



标准化训练与教学

(修订版)

高中代数

第三册

编写组顾问 崔孟明

徐望根 邹优教 王念亲 编

中国环境科学出版社

标准化训练与教学

(修订版)

高中代数 第三册

编写组顾问 崔孟明

中国环境科学出版社

1988

内 容 简 介

本书根据教学大纲要求和教育改革精神编写，与目前的高中代数第三册配套使用。内容包括排列、组合、二项式定理、数列的极限、函数的极限、导数和微分及其应用。每单元有重点知识分析、解题方法指导、标准化训练题及课外阅读参考等项内容，以配合教学加强“双基”训练。

本书可供高中师生参考，亦可作为自学青年的参考读物。

标准化训练与教学

(修订版)

高中代数 第三册

编写组顾问 瞿孟明

徐望根 邹优教 王念亲 编

中国环境科学出版社出版

北京崇文区东兴隆街69号

北京顺义燕华营印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1988年10月第一版 开本 787×1092 1/32

1988年10月第一次印刷 印张 7 1/4

印数 1—78,150 字数 138千字

NSBN 7-80010-304-8/G·089

定价：2.30元

前 言

《标准化训练与教学》出版了。出版这套书，是为了在改善当前中学的教与学方面尽我们的一点微薄力量。受片面追求升学率的影响，现在教学上“灌”的量大而乱，“灌”的方法又僵死，“题海”无边，作业多，考试繁，学生负担过重，“双基”（基本知识，基本技能）反而削弱，教师和学生能力都得不到提高。这样下去，不利于国家的现代化建设，不利于学生德、智、体诸方面发展，不利于出人才。要改善这种状况，就要端正教与学的指导思想，除建立适宜的教学计划，切实改革教育、教学和考试方法外，针对“题海”弊端，建立一套加强基础，引导学生认识基本知识结构，提高学生运用“双基”能力的训练题目，也是很重要的。这肯定是中学教学改革的重要方面，这套书就是这方面的一种尝试。它突出知识结构（包括知识的纵的和横的关系等诸方面），并根据知识的规律划分出单元，作出“重点知识分析”。这就从联系和对比等角度指出了基本概念、基本理论、基本计算、基本事实以及它们的一些基本关系，就把握住了各段知识的“双基”训练，并指导了学生的学习方法。为了把知识结构与训练相结合，本书备有“解题方法指导”，

着重指导“解题思路”。这就突出了思维的基本训练，使学生排除“就题论题”，注意培养“双基”运用的基本思路及程序。

这套书根据“双基”要求，编有“标准化训练题”，朝着“科学化”、“标准化”的方向改革。这套书指的标准化则是更广义的，它的主要内容是：

1. 训练的依据是教学大纲的要求，体现教学计划；
2. 训练的内容与所学“双基”诸内容具有对应性，可检查基本知识，又检查学生分析问题和解决问题的能力；
3. 训练的覆盖面大，涉及到教学的所有主要部分，而且往往带有各部分知识的交叉，综合和对比；
4. 训练的难度适当；
5. 训练题目的表达语和指导语要标准规范，尽量明确无误；
6. 训练的方式、题型较多，包括最佳答案选择型、因果选择型、多解选择题、配伍选择题、组合选择题、比较选择题、填空选择题、是非判断题、程序性选择题以及规范性的填空简答题、计算题、改错题等。有正面、侧面、反面不同角度的训练等等。

平时进行这种“标准化题”的训练可以比较好地把住基本的教学要求，又能减轻学生的负担，并方便师生教学上的反馈、控制、自我测试，达到提高教学质量的目的。

这套书由北京景山学校校长、特级教师崔孟明为编写组顾问，编著者大多是第一线有经验的教师，部分是教学研究

人员。他们在教学改革中，特别是在落实“双基”和学生训练上有较丰富的实践。有些教师在“知识结构单元”的教法上卓有成效，有些教师在落实“双基”的训练程序上取得成绩。这套书中有许多标准化训练题就是从他们的训练实践中经过测试和科学比较筛选出来的。他们从实践中认识到片面追求升学率不但违背教学规律，而且建立在“猜题压题”的不可靠的基础上。平时抓住“双基”，搞“结构化”，抓住“标准训练”则负担轻、质量高，不但可以符合国家的要求，而且能面向大多数学生，减轻学生过重的负担。实践证明，平时能这样教学，升学不用突击，考试成绩也是好的。可喜的是，当前升学考试也进行科学化、标准化的改革，和教学规律一致起来。当然，由于这套书的整理比较仓促，所以难免出现不足和错误。我们诚恳地希望广大师生和社会青年读者多提宝贵意见，并跟我们一起进行学生训练的改革，提高教学质量。

编写组

目 录

第一章 排列、组合、二项式定理	(1)
第一单元 排列与组合	(1)
〔重点知识分析〕	(1)
〔解题方法指导〕	(17)
〔标准化训练题〕	(30)
〔课外阅读参考〕	(45)
第二单元 二项式定理	(51)
〔重点知识分析〕	(51)
〔解题方法指导〕	(63)
〔标准化训练题〕	(73)
〔课外阅读参考〕	(81)
第二章 极限	(89)
第一单元 数列的极限	(89)
〔重点知识分析〕	(89)
〔解题方法指导〕	(105)
〔标准化训练题〕	(114)
〔课外阅读参考〕	(122)
第二单元 函数的极限	(127)
〔重点知识分析〕	(127)

〔解题方法指导〕 (148)

〔标准化训练题〕 (157)

〔课外阅读参考〕 (163)

第三章 导数和微分及其应用 (170)

〔重点知识分析〕 (170)

〔解题方法指导〕 (202)

〔标准化训练题〕 (210)

〔课外阅读参考〕 (217)

第一章 排列、组合、二项式定理

第一单元 排列与组合

〔重点知识分析〕

一、主要内容及其关系见第3页方框图

二、重点分析

1. 两个基本原理的分析如下:

加法原理 做一件事，完成它可以有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种方法，在第二类办法中有 m_2 种方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种方法，那么完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同的方法。

乘法原理 做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种方法，做第二步有 m_2 种方法，……，做第 n 步有 m_n 种方法，那么完成这件事共有

$$N = m_1 m_2 \cdots m_n$$

种不同的方法。

(1) 加法原理与乘法原理的地位和作用

加法原理与乘法原理是这一单元的理论基础，是导出排列数公式、组合数公式的理论依据，是分析排列、组合应用题的基本方法。它贯穿这个单元的始终。学好这两个原理，是学好这个单元知识的前提条件和基本保证。

(2) 加法原理与乘法原理的实质

要弄清楚什么是加法原理，什么是乘法原理，必须明确如下几个问题：

1) “一件事”的含义

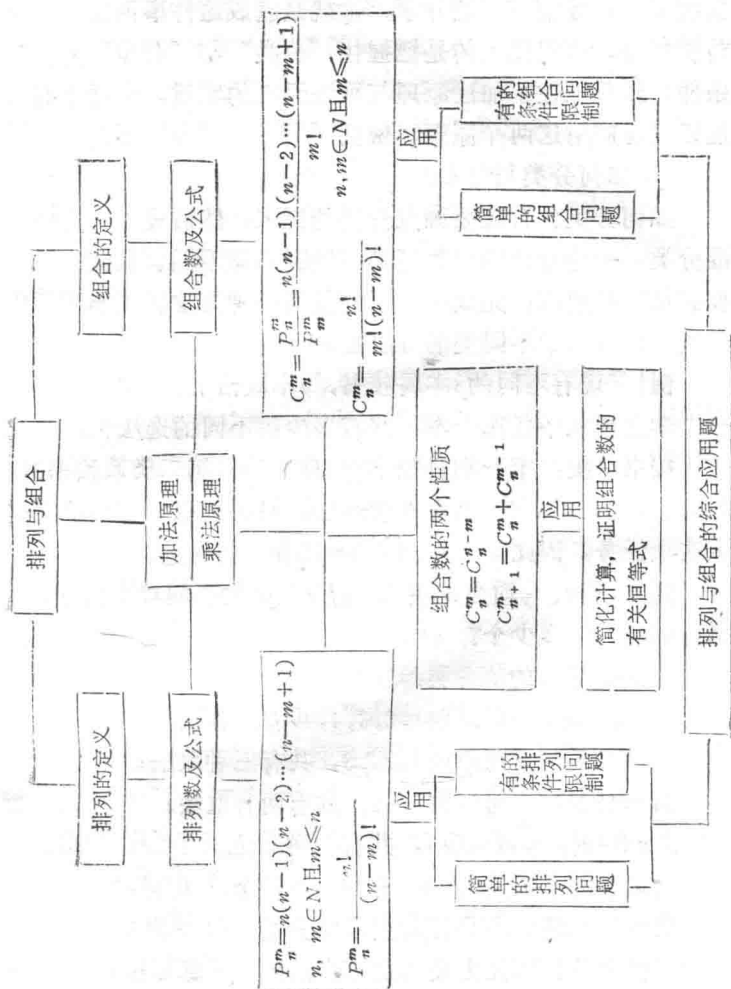
加法原理与乘法原理都是研究完成“一件事”的所有不同方法的种数。这里的“一件事”是一个抽象的概念，有着广泛的含义，例如：从甲地到乙地；从5位同学中选举2位代表；7个人站成一排照相；从5本不同的数学书和3本不同的语文书中选取1本作为奖品等等，都是“一件事”。

2) “分类”与“分步”

加法原理中“做一件事，完成它可以有 n 类办法”，这里说的是“分类”；乘法原理中“做一件事，完成它需要分成 n 个步骤”，这里说的是“分步”。搞清楚为什么“分类”，为什么“分步”，才能“类”、“步”分明。

什么情况下可以分类？选用任何一种方法都能独立地完成这件事，这就是完成这件事所有方法可以分类的前提条件。

什么情况下可以分步？选用任何一种方法都不能独立地完成这件事，必须在每一个步骤中任意选取一种方法，逐步



依次完成，才能完成这件事，这就是完成这件事需要分步的前提条件。值得提出的是把握住“分类”与“分步”的前提条件，就是抓住了加法原理与乘法原理的实质。这样才有可能正确地应用这两个原理，做到“类”、“步”不混。

3) 如何分类与分步？

如何分类？首先要确定分类的标准，然后根据确定的标准分类。一个合理的分类还必须做到不重不漏。具体来说，要满足下列要求：完成这件事的任何一种方法必须属于其中一类，而且属于不同类的方法是不同的。

例1 现有不同的3本科技书，4本政治书，5本文艺书，一个学生要从中任选一本，共有多少种不同的选法？

按书分类：第一类科技书有3种选法；第二类政治书有4种选法；第三类文艺书有5种选法，只要选取一本书就完成了这项任务，因此共有 $3+4+5=12$ 种不同的选法。

例2 若 x 、 y 均为正整数，且 $x+y \leq 5$ ，问以 (x, y) 为坐标的点共有多少个？

按横坐标 x 的值分类：

当 x 取1时， y 可以取1, 2, 3, 4，共有四种取法；

当 x 取2时， y 可以取1, 2, 3，共有三种取法；

当 x 取3时， y 可以取1, 2，共有两种取法；

当 x 取4时， y 可以取1，共有一种取法。

所求点的个数共有 $4+3+2+1=10$ 个。

显然，上述分类是符合要求的分类。

如何分步？首先也要确定分步的标准，然后根据确定的

标准分步。一个合理的分步还必须做到不重不漏。具体来说，必须满足下列要求：必须依次完成所有步骤才能完成这件事；一个步骤选用的方法与别的步骤选用的方法无关，并且每一步骤的完成的方法种数正好是完成这个步骤的所有方法的种数。

例3 现有不同的3本科技书，4本政治书，5本文艺书，一个学生要从中选一本科技书，一本政治书，一本文艺书，共有多少种不同的选法？

按书的种类分步：第一步选科技书，第二步选政治书，第三步选文艺书。那么科技书有3种选法，政治书有4种选法，文艺书有5种选法。每两次选到的三本书中，只要不完全相同，就是不同的选法，所以共有 $3 \times 4 \times 5 = 60$ 种不同的选法。

例4 若 x 、 y 均为正整数，且 $1 \leq x \leq 4$ ， $2 \leq y \leq 6$ ，问以 (x, y) 为坐标的点共有多少个？

按坐标分步：第一步取横坐标 x ，有4种取法，第二步取纵坐标 y ，有5种取法，所求的个数共有 $4 \times 5 = 20$ 个。

显然，上述分步是符合要求的分步。

在解决实际问题时，往往既要分类又要分步才能解决问题。

例5 从3个男生，4个女生中选3位代表，其中至少有一个女生，共有几种选法？

按女生代表的人数分类，则有1个女生代表，2个女生代表，3个女生代表三类，而每一类又可分两步完成，首先选

取女生代表，再选取男生代表。即

选1个女生，2个男生，有 $C_4^1 C_6^2$ 种选法；

选2个女生，1个男生，有 $C_4^2 C_6^1$ 种选法；

选3个女生，0个男生，有 C_4^3 种选法。

于是共有 $C_4^1 C_6^2 + C_4^2 C_6^1 + C_4^3 = 12 + 18 + 4 = 34$ 种选法。

2. 排列与组合概念的分析

排列与组合的概念如下：

从 n 个不同元素中，任取 m ($m \leq n$) 个元素（本章只研究被取出的元素各不相同的情况），按照一定的顺序排列成一行，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。

从 n 个不同元素中，任取 m ($m \leq n$) 个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合。

排列与组合的概念是这一单元的核心。要注意弄清几个区别：

（1）排列与组合的区别

从 n 个不同元素中，任取 m ($m \leq n$) 个元素，若把这 m 个元素，按照一定顺序排成一行，就是从 n 个元素中取出 m 个元素的一个排列；若把这 m 个元素，不管顺序并成一组，就是从 n 个元素中取出 m 个元素的一个组合。亦即排列与元素的顺序有关，组合与元素的顺序无关。这就是排列与组合这两个概念的区别，是我们判断一个问题是排列问题还是组合问题的主要依据。由此得到：两个不同的排列可以是元素不同的排列或者是元素相同但顺序不同的排列；而两个不同

的组合，只能是元素不全相同的组合。

例如：

1) 4个同学两两握手，共握几次手？两两互赠照片，共送几张照片？

分析：甲与乙握手和乙与甲握手相同，即两两握手与顺序无关，这是一个组合问题，共握 $C_4^2=6$ 次手。甲送乙照片和乙送甲照片不同，即两两互赠照片与顺序有关，这是一个排列问题，共送 $P_4^2=12$ 张照片。

2) 4个学生，两两互通一次电话，共通几次电话？两两互通一封信，共通几封信？

分析：甲与乙通话和乙与甲通话相同，即两两通话与顺序无关，这是一个组合问题，共通话 $C_4^2=6$ 次。甲给乙写信和乙给甲写信不同，即两两通信与顺序有关，这是一个排列问题，共通信 $P_4^2=12$ 封。

3) 从4本不同的书中选取3本送给一位同学，有多少种给法？从4本不同书中选取3本分给三个同学每人一本，有多少种送法？

分析：选出三本书送给一位同学，与这三本书的顺序无关，是一个组合问题，共有 C_4^3 种给法。选出三本书分给三个同学，每人一本，有各种不同的给法，与这三本书的顺序有关，是一个排列问题，共有 P_4^3 种给法。

(2) 排列与排列数的区别

所谓一个排列，就是从 n 个不同元素中，取出 m 个元素，按照一定顺序排成一行。它指的是一种排法，不是一个数。

所谓排列数就是从 n 个不同元素中，取出 m 个元素的所有排列的个数，它是一个数。例如从 a 、 b 、 c 三个字母中，每次取出2个字母，按照一定顺序排成一行，共有 ab 、 ba 、 ac 、 ca 、 bc 、 cb ，其中每一行都是一个排列，而所有排列的种数是6，就是排列数。又如从四个字母 a 、 b 、 c 、 d 中取出三个字母的所有排列是 abc 、 abd 、 acd 、 acb 、 adb 、 adc 、 bcd 、 bdc 、 bac 、 bca 、 bad 、 bda 、 cab 、 cba 、 cbd 、 cdb 、 cad 、 cda 、 dab 、 dba 、 dac 、 dca 、 dbc 、 dcb 。而从四个字母 a 、 b 、 c 、 d 中取出三个字母的排列数是 $P_4^3=24$ 。

(3) 组合与组合数的区别

所谓一个组合就是从 n 个不同元素中，取出 m 个元素，不管顺序并成一组。它指的是一种组法，不是一个数。所谓组合数，就是从 n 个元素中，取出 m 个元素的所有组合的个数，它是一个数。例如从 a 、 b 、 c 三个字母中，每次取出2个字母并成一组，共有 ab 、 ac 、 bc ，其中的每一组都是一个组合，而所有组合的个数是3，就是一个组合数。又如从 a 、 b 、 c 、 d 四个字母中取出三个字母的所有组合是 abc 、 abd 、 acd 、 bcd ，而所有组合的个数是 $C_4^3=4$ 。

3. 排列数公式与组合数公式

(1) 排列数公式的导出

排列数公式导出的依据是乘法原理。从 n 个不同元素中，任取 m 个元素，按照一定顺序排成一行。按元素的位置分成 m 步：

第一步：从 n 个元素中任取一个元素放在第一个位置上，

共有 n 种取法。

第二步：从余下的 $(n-1)$ 个元素中，任取一个元素放在第二个位置上，共有 $(n-1)$ 种取法。

第三步：从余下的 $(n-2)$ 个元素中，任取一个元素放在第三个位置上，共有 $(n-2)$ 种取法。

.....

第 m 步：从余下的 $[n-(m-1)]$ 个元素中，任取一个元素放在第 m 个位置上，共有 $(n-m+1)$ 种取法。

从 n 个不同元素中，任取 m 个元素的所有排列的种数记为 P_n^m ，根据乘法原理得到：

$$P_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)$$

这就是排列数公式。

(2) 排列数公式的特点

在明确排列数公式是根据乘法原理导出的基础上，再来分析一下排列数公式的一些特点，这对于掌握此公式是很有意义的。

排列数公式的主要特点是：

1) m 个连续自然数的乘积；

2) 最大因数是 n ，最小因数是 $(n-m+1)$ 。

问：分别写出排列数 P_{n+2}^{m-3} 和 P_{k-1}^{k-1} 的乘积式。

答： $P_{n+2}^{m-3} = (n+2)(n+1)n(n-1) \cdots [(n+2) - (m-3) + 1]$
 $= (n+2)(n+1) \cdots (n-m+6),$