

权威 实用 经典



2017

考研历届数学 真题题型解析 (数学三)

主编 / 黄先开 曹显兵

- ✓ 分类解析2003—2016年全部真题
- ✓ 章章总结，将历年试题题型、分值分布情况分别列表，考试重点清晰可见
- ✓ 题题精解，有分析，有评注，多种解法、多种思路
- ✓ 14年试卷附录在后，供考生自测之用

考研历届数学

真题题型解析 (数学三)

主 编 黄先开 曹显兵

副主编 施明存 殷先军

中国人民大学出版社

• 北京 •

图书在版编目 (CIP) 数据

考研历届数学真题题型解析. 数学三/黄先开, 曹显兵主编. —北京: 中国人民大学出版社, 2016. 2
ISBN 978-7-300-22564-7

I. ①考… II. ①黄…②曹… III. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 041146 号

考研历届数学真题题型解析 (数学三)

主 编 黄先开 曹显兵

Kaoyan Lijie Shuxue Zhenti Tixing Jiexi (Shuxue San)

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

邮政编码 100080

电 话 010-62511242 (总编室)

010-62511770 (质管部)

010-82501766 (邮购部)

010-62514148 (门市部)

010-62515195 (发行公司)

010-62515275 (盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.lkao.com.cn> (中国 1 考网)

经 销 新华书店

印 刷 涿州市星河印刷有限公司

规 格 185 mm×260 mm 16 开本

版 次 2016 年 3 月第 1 版

印 张 23. 25

印 次 2016 年 3 月第 1 次印刷

字 数 532 000

定 价 46.00 元

版权所有 侵权必究

印装差错 负责调换

前言

自从 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学数学实行统一考试以来,至今已 29 年,共命制试卷近百份,有上千道试题。这些试题是参加命题的专家、教授的智慧 and 劳动的结晶,它既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求,展示出统考以来数学考试的全貌,又蕴涵着命题专家在《数学考试大纲》要求下的命题指导思想、原则、特点和趋势,是广大考生和教师了解试题信息、分析命题动态、总结命题规律最直接、最宝贵的第一手资料。

拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的数学历年真题,是广大准备考研学子的期盼。通过认真分析研究、了解、消化和掌握历年试题,可以发现命题的特点和趋势,找出知识之间的有机联系,总结每部分内容的考查重点、难点,归纳常考典型题型,凝练解题思路、方法和技巧,明确复习方向,从而真正做到有的放矢、事半功倍地进行复习。本书是作者在十多年收集、整理资料和进行考研数学辅导的基础上,通过对历年试题的精心分析研究,并结合授课体会和学生的需要全新编写而成的,相信能够满足考生的要求。

我们认为本书具有以下特点:

1. 内容最全面。汇集了 2003 年以来 14 年的所有试题,便于考生全面系统地把握历年试题的动态变化。在每章后面还将其余类型试卷的相关典型真题作为习题提供,以便考生进一步巩固相关知识,考生有了本书后,也就相当于拥有了其余两类试卷的资料。

2. 题型最丰富。根据考试大纲的要求,每一章节均按题型进行归类,并对每一题型进行了分析、归纳和总结。这样考生可通过题型研究,把握命题特点和命题思路,做到举一反三,触类旁通。另外,对 2003 年以后未考的题型,也特意选了一道往年考题供同学们参考。

3. 解析最详尽。先分析——解题的思路、方法,然后详解——详细、规范的解答过程,再就是评注——解题思路、方法和技巧的归纳总结,所涉及的知识、命题意图和可能延伸的考查情形。对命题思路、解题的重点难点进行这样深入细致的解析,相信有助于考生把握解题规律、拓展分析思路、提炼答题技巧,从而大大提高应试水平。

4. 对照最直接。本书在每部分的开头,先列出了考试大纲规定的内容与要

求，与此相对照再进行题型归类和分析总结，顺序与考试大纲和一般教材一致，便于考生对照复习。

5. 总结最完整。除每类题型均有归纳总结外，每章还有历年考研试题按题型分布和分数的总结，这样可以帮助考生了解每类题型考查的频率、所占的比重，从而发现命题的重点、最常考的题型，以便更有针对性地进行复习。

本书既根据考试内容按章节编排，又提供成套试卷。复习前期建议考生按章节内容与教材、人大社出版的高分复习全书同步进行，后期可将本书作为模拟训练套题使用。尽管本书每题均有详尽的解析，但希望读者不要轻易去查看分析、详解和评注，而一定要自己先动手去进行演练。在每题做完之后，再去看书中的分析、详解和评注，仔细回顾、研究一下自己的分析、思路和解答过程与书中有什么异同；如果存在问题，应尽量查清原因，看看自己是在基本理论、基本概念与基本方法等方面有欠缺，还是在做题技巧、知识的综合与灵活运用等方面掌握不够。**注意，这样的归纳总结过程是必不可少的，其重要性甚至超过做题本身。**整本书都这样复习下来，在掌握基本理论、基本概念和基本方法上，在综合、灵活运用知识和思维能力的训练上，相信读者一定会有质的提高。

本书一方面保留了我们过去编写的历年试题解析图书的优点，同时在这次编写完善过程中，参考了众多相关的教材和复习指导书，在此不一一提及，谨对所有相关的作者表示真诚的谢意。

由于时间比较仓促，加上编者水平所限，书中难免还有不足之处，恳请广大读者批评指正。

成功来源于自信，只要广大考生充满信心，通过脚踏实地的艰苦努力，就一定能够心想事成。

编者

2016年2月于北京

目 录

第一部分 微积分

第一章 函数、极限、连续 3

题型 1.1 函数的概念及其特性 3

题型 1.2 极限概念与性质 4

题型 1.3 函数极限的计算 6

题型 1.4 函数极限的逆问题 12

题型 1.5 数列的极限 15

题型 1.6 无穷小量的比较 16

题型 1.7 函数的连续性及间断点的分类 19

本章总结 22

自测练习题 22

自测练习题答案或提示 25

第二章 一元函数微分学 27

题型 2.1 考查导数的定义 27

题型 2.2 利用导数求曲线的切线、法线方程 30

题型 2.3 一般导函数的计算 31

题型 2.4 可导、连续与极限的关系 33

题型 2.5 微分的概念与计算 33

题型 2.6 利用导数确定单调区间与极值 34

题型 2.7 求函数曲线的凹凸区间与拐点 35

题型 2.8 求函数曲线的渐近线 38

题型 2.9 确定函数方程 $f(x) = 0$ 的根 39

题型 2.10 确定方程 $F(x, f(x), f'(x)) = 0$ 的根 40

题型 2.11 微分中值定理的综合应用 42

题型 2.12 利用导数证明不等式 44

题型 2.13 导数在经济上的应用 45

本章总结 50

自测练习题 51

自测练习题答案或提示 55

第三章 一元函数积分学	57
题型 3.1 原函数与不定积分的概念	57
题型 3.2 定积分的基本概念与性质	59
题型 3.3 不定积分的计算	60
题型 3.4 定积分的计算	61
题型 3.5 变限积分	63
题型 3.6 定积分的证明题	65
题型 3.7 反常积分	68
题型 3.8 应用题	68
本章总结	73
自测练习题	74
自测练习题答案或提示	77
第四章 多元函数微分学	80
题型 4.1 基本概念题	80
题型 4.2 二元函数的极限	81
题型 4.3 求复合函数的偏导数和全微分	82
题型 4.4 求隐函数的偏导数和全微分	89
题型 4.5 求多元函数的极值和最值	89
本章总结	94
自测练习题	94
自测练习题答案或提示	97
第五章 重积分	100
题型 5.1 与二重积分性质有关的问题	100
题型 5.2 交换积分顺序或坐标系	101
题型 5.3 选择适当坐标系计算二重积分	104
题型 5.4 利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性计算	107
题型 5.5 分块积分	112
题型 5.6 无界区域上的二重积分	114
题型 5.7 解含有未知函数二重积分的函数方程	115
本章总结	115
自测练习题	116
自测练习题答案或提示	117
第六章 无穷级数	119
题型 6.1 判定数项级数的敛散性	119
题型 6.2 求幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域	125

题型 6.3 求幂级数的和函数	126
题型 6.4 求数项级数的和	131
题型 6.5 将函数展开成幂级数	132
本章总结	133
自测练习题	134
自测练习题答案或提示	136

第七章 常微分方程 138

题型 7.1 一阶微分方程	138
题型 7.2 高阶常系数线性微分方程	142
题型 7.3 求解含变限积分的方程	143
题型 7.4 微分方程的应用	144
题型 7.5 一阶差分方程	146
本章总结	147
自测练习题	147
自测练习题答案或提示	150

第二部分 线性代数

第一章 行列式 155

题型 1.1 利用行列式和矩阵的运算性质计算行列式	155
题型 1.2 利用秩、特征值和相似矩阵等计算行列式	158
本章总结	160
自测练习题	160
自测练习题答案或提示	162

第二章 矩阵 163

题型 2.1 有关逆矩阵的计算与证明	163
题型 2.2 矩阵的乘法运算	165
题型 2.3 解矩阵方程	166
题型 2.4 与初等变换有关的命题	167
题型 2.5 与伴随矩阵 A^* 有关的命题	169
题型 2.6 矩阵秩的计算与证明	170
本章总结	172
自测练习题	173
自测练习题答案或提示	175

第三章 向量 177

题型 3.1 向量的线性组合与线性表示	177
---------------------------	-----

题型 3.2	向量组的线性相关性	180
题型 3.3	求向量组的秩与矩阵的秩	184
本章总结		185
自测练习题		186
自测练习题答案或提示		187
第四章	线性方程组	189
题型 4.1	解的判定、性质和结构	189
题型 4.2	求齐次线性方程组的基础解系、通解	190
题型 4.3	求非齐次线性方程组的通解	192
题型 4.4	抽象方程组的求解问题	201
题型 4.5	有关基础解系的命题	202
题型 4.6	讨论两个方程组解之间的关系(公共解、同解)	202
题型 4.7	与 $AB = 0$ 有关的命题	205
题型 4.8	线性方程组的综合应用	206
本章总结		208
自测练习题		208
自测练习题答案或提示		210
第五章	特征值与特征向量	212
题型 5.1	求数字矩阵的特征值和特征向量	212
题型 5.2	求抽象矩阵的特征值	213
题型 5.3	特征值、特征向量的逆问题	214
题型 5.4	相似矩阵的判定及其逆问题	215
题型 5.5	可对角化的判定及其逆问题	219
题型 5.6	实对称矩阵的性质	222
题型 5.7	特征值、特征向量的应用	227
本章总结		228
自测练习题		228
自测练习题答案或提示		230
第六章	二次型	232
题型 6.1	二次型的矩阵、秩和正负惯性指数	232
题型 6.2	化二次型为标准形	233
题型 6.3	化二次型为标准形的逆问题	237
题型 6.4	合同变换与合同矩阵	239
题型 6.5	正定二次型与正定矩阵	240
本章总结		241
自测练习题		241
自测练习题答案或提示		242

第三部分 概率论与数理统计

第一章 随机事件与概率	245
题型 1.1 事件的关系与概率的基本性质	245
题型 1.2 古典概型与几何概型	246
题型 1.3 全概率公式、贝叶斯公式	248
题型 1.4 事件的独立性	249
题型 1.5 贝努利概型	250
本章总结	251
自测练习题	251
自测练习题答案或提示	253
第二章 随机变量及其分布	254
题型 2.1 概率分布的基本概念与性质	254
题型 2.2 求随机变量的分布律、分布函数	256
题型 2.3 利用常见分布计算概率	257
题型 2.4 常见分布的逆问题	258
题型 2.5 随机变量函数的分布	259
本章总结	261
自测练习题	262
自测练习题答案或提示	263
第三章 多维随机变量及其分布	265
题型 3.1 二维离散型随机变量的联合分布、边缘分布、条件分布	265
题型 3.2 二维连续随机变量的联合分布、边缘分布、条件分布	268
题型 3.3 二维随机变量函数的分布	271
题型 3.4 随机变量的独立性与相关性	277
题型 3.5 综合题	279
本章总结	281
自测练习题	281
自测练习题答案或提示	284
第四章 随机变量的数字特征	286
题型 4.1 数学期望与方差的计算	286
题型 4.2 协方差与相关系数的计算	288
题型 4.3 应用题	290
题型 4.4 综合题	291
本章总结	295
自测练习题	295
自测练习题答案或提示	298

第五章 大数定律与中心极限定理	301
题型 5.1 切比雪夫不等式	301
题型 5.2 大数定律	302
题型 5.3 中心极限定理	303
本章总结	304
自测练习题	304
自测练习题答案或提示	305
第六章 数理统计的基本概念	306
题型 6.1 求统计量的数字特征	306
题型 6.2 求统计量的分布或取值的概率	311
本章总结	313
自测练习题	314
自测练习题答案或提示	314
第七章 参数估计	316
题型 7.1 求参数的矩估计和最大似然估计	316
题型 7.2 估计量的评价标准	320
题型 7.3 区间估计	321
本章总结	322
自测练习题	322
自测练习题答案或提示	323
附 录	
附录一 2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	325
附录二 2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	327
附录三 2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	330
附录四 2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	332
附录五 2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	334
附录六 2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	337
附录七 2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	339
附录八 2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	342
附录九 2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	344
附录十 2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	346
附录十一 2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	349
附录十二 2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	351
附录十三 2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	353
附录十四 2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	356

PART ONE

第一部分

微积分

第一章 函数、极限、连续

考试内容与要求

考 试 内 容

函数的概念及表示法,函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性,复合函数、反函数、分段函数和隐函数,基本初等函数的性质及其图形,初等函数,函数关系的建立.

数列极限与函数极限的定义及其性质,函数的左极限和右极限,无穷小量和无穷大量的概念及其关系,无穷小量的性质及无穷小量的比较,极限的四则运算,极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则,两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

函数连续的概念,函数间断点的类型,初等函数的连续性,闭区间上连续函数的性质.

考 试 要 求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.
6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限的四则运算法则,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
7. 理解无穷小量的概念和基本性质,掌握无穷小量的比较方法.了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

题型 1.1 函数的概念及其特性

(04, 4 分)* 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界?

* (04, 4 分) 表示该题为 2004 年考研数学三真题,其分值为 4 分. 全书同. 另外,对 2003 年以后未考的题型,也特意选了一个往年考题供参考.



(A) $(-1, 0)$. (B) $(0, 1)$. (C) $(1, 2)$. (D) $(2, 3)$. 【 】

【答案】 应选(A).

【分析】 如 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在, 则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.

【详解】 当 $x \neq 0, 1, 2$ 时, $f(x)$ 连续, 而

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{\sin 3}{18}, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\sin 2}{4}, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\sin 2}{4}, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty,$$

所以, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内有界, 故选(A).

【评注】 一般地, 如函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有界; 如函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 且极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在, 则函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内有界.



函数的概念及其复合, 包括分段函数的复合, 本质上是函数关系的建立问题, 而建立函数关系是进一步研究函数性质的基础. 对于函数的四个主要特性: 奇偶性和周期性一般用定义检验; 单调性则大多用导数符号分析; 有界性往往需要结合极限与连续的性质来确定.

题型 1.2 极限概念与性质

1. (03, 4分, 数一) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

- (A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立. (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.
(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在. (D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在. 【 】

【答案】 应选(D).

【详解 1】 本题考查极限的概念, 极限值与数列前面有限项的大小无关, 可立即排除(A), (B); 而极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 是“ $0 \cdot \infty$ ”型未定式, 可能存在也可能不存在, 举反例说明即可; 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 属“ $1 \cdot \infty$ ”型, 必为无穷大量, 即不存在. 故应选(D).

【详解 2】 用举反例法, 取 $a_n = \frac{2}{n}, b_n = 1, c_n = \frac{1}{2}n (n = 1, 2, \dots)$, 则可立即排除(A), (B), (C), 因此正确选项为(D).

2. (07, 4分) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 应填 0.

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} = 0$, 而 $\sin x + \cos x$ 有界, 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = 0.$$

3. (14, 4 分) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有

(A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}.$

(B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}.$

(C) $a_n > a - \frac{1}{n}.$

(D) $a_n < a + \frac{1}{n}.$

【 】

【答案】 应选(A).

【分析】 本题考查数列极限的定义.

【详解】 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$ 得, 对给定的正数 $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$, 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 所以, 当 n 充分大时有

$$|a_n| = |a + a_n - a| \geq |a| - |a_n - a| \geq |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}. \quad \text{选 (A).}$$

4. (15, 14 分) 设 $\{x_n\}$ 是数列, 下列命题中不正确的是

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$.

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$.

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

【 】

【答案】 应选(D).

【分析】 考查数列极限与子数列极限的关系.

【详解】 若数列收敛, 则它的任何无穷子数列均收敛, 所以(A) 与(C) 正确;

若一个数列存在多个无穷子数列, 其并集包含原数列所有项, 且这些子数列均收敛于同一个值, 则原数列是收敛的, 且收敛于同一个值, (B) 正确. 故选(D).

【评注】 可举例说明 $x_n = \begin{cases} 1, & n = 3k, \\ 1, & n = 3k + 1, \\ 0, & n = 3k + 2. \end{cases}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = 1$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在.

小结

关于极限的存在性, 以下几点是值得注意的:

1. 若 $\lim f$ 存在, $\lim g$ 不存在, 则 $\lim(f \pm g)$ 一定不存在, 但 $\lim fg, \lim \frac{f}{g}$ 可能存在, 也可能不存在;

2. 若 $\lim f = l \neq 0, \lim g = \infty$, 则 $\lim fg = \infty$;

3. 若 f 有界, $\lim g = \infty$, 则 $\lim(f \pm g) = \infty$, 但 $\lim fg$ 不一定为 ∞ .

题型 1.3 函数极限的计算

一、利用左右极限求函数极限

(00, 5分, 数二) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.

【分析】 本题函数关系式中含有绝对值, 本质上是一分段函数, 在分段点的极限应通过左右极限来讨论.

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{2}{1} - 1 = 1,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) = 0 + 1 = 1,$$

可见, 原式 = 1.

【评注】 形如 $|f(x)|, \max\{f(x), g(x)\}$ 的函数, 本质上是分段函数, 在求极限、导数和积分时一般均应分段讨论.

小结

在讨论分段函数极限时一般用结论 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$, 因此, 当左右极限 $f(x_0^-), f(x_0^+)$ 有一个不存在或都存在但不相等时, 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在.

二、求未定式 $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0 \right)$ 的极限

1. (04, 8分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right)$.

【分析】 先通分化为“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式, 再利用等价无穷小与洛必达法则求解即可.

【详解】
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{4} \sin^2 2x}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{1}{2} \sin 4x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{6x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} (4x)^2}{6x^2} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

【评注 1】 此类问题的求解一般是先尽可能用无穷小等价代换进行简化, 然后再用洛必达法则求解. 但是在用无穷小等价代换时应注意必须是“整体”代换, 即乘除项可以直接代换, 加减项不能直接代换.

【评注 2】 涉及三角函数项的极限问题时, 一般先将 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 转化为 $\sin x, \cos x$, 再用洛必达法则求极限, 往往可简化计算, 因为 $\sin x, \cos x$ 的求导比 $\tan x, \cot x, \sec x$,