线性代数

主　编　孙　波　张丽春
副主编　李文钰　靳曼莉
主　审　杜忠复

科学出版社

线性代数

主　编　孙　波　张丽春
副主编　李文钰　靳曼莉
主　审　杜忠复

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书按照教育部对高校理工类本科"线性代数"课程的基本要求及考研大纲编写而成.本书注重数学概念的实际背景与几何直观的引入,强调数学建模的思想与方法,密切联系实际,精选许多实际应用的案例并配有相应的习题,还融入了 MATLAB 的简单应用及实例.

本书共 7 章,内容包括行列式、矩阵、线性方程组、特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换、线性代数实验及其实际生活应用,书末附有习题答案.

本书可供高等理工科院校各专业使用,也可供科技工作者阅读.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 孙波,张丽春主编. —北京：科学出版社，2016

ISBN 978-7-03-047821-4

Ⅰ.①线… Ⅱ.①孙… ②张… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 056144 号

责任编辑:石 悦 / 责任校对:桂伟利

责任印制:赵 博 / 封面设计:华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 3 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2016 年 3 月第一次印刷 印张：10 1/2

字数:212 000

定价：26.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

为适应我国高等教育发展的需要，我们根据理工类本科“线性代数”教学基本要求，总结多年教学经验编写了本书.

本书从实际例子出发，引出线性代数的一些基本概念、基本理论和方法；内容由简到难逐步展开，结构严谨，例题丰富，通俗易懂，难点分散，注重数学思想与数学文化的渗透.为了使线性代数教学适应现代化的需要，我们利用 MATLAB 作为软件增加了具有数学实验、数学模型嵌入的章节(第 7 章)，反映出现代科技对该课程是有影响的，而且这些内容能够使学生通过实验、观察和归纳，得出相应的线性代数的性质、定理，然后进行定理证明，让学生经历数学发现和创造的全过程.我们又增加了应用部分(前 5 章)，使得线性代数与相关数学分支可以有横向的联系.

本书可划分为 4 个层次.

第一层次：前三章是全书的基础、核心，它把中学中对单个数运算的讨论推进到数表间的类似计算问题.在这三章中，线性方程组的理论是核心的核心.一方面，它是中学数学与大学数学的连接点；另一方面，它是其他几章理论发展的推动力或生长点.认识到这一点，有利于启发学生由已知向未知转化，由个别向一般过渡，由形象向抽象的认识在思维层次上的提高.从而才有可能置学生于主动欲试的能动状态，形成师生双方面的积极性.

第二层次：第 4 章和第 5 章.主要内容有：特征值、特征向量，相似矩阵，对称矩阵的合同对角形(化二次型成标准形)、二次型的正交变换.核心内容是方阵的相似对角形问题.这部分知识有很强的几何上的和物理上的背景.因此，兼有数学上的较高层次的抽象性和其在物理学及诸多工程学科应用范围的广泛性、应用程度的深入性.

第三层次：第 6 章，是关于线性空间、线性变换的.这是高度抽象的，是思维形式的又一飞跃，对于学生理论素养的提高有重要意义.

第四层次：第 7 章是贯穿整部教材始终的关于应用的介绍.

目前传统的线性代数教学仍然是以理论为主导，偏重理论体系的完整性，过多强调证明和推导，再加上该课程本身所固有的抽象性和逻辑性，人工计算的烦琐，使得学生学起来有一定困难，学习兴趣不高，弱化了该门课程的计算功能，直接影响了学生在后续课程及工程问题中对线性代数知识的运用.为此，在掌握线性代数的基本方法的前提下，将计算机作为辅助工具引入教材，使用 MATLAB 数学软件，把线性代数中的一些理论、计算以及建模等通过数学实验方式得以实现.当然，线性代数的整个理论体系并不因此而有所改变，只是有些理论可以通过计算机来

验证，而且可以把大量的应用问题纳入课程的习题或作业中，加强它的工程背景，提高学生的科学计算能力、创新能力及理论与实践相结合的能力. 同时，也为学生今后应用该软件在工程、信息等领域进行计算、模拟等打下良好的基础. 让学生在感觉到学有所用的同时，强化学生的应用意识，培养学生的实践动手能力，进而加深学生对知识的掌握和理解，增强学生的学习兴趣.

本书系统、连贯地介绍了行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵、二次型、线性空间与线性变换、线性代数实验及其实际生活应用等内容. 考虑到不同学时、不同层次的教学需要，书中第 6、7 章为选学内容，不会影响教材的系统性.

本书具有以下特点：

亮点一：增加线性代数实验及其实际生活应用部分，对应于第 7 章，我们选取的实例多数源于生活，目的在于更好地激发学生学习线性代数的积极性.

亮点二：每章增加应用部分，分别为

(1)增加行列式在解析几何中的应用，见 1.5；

(2)矩阵问题的应用实例，见 2.1.3；

(3)线性方程组的应用实例，见 3.7；

(4)特征值与特征向量的应用实例，见 4.5；

(5)二次型的应用举例，见 5.4.

亮点三：本书的例题和习题的编写遵循难易适度的原则，每章均配有典型例题和习题，书后附有参考答案与提示. 注重化解抽象理论的难度，易教易学，可读性强，适合一般本科院校理工类专业使用. 编写过程中参考了近年来全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲，也适合其他类型高校线性代数学时较少的专业选用，并可作为相关专业师生的教学参考书. 难度循序渐进，由浅入深，适合学生自学和老师备课.

本书由北华大学数学与统计学院大学数学中心孙波、张丽春担任主编，李文钰，靳曼莉担任副主编，由孙波和张丽春定稿，杜忠复教授担任主审.

本书的编写分工为：第 1 章和第 2 章由孙波编写，第 3 章、第 4 章和第 7 章由张丽春编写，第 5 章由李文钰编写，第 6 章由靳曼莉编写.

在编写本书的过程中得到了许多同行的大力支持与帮助，引用了有关书籍的一些例题和习题，在此一并向他们表示衷心的感谢!

限于编者的水平与学识，疏漏及不当之处在所难免，恳切希望同行及读者给予批评指正.

编　者

2016 年 2 月 22 日于吉林

目　　录

第 1 章　行　列　式

行列式的概念是人们从求解线性方程组的需要中建立和发展起来的，而又远远超出求解线性方程组的范围，在求矩阵的秩、求矩阵的特征值、判断向量组的线性相关性、判断二次型的正定性等方面都有应用，成为线性代数重要的工具.

1.1　n 阶行列式

1.1.1　二阶与三阶行列式

行列式的概念起源于解线性方程组，因此我们首先讨论解方程组的问题.

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \tag{1.1}$$

用加减消元法容易求出未知量 x_1, x_2 的值，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，有

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}. \tag{1.2}$$

为了方便记忆，我们引进下面的符号来表示式(1.2)这个结果.

定义 1　我们称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

为二阶行列式.

它含有两行，两列. 横的称为行，纵的称为列. 行列式中的数 a_{ij} $(i=1,2; j=1,2)$ 称为行列式第 i 行，第 j 列的元素. 从式(1.3)知，二阶行列式是这样两项的代数和：一个是从左上角到右下角的对角线（又称行列式的主对角线）上两个元素的乘积，取正号；另一个是从右上角到左下角的对角线（又称次对角线）上两个元素的乘积，取负号.

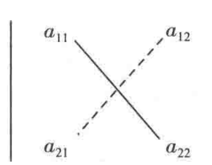

图 1.1

此为对角线法，如图 1.1 所示.

根据定义，易知式(1.2)中的两个分子可分别写成

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

其中，D_1 是将 D 中的第一列换成常数项得到的，D_2 是将 D 中的第二列换成常数项得到的. 则当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.1)的解(1.2)可以表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \tag{1.4}$$

这样将解用行列式来表示，形式简洁整齐，同时也便于记忆.

例 1　用二阶行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2=1 \\ x_1+3x_2=2 \end{cases}.$$

解　$D=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2\times 3-4\times 1=2\neq 0$,

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1\times 3-4\times 2=-5, D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times 2-1\times 1=3,$$

因此，方程组的解是 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=-\dfrac{5}{2}, x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{3}{2}$.

对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

作类似的讨论，我们引入三阶行列式的概念.

定义 2　我们称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.6}$$

为三阶行列式.

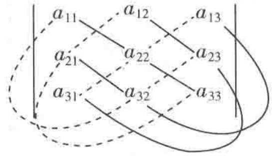

图 1.2

它有三行三列，是六项的代数和，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号. 其规律遵循图 1.2 所示的对角线法则：图中有三条实线看作平行于主对角线的联线，三条虚线看作平行于副对角线的联线，实线上三元素

的乘积冠正号,虚线上三元素的乘积冠负号.

令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

当 $D\neq 0$ 时,方程组(1.5)的解可简单地表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.7}$$

它的结构与前面二元一次方程组的解类似.

例 2 计算

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

解 $D=2\times3\times5+1\times1\times2+(-4)\times3\times2-2\times3\times2-1\times(-4)\times5-2\times3\times1$

$=30+2-24-12+20-6=10.$

例 3 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0 \\ 3x_1+2x_2-5x_3=1. \\ x_1+3x_2-2x_3=4 \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=28\neq 0,$

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=13,D_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=47,D_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=21.$$

所以,

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{13}{28},x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{47}{28},x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

例 4 已知

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

问 a,b 应满足什么条件？（其中 a,b 均为实数）.

解 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2+b^2$，若要 $a^2+b^2=0$，则 a 与 b 须同时等于零. 因此，当 $a=0$ 且 $b=0$ 时给定行列式等于零.

为了得到更为一般的线性方程组的求解公式，我们需要引入 n 阶行列式的概念，为此，先介绍排列的有关知识.

1.1.2　全排列及其逆序数

在引入 n 阶行列式的定义前，先介绍排列的一些基本知识.

定义 3　由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

例如，1234 是一个 4 级排列，4312 也是一个 4 级排列，而 45231 是一个 5 级排列. 由数码 1,2,3 组成的所有 3 级排列为 123,132,213,231,312,321，共有 $3!=6$ 个.

数字由小到大的 n 级排列 $1234\cdots n$ 称为自然排列，也称为 n 级标准排列.

定义 4　在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 的前面（$i_s<i_t$），则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序，一个 n 级排列中逆序的总数，称为这个排列的逆序数，记作 $t(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如，在 4 级排列 3412 中，31,32,41,42 各构成一个逆序数，所以，排列 3412 的逆序数为 $t(3412)=4$. 同样可计算排列 52341 的逆序数为 $t(52341)=7$.

容易看出，自然排列的逆序数为 0.

定义 5　如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数 $t(i_1i_2\cdots i_n)$ 是奇数，则称此排列为奇排列，逆序数是偶数的排列则称为偶排列.

例如，排列 3412 是偶排列. 排列 52341 是奇排列. 自然排列 $123\cdots n$ 是偶排列.

定义 6　在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果其中某两个数 i_s 与 i_t 对调位置，其余各数位置不变，就得到另一个新的 n 级排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这样的手续称为一个对换，记作 (i_s,i_t).

如在排列 3412 中，将 4 与 2 对换，得到新的排列 3214. 并且我们看到：偶排列 3412 经过 4 与 2 的对换后，变成了奇排列 3214. 反之，也可以说奇排列 3214 经过 2 与 4 的对换后，变成了偶排列 3412.

一般地，有以下定理：

定理 1　任一排列经过一次对换后，其奇偶性改变.

证　(1)相邻位置元素的对换. 设

$$a_1\cdots a_l pqb_1\cdots b_m \xrightarrow{(p,q)} a_1\cdots a_l qpb_1\cdots b_m.$$

显然,$a_1\cdots a_l$,$b_1\cdots b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变,而 p,q 两个元素的逆序改变为:当 $p<q$ 时,经对换后 p 的逆序数增加 1 而 q 的逆序数不变而 q 的逆序数减少 1.所以排列 $a_1\cdots a_l pqb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l qpb_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

(2)任意位置元素的对换.设

$$a_1\cdots a_l pc_1\cdots c_m qb_1\cdots b_k \xrightarrow{(p,q)} a_1\cdots a_l qc_1\cdots c_m pb_1\cdots b_k.$$

该对换可以分解成:

先作 $m+1$ 次相邻元素的对换:$a_1\cdots a_l c_1\cdots c_m qpb_1\cdots b_k$;

再作 m 次相邻元素的对换:$a_1\cdots a_l qc_1\cdots c_m pb_1\cdots b_k$.

共 $2m+1$ 次相邻位置对换,由(1)知,两个排列的奇偶性不同.

推论 奇排列变成自然排列的对换次数为奇数,偶排列变成自然排列的对换次数为偶数.

定理 2 在所有的 n 级排列中($n\geqslant 2$),奇排列与偶排列的个数相等,各为 $\frac{n!}{2}$个.

1.1.3 n 阶行列式

本节我们从观察二阶、三阶行列式的特征入手.引出 n 阶行列式的定义.

已知二阶与三阶行列式分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

其中元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表示这个元素位于第 i 行,称为行标,第二个下标 j 表示此元素位于第 j 列,称为列标.

我们可以从中发现以下规律:

(1)二阶行列式是 2! 项的代数和,三阶行列式是 3! 项的代数和;

(2)二阶行列式中每一项是两个元素的乘积,它们分别取自不同的行和不同的列,三阶行列式中的每一项是三个元素的乘积,它们也是取自不同的行和不同的列;

(3)每一项的符号是:当这一项中元素的行标是按自然排列时,如果元素的列标为偶排列,则取正号;为奇排列,则取负号.

作为二、三阶行列式的推广我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 7　由排成 n 行 n 列的 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 它是 $n!$ 项的代数和,每一项是取自不同行和不同列的 n 个元素的乘积,各项的符号是:每一项中各元素的行标排成自然排列,如果列标的排列为偶排列时,则取正号;为奇排列时,则取负号. 于是得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{1.8}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.

式(1.8)称为 n 阶行列式按行标自然顺序排列的展开式. $(-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的一般项.

当 $n=2$、3 时,这样定义的二阶、三阶行列式与上面 1.1.1 中用对角线法则定义的是一致的. 当 $n=1$ 时,一阶行列式为 $|a_{11}|=a_{11}$.

当 $n=4$ 时,四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 表示 $4!=24$ 项的代数和,因为取自不同行、不同列 4 个元素的乘积恰为 $4!$ 项. 根据 n 阶行列式的定义,四阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_4} (-1)^{t(j_1j_2j_3j_4)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

例如,$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 行标排列为 1234,元素取自不同的行;列标排列为 4312,元素取自不同的列,因为 $t(4312)=5$,所以该项取负号,即 $-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 是上述行列式中的一项.

为了熟悉 n 阶行列式的定义,我们来看下面几个问题.

例 5 在五阶行列式中，$a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$这一项应取什么符号？

解 这一项各元素的行标是按自然顺序排列的，而列标的排列为 23514. 因 $t(23514)=4$，故这一项应取正号.

例 6 写出四阶行列式中，带负号且包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解 包含因子 $a_{11}a_{23}$ 项的一般形式为 $(-1)^{t(13j_3j_4)}a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}$，按定义，$j_3$ 可取 2 或 4，j_4 可取 4 或 2，因此包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项只能是 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 或 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$. 但因 $t(1324)=1$ 为奇数，$t(1342)=2$ 为偶数. 所以，此项只能是 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$.

例 7 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & e & f \\ u & v & g & h \end{vmatrix}.$$

解 这是一个四阶行列式，按行列式的定义，它应有 $4!=24$ 项. 但只有以下四项 $adeh$，$adfg$，$bceh$，$bcfg$ 不为零. 与这四项相对应的列标的 4 级排列分别为 1234，1243，2134 和 2143，而 $t(1234)=0$，$t(1243)=1$，$t(2134)=1$ 和 $t(2143)=2$，所以第一项和第四项应取正号，第二项和第三项应取负号，即

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & e & f \\ u & v & g & h \end{vmatrix}=adeh-adfg-bceh+bcfg.$$

例 8 计算上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

解 由于当 $j<i$ 时，$a_{ij}=0$，故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip_i}，其下标应有 $p_i\geqslant i$，即 $p_1\geqslant 1,p_2\geqslant 2,\cdots,p_n\geqslant n$.

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个自然排序 $12\cdots n$，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，此项的符号 $(-1)^t=(-1)^0=1$. 所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可求得下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上(下)三角形行列式及对角形行列式的值,均等于主对角线上元素的乘积.

例 9 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 这个行列式除了 $a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$ 这一项外,其余项均为零,现在来看这一项的符号,列标的 n 级排列为

$$n(n-1)\cdots 21,\ t(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n\cdot(n-1)}{2},$$

所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

同理可计算出

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

由行列式的定义,行列式中的每一项都是取自不同的行不同的列的 n 个元素的乘积,所以可得出:如果行列式有一行(列)的元素全为 0,则该行列式等于 0.

在 n 阶行列式中,为了决定每一项的正负号,我们把 n 个元素的行标排成自然

排列，即 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 事实上，数的乘法是满足交换律的，因而这 n 个元素的次序是可以任意写的，一般地，n 阶行列式的项可以写成 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$，其中 $i_1i_2\cdots i_n$，$j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 阶排列，它的符号由下面的定理来决定.

定理 3 n 阶行列式也定义为

$$D=\sum(-1)^S a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中 S 为行标与列标排列逆序数之和，即

$$S=t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n).$$

推论 n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

1.2 行列式的性质

当行列式的阶数较高时，直接利用定义计算 n 阶行列式的值是困难的，本节将介绍行列式的性质，以便用这些性质将复杂的行列式转化为较简单的行列式（如上三角形行列式等）来计算.

将行列式 D 的行列互换后得到的行列式称为行列式 D 的转置行列式，记作 D^{T}，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{则 } D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

反之，行列式 D 也是行列式 D^{T} 的转置行列式，即行列式 D 与行列式 D^{T} 互为转置行列式.

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 的值相等.

说明 由此性质可知，行列式中的行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的，对列也同样成立，反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式变号.

例 10 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 9 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & -5 & 7 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$