北大燕园

2016年 李正元·范培华

考研数学④

数学历年试题解析

数学一

主编 北京大学 李正元
北京大学 尤承业
北京大学 范培华

中国政法大学出版社

2016年李正元·范培华考研数学④

数学

数学一

历年试题解析

主编 北京大学 李正元
北京大学 尤承业
北京大学 范培华

中国政法大学出版社
2015·北京

图书在版编目(CIP)数据

李正元·范培华考研数学．数学历年试题解析．数学一/李正元，尤承业，范培华主编．—北京：中国政法大学出版社，2015. 1

ISBN 978-7-5620-5830-4

Ⅰ.①李…　Ⅱ.①李…　②尤…　③范…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 309738 号

出版者　中国政法大学出版社
地　址　北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址　北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088
网　址　http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　话　010－58908285(总编室)　58908433(编辑部)　58908334(邮购部)
承　印　北京旺都印务有限公司
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　25.25
字　数　656 千字
版　次　2015 年 1 月第 1 版
印　次　2015 年 1 月第 1 次印刷
定　价　39.80 元

前　　言

（一）

对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学招生考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

（二）

本书汇集了 2001 年 ~2015 年全国硕士研究生招生统考数学一试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，提醒考生引以为戒。

本书把历年考研数学一试题依据考试大纲的顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该内容考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而能让广大考生掌握考研数学试题的广度和深度，并

在复习时能明确目标，做到心中有数。同时把历年同一内容的试题放在一起，能让广大考生抓住近几年考题与往年考题的某种特殊联系（类似或雷同），并且能清楚地查出哪些知识点还未命题考查。另外，为了帮助考数学一的考生更全更好地了解相关内容的命题情况，**本书精选了数学二、三以及原数学四相关内容的典型考题（含解答），同时也精选了 1998 年（含）以前数学一相关内容的典型考题（含解答）**，供将要备考数学一的考生参考并复习之用。因此本书这种独特编排体例有助于广大考生科学备考。

综述——每种题型后部归纳总结该题型解题思路、方法和技巧，并举例说明。

（三）

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关要求，接着去认真阅读有关教材和参考书（推荐考生认真阅读由中国政法大学出版社出版的《**考研数学复习全书（数学一）**》，该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细，各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位，与考研命题思路较吻合），复习完后，再来看本书的试题，以检验自己的水平。在看本书试题时，应该先自己动手做题，然后将自己所得的结果与本书的解法加以比较，看哪些自己做对了，哪些自己做错了，为什么会做错，可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做 2 ~ 3 遍，直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝广大考生复习顺利，考研成功！

编者

2015 年 1 月

目　录

第一篇　2015 年考研数学一试题及答案与解析

第二篇　2001 ~ 2014 年考研数学一试题

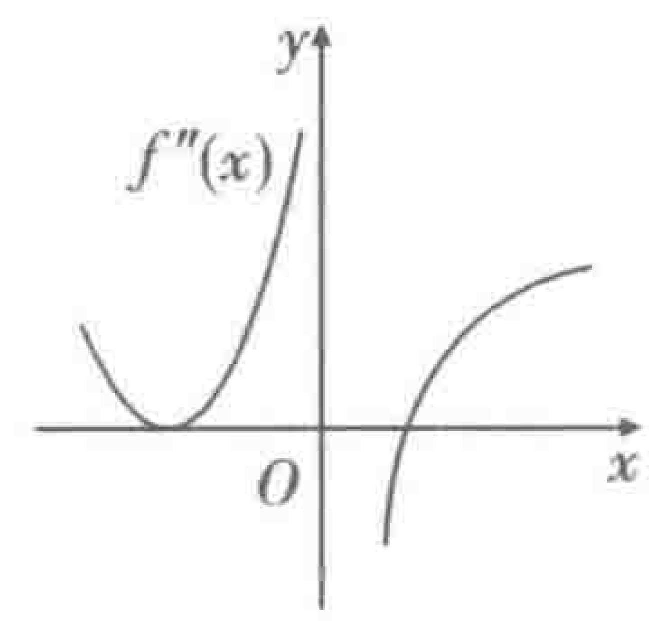
第三篇　2001 ~ 2014 年考研数学一试题分类解析

第一篇　2015年考研数学一试题及答案与解析

2015年考研数学一试题

一、选择题:1 ~ 8小题,每小题4分,共32分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,其2阶导函数$f''(x)$的图形如图所示,则曲线$y=f(x)$的拐点的个数为



(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3　　【　】

(2) 设$y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^x$是二阶常系数非齐次线性微分方程$y''+ay'+by=ce^x$的一个特解,则

(A) $a=-3,b=2,c=-1$　　(B) $a=3,b=2,c=-1$

(C) $a=-3,b=2,c=1$　　(D) $a=3,b=2,c=1$　　【　】

(3) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛,则$x=\sqrt{3}$与$x=3$依次为幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$的

(A) 收敛点,收敛点　　(B) 收敛点,发散点

(C) 发散点,收敛点　　(D) 发散点,发散点　　【　】

(4) 设D是第一象限中由曲线$2xy=1$,$4xy=1$与直线$y=x$,$y=\sqrt{3}x$围成的平面区域,函数$f(x,y)$在D上连续,则$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=$

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr$　　(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,dr$　　(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,dr$　　【　】

(5) 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\d\\d^2\end{bmatrix}$,若集合$\Omega=\{1,2\}$,则线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解的充分必要条件为

(A) $a\notin\Omega,d\notin\Omega$　　(B) $a\notin\Omega,d\in\Omega$

(C) $a\in\Omega,d\notin\Omega$　　(D) $a\in\Omega,d\in\Omega$　　【　】

(6) 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$下的标准形为$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,其中$\boldsymbol{P}=(e_1,e_2,e_3)$,若$\boldsymbol{Q}=(e_1,-e_3,e_2)$,则$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$下的标准形为

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$　(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$　(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$【　】

(7) 若A,B为任意两个随机事件,则

(A) $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$　　(B) $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$

(C) $P(AB) \leqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$　　(D) $P(AB) \geqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$　【　】

(8) 设随机变量 X,Y 不相关，且 $EX=2, EY=1, DX=3$，则 $E[X(X+Y-2)]=$

(A) -3　(B) 3　(C) -5　(D) 5　【　】

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$ ________．

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=$ ________．

(11) 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^z+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $\mathrm{d}z|_{(0,1)}=$ ________．

(12) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ ________．

(13) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}=$ ________．

(14) 设二维随机变量 (x,y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=$ ________．

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x, g(x)=kx^3$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值．

(16)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0\in I$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式．

(17)（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 $C:x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数．

(18)（本题满分 10 分）

(Ⅰ) 设函数 $u(x),v(x)$ 可导，利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

(Ⅱ) 设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式．

(19)（本题满分 10 分）

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x, \end{cases}$ 起点为 $A(0,\sqrt{2},0)$，终点为 $B(0,-\sqrt{2},0)$，计算曲线积分 $I=\int_L(y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z$．

(20)（本题满分 11 分）

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 内 R^3 的一个基，$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ) 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 R^3 的一个基；

(Ⅱ) 当 k 为何值时，存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同，并求所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

(21)(**本题满分 11 分**)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{bmatrix}$相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$.

(Ⅰ)求 a,b 的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

(22)(**本题满分 11 分**)

设随机变量 X 的概率密度为$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

对 X 进行独立重复的观测,直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止.记 Y 为观测次数.

(Ⅰ)求 Y 的概率分布;(Ⅱ)求 $\boldsymbol{E}Y$.

(23)(**本题满分 11 分**)

设总体 X 的概率密度为:$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

其中 θ 为未知参数,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(Ⅰ)求 θ 的矩估计量.(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量.

2015 年考研数学一试题答案与解析

一、选择题

(1)**【分析】** $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$连续,除 $x=0$ 外处处二阶可导.可能是 $y=f(x)$ 的拐点的是 $f''(x)=0$ 的点及$f''(x)$ 不存在的点.

$f''(x)$ 的零点有二个,其中一个它的两侧 $f''(x)$ 变号,对应于 $y=f(x)$ 的拐点.另一个它的两侧 $f''(x)$ 恒正,对应的点不是 $y=f(x)$ 的拐点.

$x=0$,虽 $f''(0)$ 不存在,但 $x=0$ 两侧 $f''(x)$ 变号,因而$(0,f(0))$是 $y=f(x)$ 的拐点.

因此共有两个拐点.选(C).

---

(2)**【分析】** 由特解 $y=\dfrac{1}{2}e^{2x}-\dfrac{1}{3}e^{x}+xe^{x}$ 知,该二阶线性方程的特征根为 $\lambda_1=2,\lambda_2=1$,特征方程为$(\lambda-2)(\lambda-1)=0$,即 $\lambda^2-3\lambda+2=0$,又原方程的特征方程为 $\lambda^2+a\lambda+b=0$,于是

$$a=-3,b=2$$

现将特解 $y=xe^x$ 代入得

$$(xe^x)''-3(xe^x)'+2xe^x=(x+2)e^x-3(x+1)e^x+2xe^x=-e^x=ce^x$$

$\Rightarrow\quad c=-1$.因此选(A).

---

(3)**【分析】** 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nt^n$ 的收敛半径 $R=1$(若 $R<1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nt^n\Big|_{t=1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,若 $R>1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nt^n\Big|_{t=1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,均矛盾)$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nt^n=t\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_nt^n)'=t\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nt^{n-1}$ 的收敛半径 $R=1$(逐项求导不改变收敛半径)

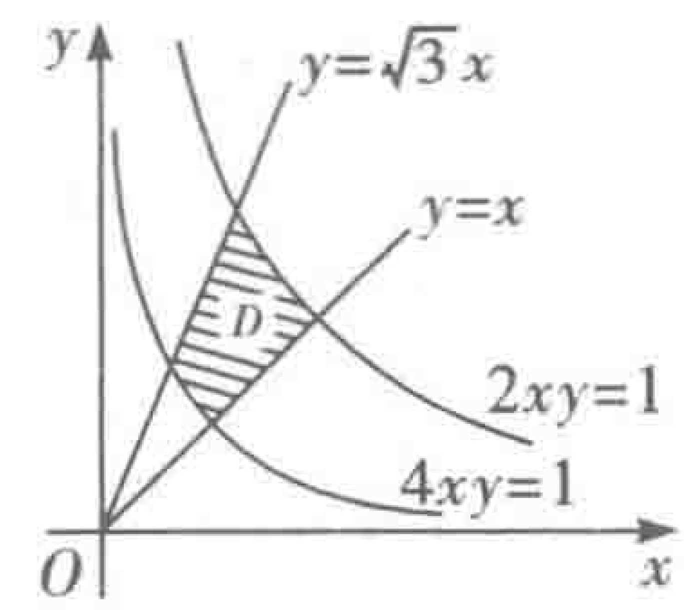
由幂级数收敛性特点 $\Rightarrow$

当 $x=\sqrt{3}$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(\sqrt{3}-1)^n$ 绝对收敛$(0<\sqrt{3}-1<1)$

当 $x=3$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(3-1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n2^n$ 发散$(2>1)$.因此选(B).

---

(4)【分析】 区域 D 如右图. 作极坐标变换,将 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为累次积分(先 r 后 θ 的积分顺序).



D 的边界线的极坐标方程

$$2xy=1 \text{ 是 } 2r^2\cos\theta\sin\theta=1, r=\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}$$

$$4xy=1 \text{ 是 } 4r^2\cos\theta\sin\theta=1, r=\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}$$

$$y=x \text{ 是 } \theta=\frac{\pi}{4}$$

$$y=\sqrt{3}x \text{ 是 } \theta=\frac{\pi}{3}$$

于是 D 的极坐标表示是

$$\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}, \frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}$$

因此 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$. 选(B).

---

(5) 【分析】 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<3$.

$|\boldsymbol{A}|$ 是一个范得蒙行列式,值为 $(a-1)(a-2)$. 如果 $a\notin\Omega$,则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$. 此时 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解,(A),(B) 排除.

类似地,如果 $\mathrm{d}\notin\Omega$,则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=3$,(C) 排除.

当 a,d 都属于 Ω 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$. $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解. 选(D).

---

(6)【分析】 设二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$,

说明 $\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量,特征值依次为 2,1, -1,于是 $-\mathrm{e}_3$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量,特征值也是 -1. 因此

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

从而正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 下,化得标准二次型为 $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$. 选(A).

---

(7)【分析】 由于事件 $A\supset AB, B\supset AB$,

故有 $P(A)\geqslant P(AB), P(B)\geqslant P(AB), P(A)+P(B)\geqslant 2P(AB), P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

所以应选(C).

---

(8)【分析】 由于 X,Y 不相关,故有 $\boldsymbol{E}XY=\boldsymbol{E}X\boldsymbol{E}Y$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}[X(X+Y-2)]&=\boldsymbol{E}(X^2+XY-2X)=\boldsymbol{E}X^2+\boldsymbol{E}(XY)-2\boldsymbol{E}X\\&=\boldsymbol{D}X+(\boldsymbol{E}X)^2+\boldsymbol{E}X\boldsymbol{E}Y-2\boldsymbol{E}X=3+2^2+2-4=5.\end{aligned}$$

正确选项为(D).

二、填空题

(9)【分析一】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

【分析二】 用等价无穷小因子替换:

$$\ln\cos x=\ln[1+(\cos x-1)]\sim\cos x-1\,(x\to 0),$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

(10)【分析】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx=0+x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$

(11)【分析】 先求 $z(0,1)$. 在原方程中令 $x=0,y=1$ 得 $e^z+1=2,\Rightarrow z(0,1)=0$ 下求 $dz\big|_{(0,1)}$.

解法一 将方程两边求全微分得 $e^z dz+yzdx+xzdy+xydz+dx-\sin xdx=0$
令 $x=0,y=1,z=0$ 得 $dz\big|_{(0,1)}+dx=0$, $dz\big|_{(0,1)}=-dx$.

解法二 将方程两边分别对 x,y 求偏导数得

$$e^z\frac{\partial z}{\partial x}+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}+1-\sin x=0$$

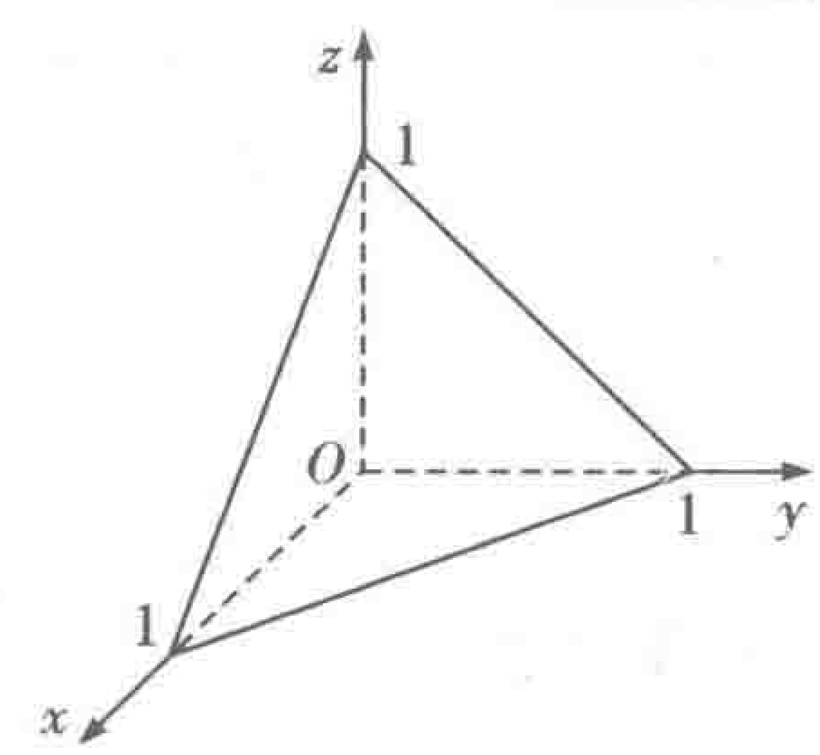
$$e^z\frac{\partial z}{\partial y}+xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

令 $x=0,y=1,z=0$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}=-1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}=0$$

因此 $dz\big|_{(0,1)}=-dx$.

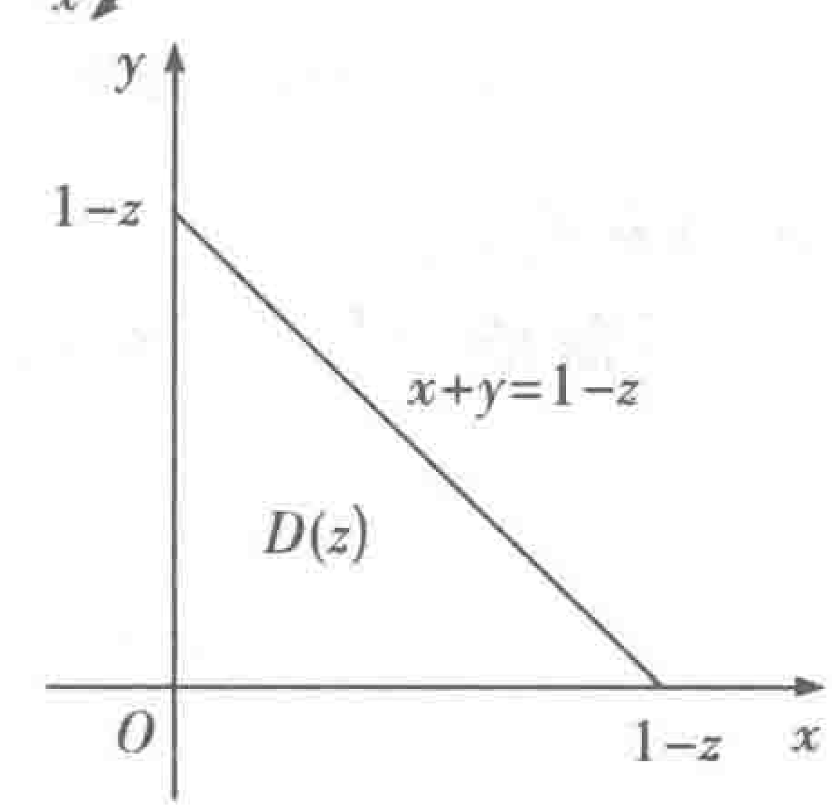
(12)【分析】 由变量的轮换对称性,



$$\iiint_\Omega xdV=\iiint_\Omega ydV=\iiint_\Omega zdz.$$

$$\Rightarrow\qquad I=\iiint_\Omega(x+2y+3z)dV=6\iiint_\Omega zdV.$$

【解法一】 $\Omega:0\leqslant z\leqslant1,(x,y)\in D(z)$, $D(z)$ 是过 z 轴上 $[0,1]$ 中任一点 z 作垂直于 z 轴的平面截 Ω 所得平面区域,它是直角三角形,直角边长分别是 $1-z$,面积是 $\frac{1}{2}(1-z)^2$.



$$\iiint_\Omega zdV=\int_0^1dz\iint_{D(z)}zdxdy=\int_0^1\frac{1}{2}(1-z)^2zdz$$

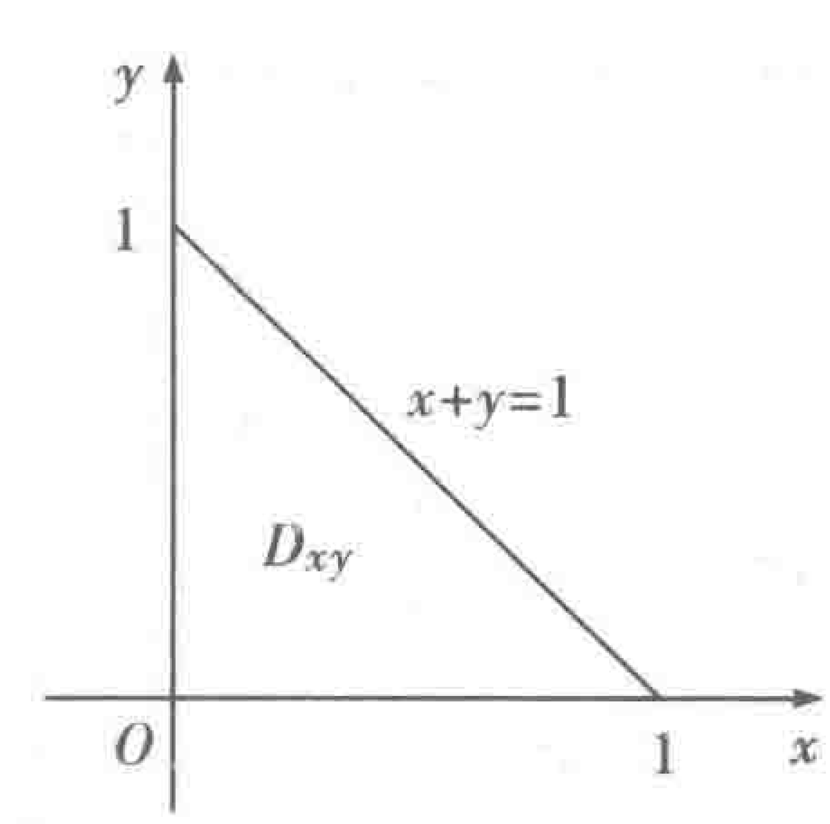
$$=\frac{-1}{6}\int_0^1zd(1-z)^3=\frac{1}{6}\int_0^1(1-z)^3dz$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{-1}{4}(1-z)^4\Big|_0^1=\frac{1}{24}$$

因此 $I=6\times\frac{1}{24}=\frac{1}{4}$.

【解法二】 $\Omega:0\leqslant z\leqslant1-x-y,(x,y)\in D_{xy}$,

$$D_{xy}=\{(x,y)\mid0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1-x\}$$



于是 $$\iiint_\Omega zdV=\iint_{D_{xy}}\left(\int_0^{1-x-y}zdz\right)dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}(1-x-y)^2dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2dy=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{-1}{3}(1-x-y)^3\Big|_0^{1-x}dx$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3dx=\frac{1}{24}.$$

因此 $I=6\times\frac{1}{24}=\frac{1}{4}$.

(13)【分析】 **方法一** 思路:用递推法. 将此行列式记为 D_n. 对第 n 行展开 $D_n=(-1)A_{nn-1}+2A_{nn}=M_{nn-1}+2^n$,而 $M_{nn-1}=D_{n-1}$,得到递推公式

$$D_n = D_{n-1} + 2^n.\text{（对任何大于 1 的 } n \text{ 都成立）}$$

于是 $D_n = D_{n-1} + 2^n = D_{n-2} + 2^{n-1} + 2^n = \cdots = D_1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$.

方法二 思路：用第 3 类初等行变换，把第 1 行消到只剩最右边一个非零元素：做法如下：第 1 行加第 2 行的 2 倍，加第 3 行的 4 倍，…，加第 n 行的 2^{n-1} 倍，使得第 1 行成为 $0,0,0,\cdots,0,a$，其中 $a = 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$. 再对第 1 行展开，得 $D = 2^{n+1} - 2$.

方法三 思路：对第 n 列展开，得行列式的值为

$$D = \sum_{i=1}^{n} 2A_{in} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} 2M_{in},$$

容易看出 $M_{in} = 2^{i-1}(-1)^{n-i}$，代入上式得 $D = \sum\limits_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2$.

评注 还有多种思路，如对第 1 行展开得递推公式 $D_n = 2D_{n-1} + 2$；用第 3 类初等行变换，化原行列式为上三角行列式（做法为自上而下，把各行的 1/2 倍加到下一行上．于是消去了所有对角线下的 -1）；用第 3 类初等行变换，消去第 1 行到第 $n-1$ 行上的对角线元素 2（做法为自下而上，把各行的 2 倍加到上一行上）等．这些方法都涉及到一个比较复杂的数列的求值问题，不如上面 3 个方法好．

---

(14)**【分析】** 由 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，可知 $X \sim N(1,1)$，$X - 1 \sim N(0,1)$，$Y \sim N(0,1)$ 且 X,Y 相互独立，$X-1$ 与 Y 也相互独立，故有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}\{XY - Y < 0\} &= \boldsymbol{P}\{(X-1)Y < 0\} = \boldsymbol{P}\{X - 1 < 0, Y > 0\} + \boldsymbol{P}\{X - 1 > 0, Y < 0\} \\ &= \boldsymbol{P}\{X - 1 < 0\} \cdot \boldsymbol{P}\{Y > 0\} + \boldsymbol{P}\{X - 1 > 0\}\boldsymbol{P}\{Y < 0\} \\ &= 2\Phi(0) \cdot \Phi(0) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

三、解答题

(15)**【分析与求解】** 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x + a\ln(1+x) + bx\sin x}{kx^3} = 1$

求出参数 a,b 及 k.

【解法一】 用泰勒公式．已知

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad (x \to 0)$$

$$x\sin x = x(x + o(x^2)) = x^2 + o(x^3) \quad (x \to 0)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = x + a\ln(1+x) + bx\sin x = x + ax - \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{3}ax^3 + bx^2 + o(x^3)$$

$$= (a+1)x + \left(b - \frac{1}{2}a\right)x^2 + \frac{1}{3}ax^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \quad a + 1 = 0, b - \frac{a}{2} = 0, \text{即 } a = -1, b = -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{kx^3} = -\frac{1}{3k} = 1$$

$$\Rightarrow \quad k = -\frac{1}{3}$$

因此 $a = -1, b = -\dfrac{1}{2}, k = -\dfrac{1}{3}$.

【解法二】 用洛必达法则（为简化计算注意某些技巧）．

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{x + a\ln(1+x) + bx\sin x}{kx^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1 + \frac{a}{1+x} + b\sin x + bx\cos x}{3kx^2}$$

由分子的极限必须为零(否则该极限 I 为 ∞) 得 $a=-1$. 代入得

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}+b\sin x+bx}{3kx^2}+\lim_{x\to 0}\frac{bx(\cos x-1)}{3kx^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}+b\cos x+b}{6kx}+0$$

再由分子极限必须为零得 $b=-\frac{1}{2}$,代入得

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{2}(\cos x+1)}{6kx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2}{(1+x)^3}+\frac{1}{2}\sin x}{6k}=-\frac{1}{3k}=1$$

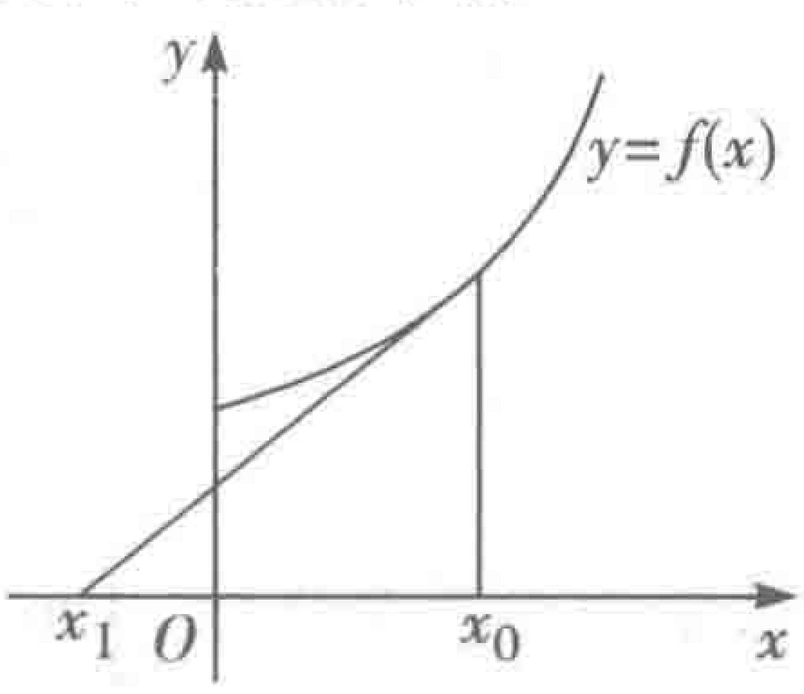
$\Rightarrow\ k=-\frac{1}{3}$.

因此 $a=-1, b=-\frac{1}{2}, k=-\frac{1}{3}$.

---

(16)**【分析与求解】** 这是微分方程的应用题,由导数的几何意义列出微分方程,然后求解.

由条件知,在含 $x=0$ 的某区间 I 上,曲线 $y=f(x)>0, f'(x)>0$,曲线上任意点$(x_0, f(x_0))$处的切线 L 的方程是



$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

令 $y=0$ 得 L 与 x 轴交点的 x 坐标 x_1,

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

于是切线 L 与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域(直角三角形)的面积

$$S=\frac{1}{2}f(x_0)(x_0-x_1)=\frac{1}{2}\frac{f^2(x_0)}{f'(x_0)}$$

按题意得$\frac{1}{2}\frac{f^2(x_0)}{f'(x_0)}=4$

将 x_0 改为 x, $f(x)$ 记为 $y(x)$,于是得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{8}y^2$.

分离变量得$\frac{8\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}x$,积分得

$$\frac{8}{y}=c-x,\quad y=\frac{8}{c-x}.$$

再由初值 $y(0)=2\Rightarrow c=4$. 因此求得 $f(x)$ 表达式

$$f(x)=\frac{8}{4-x}.$$

---

(17)**【分析与求解】** $f(x,y)$ 在 $\forall$ 给定点(x,y)处的方向导数随方向而变动,其中沿 $f(x,y)$ 在点(x,y)处的梯度方向取最大值 $|\mathrm{grad}\,f(x,y)|$,于是 $f(x,y)$ 在点(x,y)处的方向导数的最大值是

$$|\mathrm{grad}\,f(x,y)|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$$

求 $f(x,y)$ 在曲线 $C:\varphi(x,y)\xlongequal{\text{记}}x^2+y^2+xy-3=0$ 上的最大方向导数就是求 $|\mathrm{grad}\,f(x,y)|=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的最大值,等价于求 $g(x,y)\xlongequal{\text{记}}(1+x)^2+(1+y)^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的最大值.

用拉格朗日乘子法. 令

$$F(x,y,\lambda)=g(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=(1+x)^2+(1+y)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2(1+x)+\lambda(2x+y)=0 & ①\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2(1+y)+\lambda(2y+x)=0 & ②\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2+xy-3=0 & ③\end{cases}$$

①,② 两式相减得 $x=y$ 或 $\lambda=-2$. 由 $x=y$ 及 ③ 得 $x=y=1, x=y=-1$, 由 $\lambda=-2$ 得 $x+y=1$ 代入 ③ 得 $x^2-x-2=0$ 即 $x=2$ 或 $x=-1$. 于是得四个驻点

$$(1,1),(-1,-1),(2,-1),(-1,2)$$

相应的 $\sqrt{g(1,1)}=\sqrt{8}, \sqrt{g(-1,-1)}=0, \sqrt{g(2,-1)}=3, \sqrt{g(-1,2)}=3$

实际问题存在最大值,必在某驻点中取到,计算表明 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数是 3.

---

(18)【分析与求解】

(Ⅰ) $[u(x)v(x)]' \xlongequal{\text{导数定义}} \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$

$$\xlongequal[\text{同一项}]{\text{加减}} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)+u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}$$

$$\xlongequal[\text{运算法则}]{\text{求极限四则}} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)+u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$\xlongequal[\text{可导}]{u(x),v(x)} u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

其中因可导必连续, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x)$.

(Ⅱ) 反复用两个函数乘积的求导公式:

$$\begin{aligned}&[u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)]'\\ =&[u_1(x)(u_2(x)\cdots u_n(x))]'\\ =&u'_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)(u_2(x)\cdots u_n(x))'\\ =&u'_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u'_2(x)u_3(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2(x)(u_3(x)\cdots u_n(x))'\\ =&u'_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u'_2(x)u_3(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2(x)u'_3(x)\cdots u_n(x)+\cdots\\ &+u_1(x)u_2(x)\cdots u'_n(x).\end{aligned}$$

---

(19)【分析与求解一】 易写出 L 的参数方程:由

$$\begin{cases}z=\sqrt{2-x^2-y^2}\\ z=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+\dfrac{y^2}{2}=1\\ z=x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\sqrt{2}\cos t,\\ z=\sin t\end{cases}$$

起点 A 对应 $t=0$, 终点 B 对应 $t=\pi, t\in[0,\pi]$.

先用曲线方程简化被积表达式得

$$I=\int_L(y+x)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}x+(2-z^2)\mathrm{d}z=\int_L y\mathrm{d}x+\int_L x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(2-z^2)\mathrm{d}z$$

其中

$$\int_L x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(2-z^2)\mathrm{d}z=\int_L\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+2z-\frac{1}{3}z^3\right)$$

$$=\left[\frac{1}{2}(x^2+y^2)+2z-\frac{1}{3}z^3\right]\Bigg|_{(0,\sqrt{2},0)}^{(0,-\sqrt{2},0)}=0$$

$$\int_L y\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\cos^2 t\mathrm{d}t=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=2\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

因此 $I=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

【分析与求解二】 同前用 L 的方程简化被积表达式后得

$$I=\int_L(y+x)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(2-z^2)\mathrm{d}z$$

L 不封闭,添加辅助线 $L_1:x=0,y=t(-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}),z=0$($y$ 轴上 B 到 A 的连线)

$$\int_{L_1}(y+x)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(2-z^2)\mathrm{d}z=\int_{L_1}y\mathrm{d}y=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}t\mathrm{d}t=0$$

平面 $z=x$ 上 L 与 L_1 围成部分记为 Σ,按右手法则 Σ 的法向量朝下,方向余弦

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$$

现用斯托克斯公式

$$I=\int_{L\cup L_1}(y+x)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(2-z^2)\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y+x & y & 2-z^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_\Sigma\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y+x & y & 2-z^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S[0+0-(-1)]\mathrm{d}S=\frac{S_0}{\sqrt{2}}$$

S_0 是 Σ 的面积. 曲线 L 在 xy 平面的投影曲线是 $\begin{cases}x^2+\dfrac{y^2}{2}=1,\\ x\geqslant 0\end{cases}$ Σ 在 xy 平面上的投影面积 $\sigma_0=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\pi$,

又 $S_0\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sigma_0,S_0=\sqrt{2}\sigma_0=\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\pi=\pi$.

因此 $I=\dfrac{S_0}{\sqrt{2}}=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

---

(20)【解】(Ⅰ)就是要证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关,即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$.

矩阵 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 2k & 0 & k+1\end{bmatrix}$,

矩阵 $\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 2k & 0 & k+1\end{bmatrix}$ 的行列式等于 4,它可逆,因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$.

(Ⅱ)矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 2k & 0 & k+1\end{bmatrix}$ 就是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵,则

$\boldsymbol{\xi}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标都是 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,即 $\boldsymbol{C}(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,
也就是 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 是齐次方程组 $(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的非零解.

$$\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2k & 0 & k\end{bmatrix},$$

则 $(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}|=0$.

求出 $|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}|=-k$,得 $k=0$.

此时 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$,

解得 $(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的通解为:$c(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,于是在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下坐标相同的非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 的一般形式为:$c(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3),c\neq 0$.

(21)【解】 （Ⅰ）因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似，所以 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$，并且 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，得

$$\begin{cases}3+a=2+b,\\2a-3=b,\end{cases}$$

解得 $a=4,b=5$.

（Ⅱ）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&5&0\\0&3&1\end{bmatrix}$,

$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-1)^2(\lambda-5)$，$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 1,1,5．$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{A}$ 的特征值也是 1,1,5．

求 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的特征向量：

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-1&2&-3\\-1&2&-3\\1&-2&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 和 $x_1-2x_2+3x_3=0$ 同解，求得两个无关的特征向量 $(2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 和 $(3,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

求 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 5 的特征向量：

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-5&2&-3\\-1&-2&-3\\1&-2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 和 $\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$ 同解，

求得一个特征向量 $(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

构造矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&0&1\\0&-1&-1\end{bmatrix},\text{则 }\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}.$$

---

(22)【解】 设单次试验 $X>3$ 的概率为 p，则

$$p=P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln2\,\mathrm{d}x=-2^{-x}\Big|_3^{+\infty}=\frac{1}{8}$$

$$q=1-p=\frac{7}{8}.$$

（Ⅰ）Y 的概率分布为

$$P\{Y=k\}=\mathrm{C}_{k-1}^1p^2q^{k-2}=(k-1)p^2(1-p)^{k-2}=\frac{k-1}{64}\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2},k=2,3,\cdots.$$

（Ⅱ） $$EY=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\cdot\frac{1}{64}\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}=\frac{1}{64}\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)q^{k-2}=\frac{1}{64}\left(\sum_{k=2}^{\infty}q^k\right)''=\frac{1}{64}\left(\sum_{k=0}^{\infty}q^k\right)''$$

$$=\frac{1}{64}\left(\frac{1}{1-q}\right)''=\frac{1}{64}\,\frac{2}{(1-q)^3}=\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{p^3}=16.$$

---

(23)（Ⅰ） $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_\theta^1x\cdot\frac{1}{1-\theta}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-\theta}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_\theta^1=\frac{1+\theta}{2}$

又 $EX=\overline{X}$

故 $\dfrac{1+\hat{\theta}}{2}=\overline{X}$，$\theta$ 的矩估计量 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1=\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-1$.

（Ⅱ）对于总体 X 的样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，其似然函数为

$L(\theta)=\dfrac{1}{(1-\theta)^n},\theta\leqslant x_i\leqslant1,\quad \ln L(\theta)=-n\ln(1-\theta),\quad \dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{n}{1-\theta}>0,\theta\leqslant x_i\leqslant1.$

由于 $L(\theta)$ 是 θ 的单调增函数，因此 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，最大似然估计量 $\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.