概率论与数理统计应用案例评析

周华任　刘守生◎主编

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

概率论与数理统计应用案例评析

主　编　周华任　刘守生

编　委　苏慧琳　俞　珊　刘海峰　苏　展

黄　萍　顾秀松　汪　鹏　方莉莉

东南大学出版社

·南京·

内 容 简 介

本书以生动有趣、实际可用的案例说明概率统计在彩票、金融、风险管理、决策、估算、评价、生产管理、体育、日常生活和军事等领域的应用。每个案例从背景知识、案例分析和结论分析的三个角度来阐述概率统计在实际问题中的应用。

本书可作为高等学校经管类、工科、理科各专业的辅导书,也可作为相关读者的通俗读物,也可供相关科技工作者和管理人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计应用案例评析/周华任,刘守生主编. —南京:东南大学出版社,2016.3

ISBN 978-7-5641-6403-4

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①周… ②刘… Ⅲ. ①概率论—研究 ②数理统计—研究 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 043943 号

概率论与数理统计应用案例评析

主　　编　周华任　刘守生
责任编辑　宋华莉
编辑邮箱　52145104@qq.com
出版发行　东南大学出版社
出 版 人　江建中
社　　址　南京市四牌楼 2 号(邮编:210096)
网　　址　http://www.seupress.com
电子邮箱　press@seupress.com
印　　刷　南京京新印刷厂
开　　本　700 mm×1 000 mm　1/16
印　　张　12
字　　数　228 千字
版　　次　2016 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5641-6403-4
定　　价　46.00 元
经　　销　全国各地新华书店
发行热线　025-83790519　83791830

前　言

在现实世界中，事物之间都是相互联系和不断发展的。人们观察到的现象一般可分为确定性现象和随机现象两大类，前者指在一定条件下必然发生的现象。如，苹果离开树时必定落到地上。后者是在一定条件下事先不能断言会出现哪种结果的现象。如，掷一枚质地均匀的硬币，一定出现正面吗？显然，不一定。又如，在同样条件下，进行小麦品种的人工催芽试验，各颗种子的发芽情况也不尽相同，有强弱和早晚之别等。为什么在相同的情况下，会出现这种不确定的结果呢？这是因为，我们说的“相同条件”是指一些主要条件来说的，除了这些主要条件外，还会有许多次要条件和偶然因素是人们无法事先预料的。这种现象叫做偶然现象，又叫做随机现象。

概率，简单地说，就是一件事发生的可能性的大小。比如：太阳每天都会东升西落，这件事发生的概率就是100%或者说是1，因为它肯定会发生；而太阳西升东落的概率就是0，因为它肯定不会发生。但实际中的很多现象是既有可能发生，也有可能不发生的，比如训练时会不会下雨、打靶是否能击中目标等等，这类事件的概率就介于0和100%之间，或者说0和1之间。

在日常生活中无论是股市涨跌，还是交通事故的发生，都可用概率进行分析。走在街头，来来往往的车辆让人联想到概率；生产、生活更是离不开概率。在军事生活中无论是训练成绩，还是军工生产，但凡捉摸不定、需要用“运气”来解释的事件，都可用概率模型进行定量分析。不确定性既给人们带来许多麻烦，同时又常常是解决问题的一种有效手段甚至唯一手段。

本书主要研究了概率统计在彩票、金融、风险管理、决策、估算、评价、生产管理、体育、日常生活和军事等十个方面的应用案例。每个案例从背景知识、案例分析和结论分析的三个角度来阐述概率统计在实际问题中的应用。这些案例涵盖了工作、生活乃至从事经济、政治活动等各个领域，包括股票、投资、保险、成本、利润、

体育比赛、心理分析、工程管理、公共事物管理、军事领域等各个方面。

通过以上概率论与数理统计经典案例的分析，读者能够得到运用概率统计方法来处理数学问题的思路、方法和技巧，做到灵活应用所学的概率统计知识解决各种实际问题，做到“学得活，用得巧”，使得概率统计更好地为我们服务。

本书由周华任、刘守生、苏慧琳、俞珊、刘海峰、苏展、黄萍、顾秀松、汪鹏和方莉莉编写；在此书的编写过程中，解放军理工大学的姚泽清教授、郑琴教授等给予了很多的指导；在此书的编写过程中，体例结构得到了东南大学出版社宋华莉编辑的帮助，在此一并表示感谢！

由于作者的见识和水平有限，书中案例的内容不是太全面，疏漏之处在所难免，敬请同行和广大读者批评指正。

目　录

1 概率统计在彩票中的应用

概率起源于赌博，第一个系统地推算概率的人是16世纪的卡尔达诺。记载在他的著作 *Liber de Ludo Aleae* 中。书中关于概率的内容是由 Gould 从拉丁文翻译出来的。

卡尔达诺的数学著作中有很多给赌徒的建议。这些建议都写成短文。例如：《谁，在什么时候，应该赌博？》《为什么亚里士多德谴责赌博？》《那些教别人赌博的人是否也擅长赌博呢？》等。

然而，首次提出系统研究概率的是在帕斯卡和费马来往的一系列信件中。最初是由帕斯卡提出的，他想找费马请教几个关于由 Chevvalier de Mere 提出的问题。Chevvalier de Mere 是一知名作家，路易十四宫廷的显要，也是一名狂热的赌徒。问题主要是两个：掷骰子问题和比赛奖金分配问题。

彩票，也称奖券，英文“lottery ticket”。《辞海》(1999 年版)对彩票是这样解释的：“俗称‘白鸽票’。以抽签给奖方式进行筹款或敛财所发行的凭证。”《现代汉语词典》对彩票和奖券分别是这样解释的：“彩票，奖券的通称。”“奖券，一种证券，上面编有号码，按票面价格出售。开奖后，持有中奖号码奖券的，可按规定领奖。”彩票是一种以筹集资金为目的发行的，印有号码、图形、文字、面值的，由购买人自愿按一定规则购买并确定是否获取奖励的凭证。

据财政部 2014 年公布的数据，中国福利彩票和体育彩票累计销量已分别达到1万多亿元和 7 354 亿元，筹集公益金量分别达到 3 100 多亿元和 2 119 亿元。但据媒体调查，彩票公益金的筹集、分配和使用情况信息过于笼统，公众无从监督，去向也扑朔迷离。

在我国，国家发行的彩票有两种，分别是中国福利彩票和中国体育彩票。中国福利彩票从 1987 年开始由中国福利彩票发行中心发行，中国体育彩票由国家体育总局体育彩票管理中心发行。彩票市场产生于 16 世纪的意大利，从古罗马、古希腊开始，即有彩票开始发行。发展到今天，世界上已经有 139 个国家和地区发行彩票。发行

彩票集资可以说是现代彩票的共同目的。各国、各地区的集资目的多种多样，社会福利、公共卫生、教育、体育、文化是主要目标。以合法形式、公平原则，重新分配社会的闲散资金，协调社会的矛盾和关系，使彩票具有了一种特殊的地位和价值。

彩票每次开奖都是一个独立的随机事件，相互没有影响，无规律可循。但是多期的开奖号会呈现一定规律性。这种规律性是有限范围内的规律性，但已足以帮助你在选号时缩小范围，提高中奖率。如果是经常购买彩票的彩民，研究一下号码走势规律，对形成有效的选号思路是相当有帮助的。

从总体来看，评价一个彩票方案的优劣或合理性如何，主要取决于彩票公司和广大彩民两方面的利益。事实上，公司和彩民双方的利益主要就取决于销售总额的大小，即双方的利益都与销售额成正比。因此，主要问题是如何才能有利于销售额的增加？即公司采用什么样的方案才能吸引广大的彩民积极踊跃购买彩票？具体地讲，问题涉及一个方案的设置，使彩民获奖的可能性有多大，奖金额有多少，中奖面如何，各项奖的设置是否合理等因素，这些都对彩民购买彩票的吸引力产生一定的影响，在这里可用彩民的心理曲线来描述一个方案对彩民的吸引力。另外，一个方案对彩民的影响程度可能与区域有关，即与彩民所在地区的经济状况、收入和消费水平有关。为此，要考察一个方案的合理性问题，需要综合考虑以上这些因素的影响，这正是建立模型的关键所在。

下面就让我们一起来看一看现实生活中彩票问题吧！

“下一个赢家就是你！”(The next winner is you!)这句响亮的具有极大蛊惑性的话是大英帝国彩票的广告词。买一张大英帝国彩票的诱惑有多大呢？只要你花上 1 英镑，就有可能获得 2 200 万英镑！

在令人心动的彩票摇奖中，概率也同样领导着我们的实践。继股票之后，彩票也成了城乡居民经济生活中的一个热门。据统计，全国 100 个人中就有 3 个彩民。通过对北京、上海与广州 3 城市居民调查的效果显示，有 50%的居民买过彩票，其中 5%的居民成为“职业”(经济性购置)彩民。“以小博大”的发财梦，是不少彩票购置者的共同心态。那么，购置彩票真的能让我们如愿以偿吗？以从 36 个号码中选择 7 个的投注法子为例，看起来似乎并不很难，其实却是“可望而不可即”的。经盘算，投一注的理论中奖概率为 0.000 563。

由此看出，只有极少数人能中奖，购置者应怀有平常心，既不能把它作为纯正的投资，更不应把它当成发财之路。

一点小小的投资竟然可能得到天文数字般的奖金，这没办法不让人动心，很多人都会想：也许真如广告所说，下一个赢家就是我呢！因此，自从 1994 年 9 月开始

发行到现在，英国已有超过90%的成年人购买过这种彩票，并且也真的有数以百计的人成为百万富翁。如今在世界各地都流行着类似的游戏，在我国各省各市也发行了各种福利彩票、体育彩票，各地充满诱惑的广告满天飞，而报纸、电视上关于中大奖的幸运儿的报道也热闹非凡，因此吸引了不计其数的人踊跃购买。

很简单，只要花2元，就可以拥有这么一次尝试的机会，试一下自己的运气。说不定成为下一个用2元钱通过一个小概率事件而成为百万富翁的人就是你。这个不妨去试一试。

1.1 卡当在赌博中的押宝

背景知识

《重要的艺术》一书的作者是意大利医生兼数学家卡当，据说曾大量地进行过赌博。他在赌博时研究不输的方法，实际是概率论的萌芽。

案例分析

据说卡当曾参加过这样的一种赌法：把两颗骰子掷出去，以每个骰子朝上的点数之和作为赌的内容。已知骰子的六个面上分别为1～6点，那么，赌注下在多少点上最有利?

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

卡当曾预言说押7最好。

下面我们来分析分析卡当的正确性，可以得到各个点数的概率分布。

点数之和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
概率	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

从上面的表格可以看出，出现 7 的概率最大。

结论分析

从我们上面的分析说明卡当的预言说押 7 最好是正确的。

现在看来这个想法是很简单的，可是在卡当的时代，应该说是很杰出的思想方法。

在那个时代，虽然概率论的萌芽有些进展，但还没有出现真正的概率论。

17 世纪中叶，法国贵族德·美黑在骰子赌博中，由于有要急于处理的事情必须中途停止赌博，要靠对胜负的预测把赌资进行合理的分配，但不知用什么样的比例分配才算合理，于是就写信向当时法国的最高数学家帕斯卡请教。正是这封信使概率论向前迈出了第一步。

帕斯卡和当时第一流的数学家费马一起，研究了德·美黑提出的关于骰子赌博的问题。于是，一个新的数学分支——概率论登上了历史舞台。概率论从赌博的游戏开始，完全是一种新的数学。现在它在许多领域发挥着十分重要的作用。

1.2 大英帝国的彩票问题

背景知识

“下一个赢家就是你！”(The next winner is you!)这句响亮的具有极大蛊惑性的话是大英帝国彩票的广告词。买一张大英帝国彩票的诱惑有多大呢？只要你花上 1 英镑，就有可能获得 2 200 万英镑！一点小小的投资竟然可能得到天文数字般的奖金，这没办法不让人动心，很多人都会想：也许真如广告所说，下一个赢家就是我呢！因此，自从 1994 年 9 月开始发行到现在，英国已有超过 90%的成年人购买过这种彩票，并且也真有数以百计的人成为百万富翁。如今在世界各地都流行着类似的游戏，在我国各省各市也发行了各种福利彩票、体育彩票，各地充满诱惑的广告满天飞，而报纸、电视上关于中大奖的幸运儿的报道也热闹非凡，因此吸引了不计其数的人踊跃购买。很简单，只要花 2 元的人民币，就可以拥有这么一次尝试的机会，试一下自己的运气。但一张彩票的中奖机会有多少呢？

案例分析

让我们以大英帝国彩票为例来计算一下。大英帝国彩票的规则是 49 选 6，即在 1 至 49 的 49 个号码中选 6 个号码。买一张彩票，你只需要选六个号、花 1 英镑而已。在每一轮，有一个专门的摇奖机随机摇出 6 个标有数字的小球，如果 6 个小球的数字都被你选中了，你就获得了头等奖。可是，当我们计算一下在 49 个数字中随意组合其中 6 个数字的方法有多少种时，我们会吓一大跳：从 49 个数中选 6 个数的组合有 13 983 816 种方法！这就是说，假如你只买了一张彩票，六个号码全对的机会是大约一千四百万分之一，这个数小得已经无法想象。如果每星期你买 50 张彩票，你赢得一次大奖的时间约为 5 000 年；即使每星期买 1 000 张彩票，也大致需要 270 年才有一次六个号码全对的机会。

结论分析

从上面的分析可知，这几乎是单个人力不可为的，获奖仅是我们期盼的偶然而又偶然的事件。那么为什么总有人能成为幸运儿呢？这是因为参与的人数是极其巨大的，人们总是抱着撞大运的心理去参加。殊不知，彩民们就在这样的幻想中为彩票公司贡献了巨额的财富。

一般情况下，彩票发行者只拿出回收的全部彩金的 45%作为奖金返还，这意味着无论奖金的比例如何分配，无论彩票的销售总量是多少，彩民平均付出的 1 元钱只能赢得 0.45 元的回报。从这个平均值出发，这个游戏是绝对不划算的。

1.3 帕斯卡如何为赌徒分金

背景知识

17 世纪中叶，一位赌徒向法国数学家帕斯卡(1623—1662)提出了一个使他苦恼长久的分赌本问题：甲、乙两赌徒赌技相同，各出赌注 50 法郎，每局中无平局。他们约定，谁先赢三局，则得到全部赌本 100 法郎。但当甲赢了二局、乙赢了一局时，因故要终止赌博。现请问这 100 法郎如何分才算公平？这也就是著名的“点数问题”。该问题引起了不少人的兴趣。首先大家都认识到：平均分对甲不公平；全部归甲对乙不公平；合理的分法是按一定的比例，甲多分些，乙少分些。所以问题

的焦点在于:按怎样的比例来分。

案例分析

帕斯卡和费马的通信中讨论了“点数问题”,并获得了成功。1654 年帕斯卡提出了如下的分法:设想再赌下去,则甲最终所得 X 为一个随机变量,其可能取值为 0 或 100。再赌二局必可结束,其结果不外乎是以下四种情况之一:

甲甲、甲乙、乙甲、乙乙

其中“甲乙”表示第一局甲胜第二局乙胜。因为赌技相同,所以在这四种情况中有三种可使甲获 100 法郎,只有一种情况(乙乙)下甲获得 0 法郎。所以甲获得 100 法郎的可能性为 3/4,获得 0 法郎的可能性为 1/4。经上分析,帕斯卡认为,甲应得 $0\times1/4+100\times3/4=75$ 法郎;同理,乙分 25 法郎。帕斯卡和费马(P. Fermat,1601—1665)用数学演绎法和排列组合理论圆满地解决了“点数问题”。

结论分析

但由于他们关于这个问题的通信直至 1679 年才完全公布于世,而惠更斯(Christian Huygens,1629—1695)于 1657 出版了《论赌博中的计算》。该书是第一部概率论著作,它先从关于公平赌博值的一条公理出发,推导出有关数学期望的三条基本定理,利用这些定理和递推公式,解决了点数问题及其他一些博弈问题,最后提出了 5 个问题留给读者解答,并仅给出了其中三个的答案。故从某种意义上讲,惠更斯的《论赌博中的计算》标志着概率论的诞生。

1.4 古典概型在福利彩票中的应用

背景知识

概率与统计学起源于古代赌博游戏,在概率统计中古典概型常常被应用于估计推断博彩的中奖可能性。古典概型的计算原理是:事件空间是由 m 个基本事件总数组成,且这些基本事件具有同样性质时,事件 A 中所含的基本事件数(有利事件数)为 a 个,以 $P(A)$ 表示事件 A 的概率,计算公式是

$$P(A)=a/m$$

用 $P(B)$ 表示事件 B 的概率,若 $P(A)>P(B)$,则事件 A 发生的可能性较 B 的

更大些。

案例分析

设某一福利彩票，从 01—37 号码中任意选择 7 个不同的号码作为一注进行投注，2 元买一注，每一注填写一张彩票，每张彩票由 6 个数字号码和一个特别数字号码组成，每个数字均可填写所选数字中的一个，与当期开奖开出的 6 个基本号码中的某些或另加特别数字号码相同（“号码相同”指“无须排序、不重复”），即中不同等级的奖。每期设六个奖项。当期每注投注号码只有一次中奖机会，投注者开出奖号——6 个数字号码，另加一个特别数字号码，中奖号码规定如下：彩票上填写的 6 个数与开出的 6 个数完全相同，而且特别号码也相同——一等奖；6 个数完全相同——二等奖；有 5 个数字相同，而且特别号码也相同——三等奖；有 5 个数字相同——四等奖；有 4 个数字相同，而且特别号码也相同——五等奖；有 4 个数字相同，或者有 3 个数字相同，而且特别号码也相同——六等奖。

每一期彩票奖金：三、四、五、六等奖的奖金固定，一、二等奖的奖金浮动。例如，如果基本号码是“★★★★★★”，特别号为“△”，那么各等奖项的中奖号码和每注奖金，如下表所列。

各等奖项的中奖号码数和相应的每注奖金表

奖级	中奖条件		奖金分配
	基本号码 ★★★★★★	特别号码 △	
一等奖	★★★★★★	△	当期高等奖奖金的 80%与奖池中积累的奖金之和
二等奖	★★★★★★		当期高等奖奖金的 20%
三等奖	★★★★★	△	单注奖金额固定为 2 000 元
四等奖	★★★★★		单注奖金额固定为 300 元
五等奖	★★★★	△	单注奖金额固定为 100 元
六等奖	★★★★		单注奖金额固定为 10 元
	★★★	△	

其中一、二等奖为高等奖，三至六等奖为低等奖，高等奖采用浮动设奖，低等奖采用固定设奖，当期总奖金减去当期低等奖奖金为当期高等奖奖金，单注彩票奖金封顶的最高限额为 500 万元。

分析中奖概率：（以一注为单位，计算每一注彩票的中奖概率）

基本事件总数(无顺序、无重复数、基本号码由 6 个数组成,特别号码只有一个数)共有两种情况,其中一种,有特别号码:在 37 个数中任取 6 个数作为基本号码,再在剩余的 37−6=31 个数中任选出 1 个数作为特别号码有 $m=C_{37}^{6}C_{31}^{1}=72\ 068\ 304$ 种可能。

另一种情况,无特别号码:在 37 个数中任取 6 个数作为基本号码有 $m_1=C_{37}^{6}=2\ 324\ 784$ 种可能。

一等奖中奖概率为

$$P_1=a_1/m=C_7^7/C_{37}^{6}C_{31}^{1}=1/72\ 068\ 304=0.000\ 000\ 013=1.3\times10^{-8}$$

二等奖中奖概率为

$$P_2=a_2/m_1=C_6^6/C_{37}^{6}=1/2\ 324\ 784=0.000\ 000\ 43=4.3\times10^{-7}$$

三等奖(有特别号码)中奖率为

$$P_3=a_3/m=C_6^5C_1^1C_{30}^1/C_{37}^{6}C_{31}^{1}=180/72\ 068\ 304=0.000\ 000\ 249=2.49\times10^{-6}$$

四等奖(无特别号码)中奖概率为

$$P_4=a_4/m_1=C_6^5C_{31}^1/C_{37}^{6}=186/2\ 324\ 784=0.000\ 079\ 98=7.998\times10^{-5}$$

五等奖(有特别号码)

$$P_5=a_5/m=C_6^4C_1^1C_{30}^2/C_{37}^{6}C_{31}^{1}=6\ 525/72\ 068\ 304=0.000\ 090\ 539=9.054\times10^{-5}$$

六等奖有两种情况

当无特别号码时的概率为

$$P_6=a_6/m_1=C_6^4C_{31}^3/C_{37}^{6}=6\ 975/2\ 324\ 784=0.003\ 0=3.0\times10^{-3}$$

当有特别号码时的概率为

$$P'_6=a'_6/m=C_6^3C_1^1C_{30}^3/C_{37}^{6}C_{31}^{1}=81\ 200/72\ 068\ 304=0.001\ 127=1.127\times10^{-3}$$

所以,合起来,每一注总得中奖率为

$$P=P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6=0.003\ 17$$

$$P=P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P'_6=0.001\ 30$$

结论分析

通过对本例的研究,我们可以了解到:每 1 000 注彩票,约有 1 至 3 注中奖(包括高等奖到低等奖),而中一等奖是七千万分之一,中二等奖是两百万分之一。由此可见,通过博彩来赚钱并不合算,彩票中大奖的可能性是很小的,从纯数学的角度讲,概率低于 1/1 000 就可以忽略不计。实际上,只有极少数人能中奖,购买者应怀有平常心,既不能把它作为纯粹的投资,也不应把它当成纯粹的赌博行为。只能将其作为一种娱乐,也可以此为公益事业做贡献、献爱心,达到“扶老、助残、救孤、济困”的目的,从而使我们在购买彩票的活动中更具有理性。