国家高职骨干院校重点专业建设教材

工程数学

张　毅　阮杰昌　邵文凯　主编

科学出版社

国家高职骨干院校重点专业建设教材

工程数学

主编 张 毅 阮杰昌 邵文凯

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书按照最新的职业教育理论要求，在打破传统的教材编排系统的基础上，遵从学科的知识逻辑编写而成. 本书由八个教学情景构成，其先后顺序就是学习微积分的知识递进，每一学习情景列出学习目标和学习方法，有利于学生自学；以实际背景引入教学概念，有利于学生体会数学思想来源于生活与生产实际这一概念，既解决了专业和生活中常见的计算问题，又照顾了数学学科循序渐进的知识逻辑体系.

本书可作为高职高专机电一体化及相关专业学生的教材用书，也可作为其他相关专业数学教育工作者的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

工程数学/张毅，阮杰昌，邵文凯主编. —北京：科学出版社，2015

国家高职骨干院校重点专业建设教材

ISBN 978-7-03-042907-0

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①张… ②阮… ③邵… Ⅲ. ①工程数学-高等职业教育-教材 Ⅳ. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 000369 号

责任编辑：李淑丽/责任校对：桂伟利

责任印制：霍 兵/封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 1 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2015 年 1 月第一次印刷 印张：8

字数：189 000

定价：23.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

本书基于《国务院关于加快发展现代职业教育的决定》(国发〔2014〕19号)的具体内涵作为指导思想,遵从"坚持以立德树人为根本,以服务发展为宗旨,以促进就业为导向"的原则,以提高职业技能和培养职业精神高度融合为目的,结合作者多年教学实践经验与兄弟院校的先进做法编写而成,具有以下特点。

(1)既打破传统的教材编排体系,又遵从学科的知识逻辑。本书由八个教学情景构成,其先后顺序就是学习微积分的知识递进,这样既解决了专业和生活中常见的计算问题,又照顾了数学学科循序渐进的知识逻辑体系。

(2)编排结构科学合理,体现以学生为主体。每一学习情景列出学习目标和学习方法,利于学生自学;以实际背景引入数学概念,利于学生体会数学思想来源于生活与生产实际。

(3)与传授知识相比较,更注重综合能力的培养。使学生在系统获得知识的同时,也能比较系统地提高能力,体现知识教学与能力训练的统一;重视培养学生运用数学的意识,通过典型例题,列出多种计算方法,择优而取,使学生既能牢固掌握知识,又能学到探求知识的思想方法和手段。

(4)强调理论联系实际,增强应用性。可让学生体会到"数学就在身边"、"专业知识的分析必须靠数学",力图做到语言流畅、简练,便于学生在做中学。

(5)引入数学的人文知识,便于了解全世界的数学发展历程,体会知识无国界,拓展学生的视野;让学生在学习的过程中知道所学知识的文化背景,提高文化的综合素养。

本书由张毅、阮杰昌、邵文凯任主编,李应、何向婷、李琰任副主编,张德刚、王晓平、任建英、刘少雄、周雪艳、聂跃波参加编写。在全书的编辑出版过程中,借鉴了兄弟院校先进的教学理念和科学的实际案例,得到了科学出版社和责任编辑的大力帮助与支持,收获了许多宝贵的意见和建议,在此一并致谢。

鉴于作者水平有限,书中难免出现些不妥之处,敬请读者与同行批评指正。

编　者

2014年8月

目　　录

学习情景一　刀具的角度计算

第一部分　学习任务分解

学习领域	数学核心能力应用
学习目标	利用几何知识解决机床加工过程中刀具角度和零件尺寸的计算
学习重点	(1)刀具角度的计算； (2)零件尺寸的计算
学习难点	(1)将实际问题转化为几何问题； (2)几何知识的综合运用； (3)三角函数的计算； (4)具体的数学算法
学习思路	简化实际问题的冗杂内容—用更简洁的方式表达—转化为数学语言—构建数学问题—用几何、数学知识解决问题
数学工具	三角形、三角函数、圆、弧线、近似计算
教学方法	讲授法、案例教学、情景教学法、讨论法、启发式
学时安排	建议学时 6～10

第二部分　情 景 学 习

1　铰刀前角的测量

例 1　如图 1-1 所示，铰刀前角 γ 直接测量并不容易，在实际中，用游标卡尺测量出铰刀中心距台面的距离 a、刀齿前刀面与台面的距离 b，再测量出铰刀的直径 d，则铰刀前角的计算公式为

$$\sin\gamma = \frac{2(a-b)}{d}$$

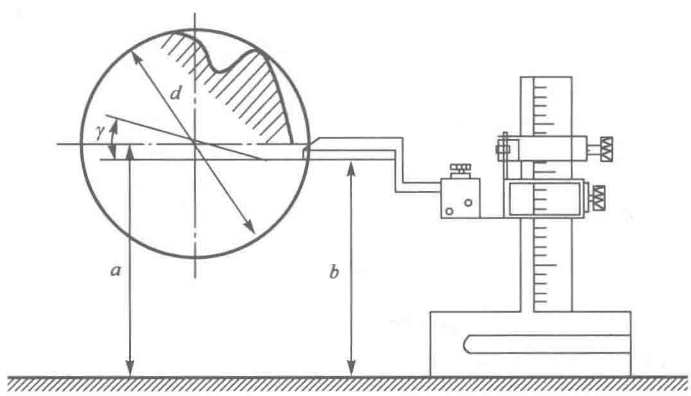

图 1-1

分析　建立铰刀角度测量的数学图形，如图 1-2 所示.

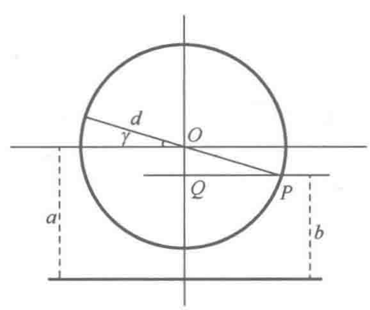

图 1-2

铰刀前角 γ 是一个直角三角形中的锐角，已知给出了锐角的对边和斜边，故可以由直角三角形正弦函数的定义求得此角.

解　在 $\mathrm{Rt}\triangle OPQ$ 中，$\angle OPQ$ 即铰刀前角 γ，直角边 $OQ = a-b$，斜边 OP 为圆的半径 $\dfrac{d}{2}$，于是由正弦函数的定义可得

$$\sin\gamma = \frac{OQ}{OP}$$
$$= \frac{a-b}{\frac{d}{2}} = \frac{2(a-b)}{d}$$

即

$$\sin\gamma = \frac{2(a-b)}{d}$$

2　用钢球测量圆锥体的斜角

例 2　用两个直径不同的钢珠测量圆锥体的斜角，先把小钢珠倒入锥孔中(图 1-3).

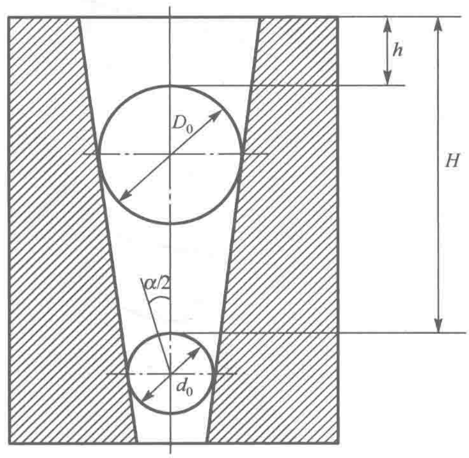

图 1-3

用深度千分尺或游标卡尺量出高度 H，然后将大钢球放入并测量出 h，试写出锥孔斜角 α 的计算公式.

分析　画出实际问题所对应的数学图形(图 1-4).

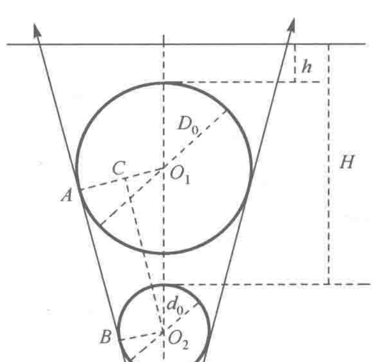

图 1-4

从图 1-4 中可以看出，过小圆的圆心作直线 AB 的平行线 O_2C，则 $O_1C \perp O_2C$，$\angle O_1O_2C$ 即所求的斜角 $\frac{\alpha}{2}$.

解　O_1，O_2 分别是大小圆的圆心，A，B 分别是左侧直线与两圆相切的切点，则

$$O_1A \perp AB$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle O_1O_2C$ 中，有

$$CO_1 = \frac{D_0 - d_0}{2}$$

$$\begin{aligned} O_1O_2 &= H - h - \frac{D_0}{2} + \frac{d_0}{2} \\ &= (H-h) - \left(\frac{D_0 - d_0}{2}\right) \end{aligned}$$

由三角函数的定义可知：

$$\begin{aligned} \sin\frac{\alpha}{2} &= \sin\angle O_1O_2C = \frac{CO_1}{O_1O_2} \\ &= \frac{\frac{D_0 - d_0}{2}}{H - h - \left(\frac{D_0 - d_0}{2}\right)} \\ &= \frac{D_0 - d_0}{2(H-h) - (D_0 - d_0)} \end{aligned}$$

3　钢珠测量圆柱体直径

例 3　直径较大的圆柱形工件，其准确直径不易量得. 因为大尺寸量具较少，且测量时量具不易放正. 如果采用下面的方法，则可方便地量得比较准确的尺寸. 测量时，将工件放在平板上，如图 1-5 所示.

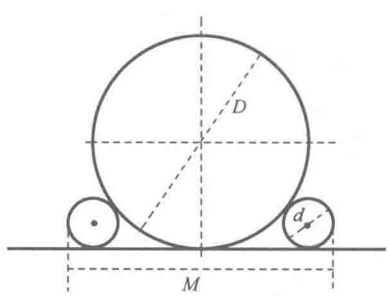

图 1-5

用两个直径相同的钢柱放在工件下面的两侧，用千分尺或游标卡尺量出距离，然后用下面的公式计算，就可以得到这个工件的直径为

$$D = \frac{(M-d)^2}{4d}$$

其中，D 为圆柱体直径(mm)；M 为用千分尺量得的尺寸(mm)；d 为钢柱直径(mm).

分析　由实例抽象出数学图示(图 1-6).

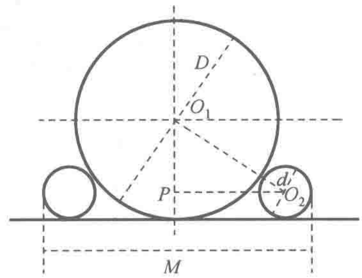

图 1-6

已知条件给出 M 及 d，要求求出 D，于是由三者建立一个直角三角形 $\mathrm{Rt}\triangle O_1O_2P$，连接大圆和小圆的圆心 O_1，O_2，过 O_2 作垂线，垂足为 P，使得 $O_2P\perp O_1P$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle O_1O_2P$ 中运用勾股定理可求得直径 D.

解　由于大圆的直径为 D，小圆的直径为 d，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle O_1O_2P$ 中，有

$$O_1O_2=\frac{D+d}{2}$$

$$O_1P=\frac{D-d}{2}$$

$$O_2P=\frac{M-d}{2}$$

由勾股定理得

$$O_1P^2+O_2P^2=O_1O_2^2$$

即

$$\left(\frac{D-d}{2}\right)^2+\left(\frac{M-d}{2}\right)^2=\left(\frac{D+d}{2}\right)^2$$

整理得

$$D=\frac{(M-d)^2}{4d}$$

4　恢复碎带轮的原有圆直径

例 4　有一只碎轮，并且只有一小部分存在，如何求出原来直径的大小?

分析　做出与实际问题一致的几何模型(图 1-7).

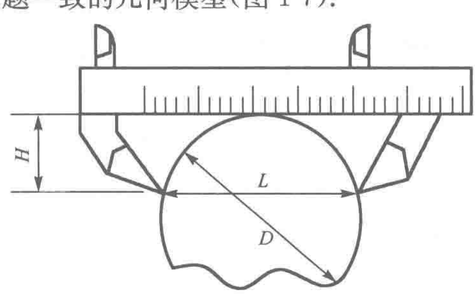

图 1-7

此时可以用游标卡尺测出它的宽度 L 和高度 H，想办法求出直径 D.

由实例抽象出数学几何图(图 1-8).

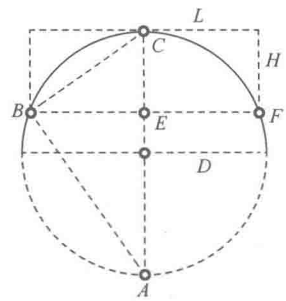

图 1-8

要求出原来圆直径的大小，就得先作出一条直径，由于已知只能找到碎轮的两个端点 B,F，根据与弦垂直的直径平分该弦，所以连接碎轮的两个端点作弦 BF，过 BF 的中点 E 作 BF 的垂直平分线，与碎轮交于点 C，连接 BC，过 B 作 $BA \perp BC$，交 CE 的延长线与 A 点，则 AC 就是所求的直径，这是因为直径所对的圆周角是直角，要求 AC 的长度，可在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中求得，因为 $AC \perp BF$，所以运用射影定理即可求出.

解 因为 $AC \perp BF$，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中利用射影定理得

$$BE^2 = AE \times CE$$

而

$$CE = H, \quad AE = D - H, \quad BE = \frac{L}{2}$$

所以

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 = (D - H) \times H$$

即

$$\frac{L^2}{4} = HD - H^2$$

整理得

$$D = \frac{L^2}{4H} + H$$

5 车削端面圆头突出宽度的计算

例 5 车削如图 1-9 所示的端面圆头，试计算出圆头宽度 t.

分析 从图 1-9 中可以看出，要求出 t 之前，必须先求出锥形部分小端直径 d，$d = 2AB$，$t = R - AO$，要得到 AB 与 AO，需求得 $\angle AOB$ 与 $\angle BOC$，因此需要解斜 $\triangle BOC$.

解 在斜 $\triangle BOC$ 中，已知 $\angle C = 85°$，$OC = 19$，$OB = 24$.

由正弦定理得

$$\frac{OB}{\sin C} = \frac{OC}{\sin\angle OBC}$$

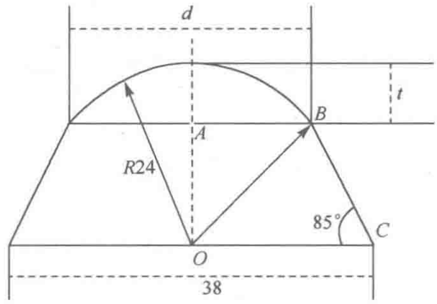

图 1-9

即

$$\frac{24}{\sin 85^\circ} = \frac{19}{\sin\angle OBC}$$

所以

$$\sin\angle OBC = \frac{19}{24}\sin 85^\circ \approx 0.789$$

于是

$$\angle OBC = 52^\circ 04'$$

因此

$$\angle BOC = 180^\circ - 85^\circ - 52^\circ 04' = 42^\circ 56'$$

则

$$\angle AOB = 90^\circ - 42^\circ 56' = 47^\circ 04'$$

在 Rt$\triangle AOB$ 中

$$OB = 24,\quad \angle AOB = 47^\circ 04'$$

$$AB = OB\sin\angle AOB = 24\sin 47^\circ 04' = 24 \times 0.732 = 17.57$$

$$AO = OB\cos\angle AOB = 24\cos 47^\circ 04' = 24 \times 0.681 = 16.35$$

所以

$$d = 2AB = 2 \times 17.57 = 35.14$$

$$t = 24 - AO = 24 - 16.35 = 7.65$$

第三部分　数学工具

1　任意角的三角函数值

1.1　锐角三角函数的定义

如图 1-10 所示，在 Rt$\triangle POM$ 中，$\angle M$ 是直角，那么 $\sin\alpha=\dfrac{MP}{OP}$，$\cos\alpha=\dfrac{OM}{OP}$，$\tan\alpha=\dfrac{MP}{OM}$.

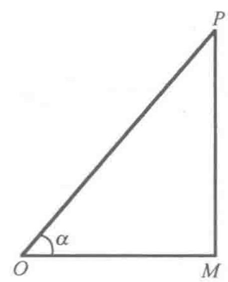

图 1-10

1.2　坐标化

如图 1-11 所示，建立平面直角坐标系，设点 P 的坐标为 (x,y)，那么 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$，

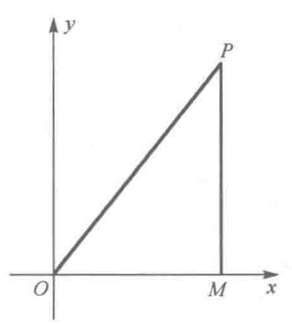

图 1-11

于是

$$\sin\alpha=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \tan\alpha=\frac{y}{x}$$

如图 1-12 所示，线段 $OP=1$，点 P 的坐标为 (x,y)，那么锐角 α 的三角函数可以用坐标表示为

$$\sin\alpha=\frac{MP}{OP}=y,\quad \cos\alpha=\frac{OM}{OP}=x,\quad \tan\alpha=\frac{MP}{OM}=\frac{y}{x}$$

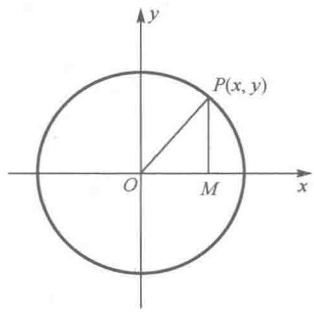

图 1-12

2　正余弦定理

2.1　公式(图 1-13)

正弦定理公式:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

余弦定理公式:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$$
$$\cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ba}$$

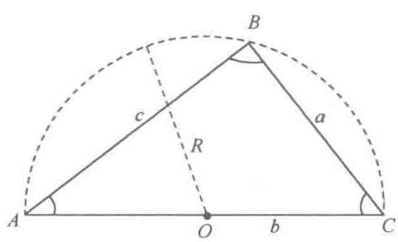

图 1-13

2.2　例题分析

例 6　在 $\triangle ABC$ 中,已知 $c=\sqrt{6}$, $\angle A=45°$, $a=2$, 求 b 和 B, C.

解　因为

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

所以

$$\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{\sqrt{6}\times\sin 45^\circ}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

因为

$$0^\circ<C<180^\circ$$

所以

$$C=60^\circ \text{ 或 } 120^\circ$$

当 $C=60^\circ$ 时，$B=75^\circ$，则有

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ}=\sqrt{3}+1$$

当 $C=120^\circ$ 时，$B=15^\circ$，则有

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}\sin 15^\circ}{\sin 60^\circ}=\sqrt{3}-1$$

所以 $b=\sqrt{3}+1, B=75^\circ, C=60^\circ$ 或 $b=\sqrt{3}-1, B=15^\circ, C=120^\circ$.

3 直角三角形的射影定理

3.1 直角三角形射影定理[又称为欧几里得(Euclid)定理]

直角三角形中，斜边上的高是两直角边在斜边上射影的比例中项. 每一条直角边是这条直角边在斜边上的射影和斜边的比例中项.

如图 1-14 所示，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，AD 是斜边 BC 上的高，则射影定理如下：

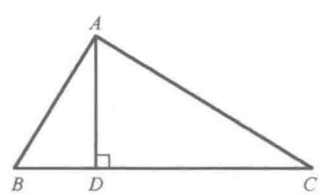

图 1-14

(1) $(AD)^2=BD\cdot DC$；

(2) $(AB)^2=BD\cdot BC$；

(3) $(AC)^2=CD\cdot BC$.

即直角三角形斜边上的高是两直角边在斜边上射影的比例中项；两直角边分别是它们在斜边上射影与斜边的比例中项.

3.2 例题分析

例 7 如图 1-15 所示，$\triangle ABC$ 中，顶点 C 在 AB 边上的射影为 D，且 $CD^2=AD\cdot BD$. 求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

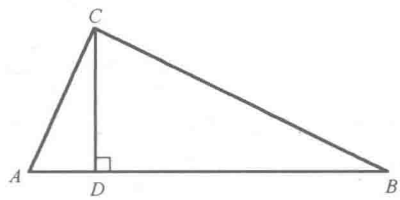

图 1-15

证明　在 $\triangle CDA$ 和 $\triangle BDC$ 中，因为点 C 在 AB 上的射影为 D，所以 $CD \perp AB$，$\angle CDA = \angle BDC = 90°$.

又因为

$$CD^2 = AD \cdot BD$$

所以

$$AD:CD = CD:DB$$

$$\triangle CDA \backsim \triangle BDC$$

在 $\triangle ACD$ 中，因为

$$\angle CAD + \angle ACD = 90°$$

所以

$$\angle BCD + \angle ACD = 90°$$

$$\angle BCD + \angle ACD = \angle ACB = 90°$$

所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.