种三角函数的周期性（这将在本章的第 4.8 节中介绍）.

5. 例 1 是已知角 α 终边上一点的坐标，求角 α 的六个三角函数值，例 2 是求 0 到 2π 范围内某些特殊角的六个三角函数值，这两道例题都是为了巩固任意角三角函数的概念. 例 3、例 4 的目的都是为了使学生掌握正弦、余弦、正切这三个三角函数的值在各象限的符号，其中例 4 的结论以一个表示为不等式组的充要条件出现，学生过去未曾接触，在教学时要把命题的条件、结论、必要性、充分性讲清楚，这对进一步巩固充要条件的概念，以及利用这一概念训练数学语言的表述，都是有好处的. 例 5 是求三角函数值，由于还未学习更多的诱导公式，这里仅限于能运用公式一把求某些角的三角函数值转化为求锐角的三角函数值. 这类题目可以用计算器直接求出结果，本题的目的是掌握公式一，所以仍应要求学生运用公式一先转化成锐角三角函数值，然后再利用计算器等工具求出答案.

6. 本节有两组练习. 教科书中没有三角函数线的例题，所以本节的第一组练习务必在堂上进行，这样同时可以巩固单位圆的概念. 第二组练习的第 2 题可事先画在小黑板上要求学生在课堂上口答. 习题 4.3 是按照本节的正文和例题设计的：第 1 题是选择题，要求学生通过画图来确定正确答案；为了巩固特殊角的三角函数值与弧度概念，配置了第 4～6 题这样的计算题与化简题.

阅读材料　三角函数与欧拉

1. 本阅读材料的目的是贯彻大纲关于“教学中要注意阐明数学的产生和发展的历史，使学生了解国内外的古今数学成就”，“要陶冶学生的情操，培养学生勤于思考的习惯、坚韧不拔的意志和勇于创新的精神”等叙述，为学生提供一份生动、鲜明的数学史材料.

2. 欧拉一生对数学的发展作出了不可磨灭的贡献. 学生在高中二年级下学期学习“直线、平面、简单几何体”时，还要学到多面体的欧拉公式，并把“多面体欧拉定理的发现”作为研究性学习课题. 令人敬佩的是，他的许多成果是在他右眼失明以至双目失明后产生的，这与音乐大师贝多芬在失聪后创作出传世之作《命运交响曲》一样，成为人类史上的奇迹.

3. 本阅读材料标题为“三角函数与欧拉”，介绍了以下内容：(1) 三角学的由来及其研究范围；(2) 17 世纪前叶三角由瑞士人邓玉函传入中国，用“八线图”定义了八种三角函数；(3) 欧拉关于三角函数所作的贡献；(4) 欧拉坚韧不拔的意志和丰硕的研究成果，为后世留下了宝贵的精神财富.

4. 阅读材料应体现人文精神，读后使人有所感悟并为之振奋，应联系实际，并介绍有关历史. 本阅读材料的内容较为浅显，可安排学生自己阅读，并互相交流读后感.

4.4　同角三角函数的基本关系式

1. 本节根据三角函数的定义，导出了同角三角函数的三个基本关系式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$及 $\tan\alpha\cot\alpha=1$；初步接触了它们的两类基本应用，一是根据一个角的正弦、余弦、正切中的一个值求出其余两个值，或者根据正切、余切值中的一个求出另一个，二是进行化简与证明.

2. 通过本节的学习，要使学生掌握同角三角函数的这三个基本关系式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$及 $\tan\alpha\cot\alpha=1$，并会利用它们进行简单三角函数式的化简、求值及恒等式证明.

3. 本节的重点是公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 及$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ 的推导和下述应用：

(1) 已知某任意角的正弦、余弦、正切值中的一个，求出其余两个；

(2) 化简三角函数式；

(3) 证明简单的三角恒等式.

其中，根据角 α 终边所在象限求出其三角函数值，是本节的一个难点，它的结果不唯一，需要讨论. 正确运用平方根及象限角的概念，是解决这一难点的关键. 在证明恒等式时，判断哪一种格式较为简便并予以采用，是本节的另一个难点，为了解决这一难点，除了课堂上要讲清不同格式的各自特点之外，还应给予一定的训练，让学生自己去体会.

4. (1) 讲同角三角函数的基本关系式时，应突出“同角”两字，并提醒学生注意这些关系式都是对于使它们有意义的那些角而言的，以后遇到的关系式（包括已证的和待证的）也是这样. 解题时，如果没有特殊注明，一般都把关系式看成有意义的.

(2) $\sin^2\alpha$ 是 $(\sin\alpha)^2$ 的简写，读作"$\sin\alpha$ 的平方"，不能将 $\sin^2\alpha$ 写成 $\sin\alpha^2$，前者是 α 的正弦的平方，后者是 α 的平方的正弦，两者是不同的. 教学时应使学生弄清它们的区别，并能正确书写.

(3) 公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ 及 $\tan\alpha\cot\alpha=1$ 的应用极为广泛，要求学生牢固掌握，并能灵活运用. 灵活运用的一个标准是掌握这三个公式的标准形式；另一个标准则是掌握这三个公式的等价形式

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha, \qquad \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha,$$

$$\sin\alpha=\cos\alpha\tan\alpha, \qquad \cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha},$$

$$\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}, \qquad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha},$$

它们的应用也极为广泛.

5. 根据一个任意角的正弦、余弦、正切中的一个值求出其余两个值（可简称"知一求二"）时，要注意这个角所在的象限，从而出现一组或两组结果的情况：

(1) 如果已知正弦、余弦、正切中的一个具体数值，且角所在的象限也已指定，那么只有一组结果. 本节的例 1 就是指这种情况.

对于例 1，要告诉学生，$\tan\alpha=-\frac{4}{3}$中的负号来自 α 是第二象限角，这时 $\sin\alpha$ 取正值，$\cos\alpha$ 取负值，所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$也取负值. 有的学生会这样写，"因为 α 是第二象限角，所以 $\tan\alpha=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$"，这当然是错误的.

(2) 如果已知正弦、余弦、正切中的一个具体数值，但未指定角所在的象限，那么要按角所在的象限进行讨论，分别写出答案，这时一般有两组结果. 本节的例 2 就是指这种情况，两组是指 $-\frac{8}{17}$，$\frac{15}{17}$，$-\frac{15}{8}$及$-\frac{8}{17}$，$-\frac{15}{17}$，$\frac{15}{8}$.

(3) 如果已知的三角函数值是用字母给出的，且角所在的象限没有指定，那么角可能在四个象限，但我们可以把四个象限的角的三角函数值分成两组（每组为两个象限）去求，所以形式上一般仍有两组结果. 本节的例 3 就是指这种情况.

对于例 3，$\tan\alpha\neq0$ 的条件是必须有的；否则 α 的终边在 x 轴上，就不能在四个象限内求解，此时将有 $\sin\alpha=0$，而

$$\cos\alpha=\begin{cases}1, & \text{当}\ \alpha\ \text{的终边为}\ x\ \text{轴的非负半轴,}\\ -1, & \text{当}\ \alpha\ \text{的终边为}\ x\ \text{轴的非正半轴.}\end{cases}$$

另外，教科书上把 $\cos\alpha$、$\sin\alpha$ 的结果都用分情况叙述的形式表达出来，而没有采用

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, \qquad \sin\alpha=\pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \qquad ①$$

的书写形式，那是因为 $\cos\alpha$、$\sin\alpha$ 取正取负受着限制，不是无条件的，这不同于"由 $x^2=1$ 可以推出 $x=\pm1$"这种情形. 再说，采用了①式后，$\cos\alpha$、$\sin\alpha$ 的取值发生了"+、+""+、−""−、+""−、−"四种搭配方式，本题就会产生四种不同结果.

(4) 化简实际上是一种不指定答案的恒等变形，学生对于应该化简到什么程度，往往不清楚. 教学时，应通过例题反复说明，化简题一定要尽量化成最简形式. 本节的例 4 是化简 $\sqrt{1-\sin^2 440°}$，最后要

化到 $\cos 80^{\circ}$．由于 80° 角不是特殊角，一般无须求出其余弦值（实际上，写出的余弦值只是一个近似值，这不符合恒等变形的要求）．

（5）证明恒等式常用以下方法：从一边开始证明它等于另一边，一般由繁到简（如例 5 的证法 1）；证明另一个式子成立，从而推出原式成立，这“另一个式子”可考虑选取与原式等价的式子（如例 5 的证法 2、3）；证明左、右两边等于同一个式子．显然，第一种方法的依据是相等关系的传递性“$a=b$，$b=c$，则 $a=c$”；第三种方法的依据是“等于同量的两个量相等”即“$a=c$，$b=c$，则 $a=b$”，它可由相等关系的传递性及对称性“$a=b$，则 $b=a$”推出．

现在说说第二种方法，这种方法的依据是等价转化思想，即“$a=b$ 等价于 $c=d$，所以 $a=b$ 成立的充要条件是 $c=d$ 成立”．这样就产生了两种思维过程，并对应着两种证明方法．假设要证明的式子是 $a=b$，那么：

综合法：先证 $c=d$ 成立，再证 $c=d$ 与 $a=b$ 等价，由此可知 $a=b$ 成立（如例 5 的证法 2、3）．

分析法：要证 $a=b$，只要证（与它等价的）$c=d$．因为 $c=d$ 成立，可知 $a=b$ 成立．

注意，等价转化可以使用综合法或分析法；反过来，使用分析法或综合法时，却不一定要求等价转化．对于初学恒等式证明的学生，运用等价转化似乎能使他们的思路更清楚一些．

6．本节的练习和习题基本上是按照正文和例题配备的，要求学生模仿教科书上的解题格式去完成．注意，本章的教学时间较紧，教学中不要给学生补充同角三角函数的另外五个基本关系式作为例题或习题．

4.5　正弦、余弦的诱导公式

1．本节利用单位圆和三角函数的定义，导出了正弦、余弦的另外四组诱导公式（即 $180^{\circ}+\alpha$，$-\alpha$，$180^{\circ}-\alpha$，$360^{\circ}-\alpha$，分别称之为公式二、三、四、五），并通过运用这些公式，把任意角的正弦、余弦值分别转化为锐角的正弦、余弦值，从而渗透了把未知问题化归为已知问题的数学思想．

2．通过本节的学习，要使学生掌握正弦、余弦的诱导公式，能正确运用这些公式求任意角的正弦、余弦值，以及进行简单三角函数式的化简与恒等式证明；能通过公式的运用，了解未知到已知、复杂到简单的转化过程，提高分析和解决问题的能力．

3．本节的重点是四组诱导公式，以及这四组公式和第 4.3 节中的第一组诱导公式的综合运用．把这五组公式用一句话归纳出来，并切实理解这句话中每一词语的含义，是切实掌握这五组公式的难点所在．讲清每一组公式的意义及其中符号语言的特征，并且把公式二、三与图形对应起来，是突破上述难点的关键．

4．（1）讲诱导公式的目的之一是把求任意角的三角函数值转化为求锐角三角函数值．本节第一段已经隐含了这一目的．教学时，应该先把这个意思向学生作一交代．

（2）五组诱导公式中，公式二和公式三是最基本的．公式一只讲了正弦、余弦、正切三种函数，公式二至五只讲了正弦、余弦两种函数．事实上，其他的诱导公式都可以根据三角函数的定义，并利用正弦、余弦的诱导公式及同角三角函数的基本关系式逐步推得．因此教科书在本节只介绍了正弦、余弦的诱导公式．将来讲正切的差角公式及正切函数的周期性时，临时出现一下正切的有关诱导公式就可以了．教学时也应按此思路进行，不要在本节涉及其他的诱导公式．

在推导公式二和公式三时，要讲清“角 $180^{\circ}+\alpha$ 的终边就是角 α 的终边的反向延长线，角 $180^{\circ}+\alpha$ 的终边与单位圆的交点 P' 与点 P 关于原点 O 对称”以及 α 与 $-\alpha$“这两个角的终边关于 x 轴对称”．为了加深学生对这些结论的理解，除了教科书中图 4－15 和图 4－16 所表示的情况之外，还可以补画出角 α 的终边在其他象限的情况．在此基础上，分别复习关于 x 轴、y 轴、原点对称的两个点的坐标间的关系，然后