“十二五”普通高等教育
本科国家级规划教材

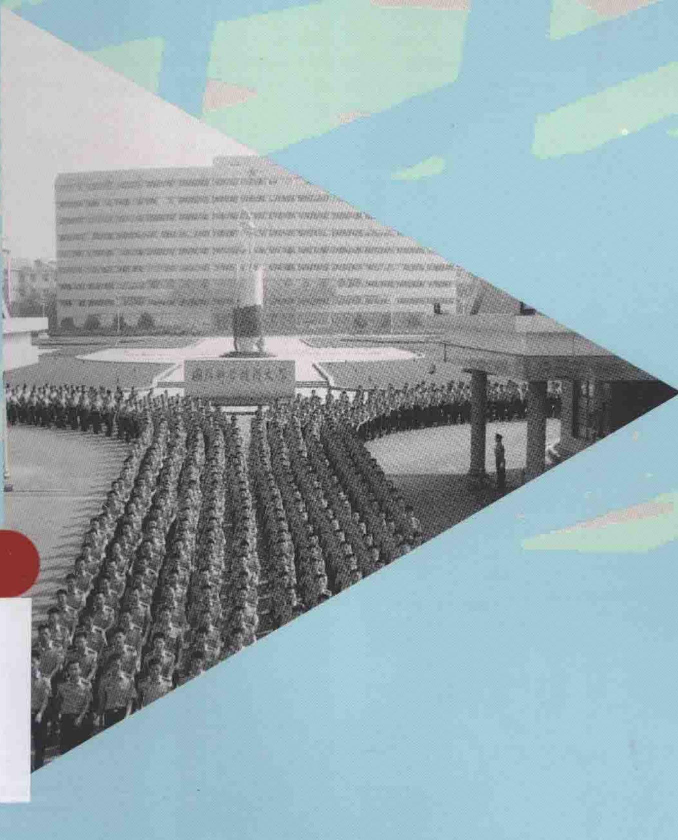
iCourse·教材

高等数学

第二版

上册

国防科学技术大学理学院
朱健民 李建平 主编



高等教育出版社

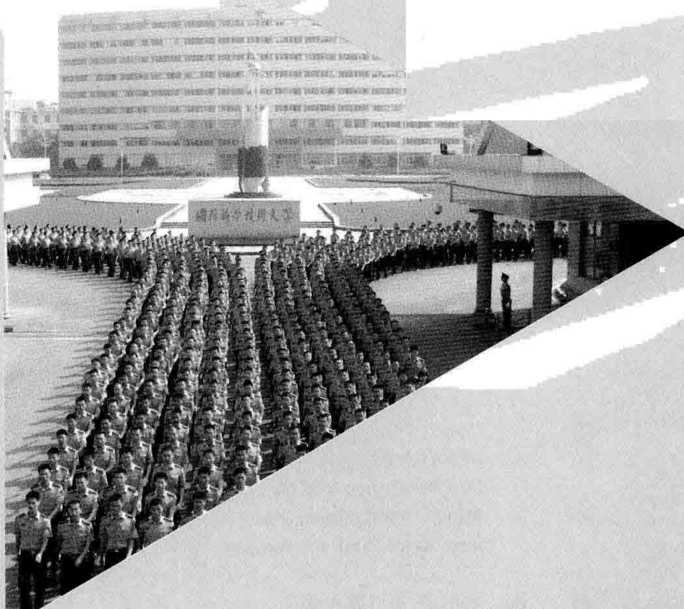
高等数学

GAODENG SHUXUE

第二版 上册

国防科学技术大学理学院

朱健民 李建平 主编



高等教育出版社·北京

内容简介

本书是与“爱课程”网上国防科学技术大学朱健民教授主讲的“高等数学 MOOC”配套使用的教材。全书分上、下两册，上册内容包括映射与函数、数列极限与数值级数、函数极限与连续、导数与不定积分、导数的应用、定积分及其应用、常微分方程，涵盖了“高等数学 MOOC”中的“高等数学（一）”、“高等数学（二）”、“高等数学（三）第 1 讲—第 5 讲”等内容。全书将“高等数学 MOOC”中的微视频、随堂测验、讨论题、PPT 课件、作业与测验在正文适当位置进行标注，将课堂学习和在线学习进行有机的融合。学生通过登录“爱课程”网或“中国大学 MOOC”手机客户端可以浏览微视频、PPT 课件，在线进行随堂测验及参与讨论，在提升课程教学效果的同时，便于学生的自主学习。

本书可作为高等学校非数学类专业的高等数学教材，也可供社会学习者学习“高等数学 MOOC”时参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册 / 朱健民，李建平主编. -- 2版. -- 北京 : 高等教育出版社，2015.8
iCourse・教材
ISBN 978-7-04-043104-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①朱… ②李… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第134973号

策划编辑 李晓鹏　责任编辑 李晓鹏　封面设计 张雨微　版式设计 张雨微
插图绘制 黄建英　责任校对 刘 莉　责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 北京中科印刷有限公司
开　　本 787 mm × 1092 mm 1/16
印　　张 22.75
字　　数 460 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2007 年 4 月第 1 版
　　　　 2015 年 8 月第 2 版
印　　次 2015 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 39.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 43104-00

与本书配套的高等数学MOOC使用说明

本书与爱课程网上的高等数学 MOOC(包含(一)~(五)5 门)配套使用,请登录网站后开始课程学习。

一、网站登录

1. 访问爱课程网 http://www.icourses.cn,在右上角点击“注册”,在注册页面输入邮箱、密码注册后,登录注册邮箱激活账号。已注册的用户直接输入邮箱和密码登录即可。

2. 希望通过“中国大学 MOOC”平台加深课程理解的读者,可以通过以下方式进行学习:

① 重新访问爱课程网,点击“中国大学 MOOC”栏目,在搜索栏中输入“高等数学”,找到相应课程。

② 进入课程后,点击“报名参加”或“立即参加”,开始课程学习。

3. 希望将高等数学 MOOC 作为本校课堂教学补充,且本校已使用高等数学 MOOC 作为 SPOC 的学生,可以通过以下方式进行学习:

① 重新访问爱课程网,点击“在线课程中心”栏目,在栏目下找到本校名称,进入后点击“进入本校专属(SPOC)课程”,点击“立即认证,开启学习之旅”,在弹出的页面中输入姓名、所在学校、学号、认证码进行身份认证。

② 身份认证通过后,重新点击“进入本校专属(SPOC)课程”,找到“高等数学”进入课程,在课程密码处输入任课教师指定的密码,点击“立即参加”,开始课程学习。

4. 希望将高等数学 MOOC 作为本校课堂教学补充,但本校未使用高等数学 MOOC 作为 SPOC 的学生,可以通过以下方式进行学习:

重新访问爱课程网,点击“在线课程中心”栏目,在栏目下点击“高等教育出版社”,找到“高等数学”进入课程,在课程密码处输入教材封底标签上的密码,点击“立即参加”,开始课程学习。

密码自登录之日起一年内有效,过期作废。

使用本密码如有任何问题,请发邮件至:lixp1@hep.com.cn。

二、资源说明

高等数学 MOOC 的课程资源按照单元、讲知识树的形式构成，每讲配有微视频、随堂测验、教学 PPT 和讨论题等内容，内容标题和特定图标为：

1. 微视频：针对知识点的系统讲解，视频短小精悍，时长均为 6~15 分钟，方便学生学习。

2. 随堂测验：针对知识点讲解的随堂测验，可以有效测试学生对知识的掌握程度，提高学习的效率。

3. 教学 PPT：与微视频紧密配套的教学 PPT，可以下载使用，也可供学生课前预习或课后复习使用。

4. 讨论题：针对每讲知识的综合讨论，启发学习的思维，激发学习的兴趣。

第二版前言

本书第一版从出版到现在，已经有八个年头。在这期间，国内外教学形势发生了翻天覆地的变化，尤其是以“慕课”为代表的大规模在线开放课程的兴起，对高等数学课程的内容和形式提出了新的要求。本次修订正是在这种形势下进行的，经过编者的共同努力，全新的第二版教材终于呈现在广大读者的面前。

第一版教材出版之时，正值国内外大学视频公开课的兴起，名校的教学影响力和其丰富的在线课程资源，将学习者的注意力从传统的大学课堂，吸引到了广阔的在线课堂，使学习者的学习不再受教学内容、教学进程和教学环境等因素的限制，极大地激发了学习者的学习热情和学习主动性。而近两年出现的大规模在线开放课程，更是把大学教学推到风头浪尖，更加丰富的在线课程资源，加之教学团队与学习群体形成的学习社区，弥补了视频公开课教学互动的缺失，让师生共同感受释疑解惑的全过程，也形成了丰富的教学拓展资源。相比之下，传统的纸质教材和授课模式在发挥其传统优势的同时，也显现出明显的不足，尤其是在与教学视频、在线测试与学习研讨互动等方面。只有将教材建设与在线开放课程建设相结合，才能焕发出传统教学的生命力，这也是第二版教材重点解决的问题。

教学视频资源建设是第二版教材修订工作的重要基础。这得益于国防科学技术大学于2012年下半年启动的高水平本科视频课建设，高等数学为其中的建设项目。由我校高等数学课程组教学骨干组成的课程建设项目组，确定了视频课的建设目标为“精心设计每讲内容，形成鲜明课程特色：设置问题，引入概念，突出直观，化解难点，结合应用，理解内涵，拓展知识，引发思考；运用现代教育技术手段，深化和拓展教学内容，建设丰富的辅助教学与学习资源；充分体现主讲教师的教学风采和人格魅力，引发学习者的好奇心，激发学习兴趣；发挥团队的作用，集中课程组教师的智慧和力量，促进我校高等数学课程建设水平的大提升”。视频课以高等数学第一版教材内容为基础，优化整合成100讲教学内容并完成各讲视频的录制，在保留传统高等数学内容的同时，补充和拓展了部分教学内容，如“微积分纵览”、“如何用Mathematica做微积分”、“函数的一致连续性”、“解非线性方程的牛顿切线法”、“向量场的微积分基本定理”、“微分方程稳定性初步”等内容，以满足不同学习者对学习内容的需求。

接下来，我们对视频课进行了“慕课”化改造。为适应“慕课”课程的特点和要求，将高等数学分成了五个部分：

“高等数学(一)”包括：一元函数极限、数值级数、连续函数，共21讲；

“高等数学(二)”包括：一元函数导数及应用、定积分及应用，共26讲；

“高等数学(三)”包括:常微分方程、空间解析几何,共 14 讲;

“高等数学(四)”包括:多元微分学及应用、重积分,共 21 讲;

“高等数学(五)”包括:曲线曲面积分、幂级数与傅里叶级数、微分方程定性理论初步,共 18 讲。

同时,将视频按知识点分割成 481 个微视频,它们构成了“高等数学 MOOC”的视频资源。然后,为微视频配备驻点测试题和随堂测验题,对每个教学单元配备测验题和讨论题,与教学课件等组成“高等数学 MOOC”的基本资源。

最后,经过课程团队的共同努力,国防科学技术大学“高等数学 MOOC”于 2014 年 5 月 20 日成为爱课程网的中国大学 MOOC 的首批上线课程。

本次修订,纸质教材在形式上相比第一版做了较大改动。双色印刷使文字图形更加生动形象,宽阔的留白将教材内容与“高等数学 MOOC”的教学资源紧密相连,极大地延伸了读者的学习空间。学习者使用教材的时候,结合“高等数学 MOOC”中的教学资源进行学习,可以对课堂学习进行补充,实现本校教师的教学特色与“慕课”优质资源的有机融合,有效提高了教学效率和教学质量。同时,为解决“高等数学 MOOC”开课周期与高校课程开设周期不对应的问题,我们在“爱课程”网上在线课程中心开设了“高等数学 MOOC”的 SPOC 课程,教师和学生可以随时随地访问本课程,为高校探索线上线下相结合的混合式教学模式提供了途径。

作为本书的学习者,充分利用与教材链接的资源将会让你体验同伴学习带来的新感受。首先,内容生动的教学视频向你娓娓道来知识的来龙去脉,有网络的地方就有老师面对面地向你授课,为你的学习带来极大的方便。其次,层次分明的驻点测验、随堂测验和单元测验将有效测试对知识的掌握程度,尽情享受收获知识的快乐。再次,讨论区更让你的学习不再孤独,当你在学习中遇到困惑时,立即有老师和学习者向你伸出援助之手,老师还可以通过讨论区“展示问题、提示引导、评判鼓励、示范解答”,真正做到师生之间、生生之间互相学习、互相促进。

纸质教材的内容符合教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会最新颁布的工科类本科高等数学教学基本要求,可以作为理工科高等学校高等数学或微积分课程的教学用书。按照我们的教学实践经验,课程在 160—180 学时的学校可以讲授除第十四章外的教学内容。纸质教材的内容继续保持第一版教材的特色,整合优化传统内容实现与高中数学及大学相关课程的顺利衔接,适当选择数学建模与数学实验的内容融入教材,将应用数学软件的技术手段贯穿教材始终,多角度引入和阐述教材涉及的重要概念。值得注意的是,上述特色在教学视频中得以发扬光大,使得纸质教材内容具有更强的感染力。为便于检索教学视频与高等数学五个部分的对应关系,每段视频标注有相应的编号,如“微视频 4-4-4 :二元函数全微分的概念”,表明其为高等数学(四)的第四讲的第四个微视频。

本教材的编写和在线课程资源建设是集体劳动的成果。教材第一章、第八章由周敏编写,第二、三、四、十一、十二章由朱健民编写,第五、六、九、十章由李建平编写,第七、十三、十四章由黄建华编写。刘雄伟负责实验题配置和大部分图形的绘制。王晓、倪谷炎、吴强、胡小荣、陈挚、陈吉美、唐斌兵、唐杨斌、戴丽、刘易成、龙汉、唐玲艳、李君、谢新艳等教师参与了习题的选

配和校对工作，罗建书教授对本书的编写给予了全程指导。全书由朱健民和李建平统稿、定稿。在线课程的教学资源由朱健民、李建平、黄建华、王晓、周敏、刘雄伟、罗永、赵侠、吴强、王焱、胡小荣、童照春等组成的团队共同建设。

最后，衷心感谢国防科学技术大学的各级领导对教材编写和"慕课"建设的高度重视和热情指导。感谢高等数学课程组的全体同志，他们的辛勤付出为我们积累了丰富的资源和经验，成为本次教材修订和课程资源建设的重要基础。感谢高等教育出版社的李晓鹏编辑，是他的精心策划和指导使教材呈现出时代特色。感谢"爱课程"及其团队，是他们搭建的中国大学 MOOC 平台让我们的教材与课程有了展示的舞台，在此以作者在中国大学 MOOC 上线一周年的感言表达对他们的谢意：

是你让大学课堂延伸到世界每个地方，
是你让广大学友汇聚到在线开放课堂，
是你让传统教学转变到学习者为中心，
是你让大学数学放射出迷人智慧之光，
感谢你，中国大学 MOOC
有你的地方就有无数慕友在尽情徜徉……

编　者

2015 年 5 月

第一版前言

这部高等数学教材是我们通过5年多的教学改革与实践,在对编写方案进行充分论证的基础上完成初稿,并经过一轮教学试点后修订而成的。

在教材编写过程中,我们始终将提高学生的数学素质和应用能力摆在首位,努力贯彻现代教育思想,改革、更新和优化微积分教学内容,使用现代教育技术,吸收国内外优秀教材的经验和我校多年来在高等数学教学改革、研究和实践中积累的成果,力求使教材更具特色。

(1) 努力实现课程体系和内容的优化整合

高等数学课程必须既注意高中数学教材中涉及的微积分内容,又注意到它和线性代数与空间解析几何、大学物理、工科专业课程内容及其表述之间的联系;既注意经典内容向现代数学的扩展,同时也有意弱化极限的严密化表述,以此降低学习难度。同时,努力减少课程之间重复内容的讲述,实现课程之间无缝衔接和知识的顺利过渡,从而真正实现课程体系的优化,彻底消除学生在知识表述的不一致性方面的认知负担。如将数列极限与数值级数合成一章,既可减少数列极限计算的重复训练,又能突出数列极限的应用;在多元函数微分学的处理上,采用向量方法,既加强了和线性代数之间的联系,又有利于向非线性最优化等领域的扩展;采用向量场的积分学,有利于加强高等数学与大学物理等课程的有机结合。

(2) 将数学建模及数学实验的思想与方法融入教材及课程教学中

将数学建模及数学实验的思想与方法融入教材及课程教学中,一方面利用数学软件开展数学实验,另一方面运用数学知识和数学软件工具解决来自自然科学、社会科学、工程及军事应用中的实际问题。这样设计教学内容,有助于培养学生多角度、多层次思考问题的习惯,有助于提升学生实践性动手能力,有助于拓宽学生的知识面和视野,有助于提高学生"用数学"的兴趣和能力,有助于培养学生科学研究的探索精神和创新意识。我们在内容的取舍和习题的选配上特别增加了应用性和实验性的内容,重点关注微积分在现代科学、工程及军事各领域的应用,以此加强数学课程的实践性教学环节,通过对开放性问题的探索,培养学习者的创新精神和创新能力。

(3) 将数学软件的学习和使用穿插在教学内容中

利用现代化的数学软件,如 Mathematica、Maple、MATLAB 等解决数学教学中计算、数值分析、图形处理等问题,将抽象的数学概念与理论直观化、实验化、可视化,有助于消除学生对数学知识的困惑,提高学生的学习兴趣。在涉及微积分内容的符号、数值计算以及图形显示等方面,将 Mathematica 软件的常用格式命令分散在教材相应章节介绍,使学习者在学习教材内容的同时,也学会了该数学软件的使用方法,同时也为淡化计算技巧、加强对概念的直观理解提供了

有利条件。

(4) 突出数学思想,通过多角度描述来加深对内容的理解

与传统高等数学教材相比,这本教材篇幅有较大的增加,这里并不是多个知识点的堆砌而使得内容如此庞大,其主要原因是增加了大量描述性的内容。无论是概念的引入、定理的建立还是应用例题的讲解,我们大都从不同角度、不同层次加以描述,并经常用数值表格或直观图形来阐明,让读者能在自我阅读过程中理解和把握学习内容,试图改变传统教材由于表述简洁而带来阅读上的困难。同时,教材的易读易懂,也为课堂教学变"细讲少练"为"精讲多练"提供了可能。

本教材是集体劳动的成果,在编写过程中充分发挥了团队的凝聚力和刻苦攻关的精神。其中,第一章由周治修编写,第二、三、四、十一、十二章由朱健民编写,第五、六章、九、十章由李建平编写,第七、十四章由黄建华编写,第八章由周治修、李建平共同编写,第十三章由罗建书编写。除此以外,周治修、胡小荣、刘雄伟、陈挚、周敏、吴强、陈吉美等同志参与了习题的选配和校对工作,刘雄伟同志为本书绘制了图形。全书由朱健民和李建平统稿、定稿,并对一些章节作了适当修改。

关于本教材的使用我们强调两点:首先,我们前面指出,本教材内容遵循"工科类本科数学基础课程教学基本要求",涵盖微积分和空间解析几何所要求的全部内容,因此适合高等工科院校工科和非数学类理科的所有教学对象。其次,通过我们的教学试点,我们认为在160学时以内,可以讲授本书除第十四章以外的全部内容。若不讲授空间解析几何(第八章),则148学时可以讲完剩余内容,不过该章内容也不失为一个好的阅读材料。对于只需满足基本要求的教学对象,还可根据具体情况,通过调整讲授内容减少课时。

在本书的编写过程中,我们参考了国内外大量的参考文献和资料,由于追根溯源的困难和不便,我们未在书中明确指出引用材料的出处。但我们深感正是这些优秀的参考文献和资料给我们带来诸多编写的启示,同时也为我们提供了大量可引用的素材,在此特别对参考文献和资料的作者表示衷心的感谢!

最后,感谢校、部和学院三级领导对本教材编写的支持和指导,学校训练部为教学试点提供有利条件,并设立专项课题给予经费支持,理学院院领导时刻关注编写及试点工作情况,并不时给予热情鼓励。同时也要感谢我校汪浩教授、黄柯棣教授、李圣怡教授、皇甫堪教授和杨晓东教授,他们认真评审了本教材的立项申请报告,并提出了许多建设性的意见。最后,特别感谢闫岘峰教授、敖武峰教授、李志祥教授,他们对本书初稿进行了认真细致的审阅,对整个编写工作给予了具体指导。正是由于有了领导、教师们的大力支持和鼓励,才使得高等数学教材建设顺利进行。高等教育出版社的王强编辑和李陶编辑对本书的选题和成书给予了大量的指导,在此表示衷心的感谢!

尽管我们倾注了极大的心血,但书中肯定还存在着不足,甚至某些错误,恳请大家及时指出,以便进一步修正。

编　者

2006年7月15日,长沙

目 录

第一章 映射与函数

集合是最基本的数学概念之一，尽管我们只需描述它，而不必给出其精确定义，但这丝毫不影响它在数学中的地位和所发挥的作用. 在集合概念基础上建立起来的集合论，几乎渗透到数学的每一个分支，使数学中曾经出现的迷惑杂乱变得清晰有序. 作为集合之间的关系，映射也是数学中非常重要的概念，它是数学上各种对应关系的抽象. 实数集合之间的映射——函数（一元函数），将是我们学习的重点，因为它是微积分乃至其他数学分支讨论的重要对象，客观世界的许多现象和规律都可以通过函数来描述和解释，因此构成许多运动和变化的数学模型. 另一方面，函数有明确的几何描述，即函数图形，它可以直观反映函数的变化性态. 通常我们将一元函数的图形称为曲线（平面曲线），但并不是任何平面曲线都对应着函数关系，参数方程的出现使得一般曲线有了定量的表述. 极坐标是参数表示的特殊情形，它与直角坐标一起在几何对象的代数表示上发挥着重要作用. 本章将重点对我们在中学学习过的函数概念作一个回顾与深化.

1.1 集合与映射

本节主要介绍集合的基本概念及性质、数轴上的区间与邻域、两个常用的不等式以及映射的概念.

MOOC
微视频
1－3－1
问题引入——集合论是如何产生的

1.1.1 集合

MOOC
微视频
1－3－2
集合的概念与运算——集合的概念

MOOC
随堂测验

1. 集合及其表示

一般地，将具有某种性质的对象汇聚成一个整体就形成一个集合. 这个整体中的对象就称为该集合的元素.

通常用大写英文字母来表示集合，用小写字母来表示元素. 若对象 a 是集合 A 中的元素，则称元素 a 属于集合 A，记作 $a \in A$；否则称元素 a 不属于 A，记作 $a \notin A$.

集合的表示方法通常有两种. 其一是枚举法，如

$$A=\{2,3,5,7\}, B=\{14,15,92,65,35\};$$

另一种方法就是描述法. 用这种方式写出的集合通常形如$\{x \mid p(x)\}$,其中$p(x)$是关于x的一个陈述句. 如上述集合A用描述法可表示为

$$C=\{x \mid x \text{是 1 到 10 之间的素数}\}.$$

这两种方法各有所长,有些集合若用描述法表示是相当繁琐的. 如要将集合B用描述法表出,恐怕得写成

$$D=\{x \mid x \text{为圆周率} \pi \text{的前 10 位小数顺序组成的 5 个两位数之一}\}.$$

需要注意的是,用描述法表示一个集合时,定义该集合所用的那个陈述句应当表达出一个清晰的概念. 诸如"某某班级的高个子男生"不能形成一个集合,因为"高个子"不是一个清晰确定的概念.

若两个集合所包含的元素完全一样,则称这两个集合相等,否则称为不相等,分别用"$=$"号和"$\neq$"号表示. 集合的相等与集合的名称和集合的表示法无关. 例如,上面提到的四个集合,我们有$A=C, B=D, A\neq B$.

如果集合A的每个元素皆是集合B的元素,称集合A为集合B的子集,记为$A\subseteq B$或$B\supseteq A$,读作A含于B或B包含A. 若$A\subseteq B$且$A\neq B$,则称集合A为集合B的真子集,记作$A\subsetneqq B$或$B\supsetneqq A$,读作A真含于B或B真包含A.

不包含任何元素的集合称为空集,记为$\varnothing$. 空集是任何集合的子集. 在研究具体问题时,若所考虑的集合总是某个特定集合的子集,则称该特定集合为全集,记作X.

MOOC
微视频
1-3-3
集合的概念与运算——集合的运算性质

MOOC
随堂测验

2. 集合运算及其性质

定义 1.1.1 由集合A和集合B的公共元素组成的集合,称为集合A和集合B的交集合,记为$A\cap B$,读作A交B. 集合A和集合B的交集合用描述法表示为

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

例 1 若A为全体军人构成的集合,B为全体大学生构成的集合,那么$A\cap B$为全体军人大学生构成的集合.

定义 1.1.2 将集合A的元素和集合B的元素汇合在一起组成一个新的集合,称为集合A和集合B的并集合,记为$A\cup B$,读作A并B. 用描述法表示为

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

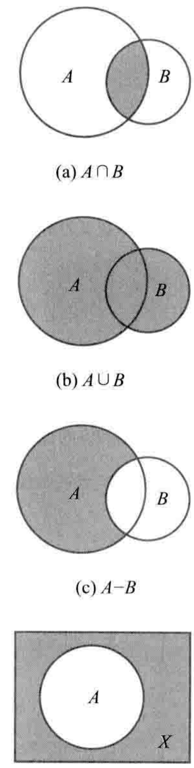
定义 1.1.3 将所有属于集合A而不属于集合B的元素汇合在一起组成一个新的集合,称为集合B相对于集合A的补集合,记为$A-B$,也叫做A与B的差

集. 集合 A 相对于全集 X 的补集合,称为集合 A 的补集合,记为 $\overline{A}$①. 用描述法表示为

$$A-B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}=A \cap \overline{B}.$$

例 2　若 $A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{c,d,e,f\}$,那么 $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$. 注意相同的元素算一个元素,c,d 只写一次. 而 $A\cap B=\{c,d\}$,$A-B=\{a,b\}$.

集合及其运算可以用文氏图来加以直观理解,如图 1.1.1 所示,阴影部分表示各运算结果.



(a) $A\cap B$　(b) $A\cup B$　(c) $A-B$　(d) $\overline{A}=X-A$

图 1.1.1　集合运算的文氏图

集合运算具有下列性质:

(1) 交换律　$A\cap B=B\cap A$,$A\cup B=B\cup A$.

(2) 结合律　$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$,$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

(3) 分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(4) 对偶律,又称德摩根律

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\quad \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

(5) 吸收律　$A\cup(A\cap B)=A$,$A\cap(A\cup B)=A$.

(6) 幂等律　$A\cup A=A$,$A\cap A=A$.

(7) 0-1 律　$A\cup\varnothing=A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$,$A\cup X=X$,$A\cap X=A$.

(8) 对合律　$\overline{\varnothing}=X$,$\overline{X}=\varnothing$,$A\cup\overline{A}=X$,$A\cap\overline{A}=\varnothing$,$\overline{\overline{A}}=A$.

集合运算的这些性质可以作为公理承认,当然有些性质可以由其余的某些性质推出,也就是说,这个系统是有冗余的. 但已经知道由交换律、分配律、0-1 律中的 $A\cup\varnothing=A$、$A\cap X=A$ 以及对合律中的 $A\cup\overline{A}=X$、$A\cap\overline{A}=\varnothing$ 组成的系统是完备且无冗余的.

最后我们再介绍一种集合的运算.

称集合 $\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$ 为集合 A 和集合 B 的笛卡儿积,又叫做直积,记为 $A\times B$.

例如,在图 1.1.2(a) 中,A,B 分别为一直线段上点的集合,$A\times B$ 为一矩形区域的点的集合;在图 1.1.2(b) 中,A 为一圆盘上点的集合,B 为一直线段上点的集合,$A\times B$ 为一圆柱体的点的集合.

从直积的角度看,二维平面就是一维数轴 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 的直积,即:$\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}$,记作 $\mathbb{R}^2$.

MOOC
微视频
1-3-4
集合的概念与运算——直积的概念

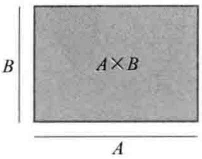
下面看一个直积的具体例子.

例 3　设 $A=\{-1,1\}$,$B=\{1,2,3\}$,则 $A\times B=\{(-1,1),(-1,2),(-1,3),(1,1),(1,2),(1,3)\}$. 如果把 A 看成 x 轴上的两点的集合,把 B 看成 y 轴上的三点的集合,那么 $A\times B$ 就是平面上对应的六点的集合,在图 1.1.3 中用空心圆圈表示.

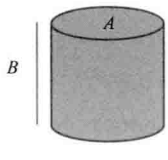
MOOC
随堂测验

① 国际标准规定 A 的补集用 $\complement_X A$ 表示,为排印方便,本书用 $\overline{A}$ 表示.

3. 实数集与连续性公理



(a) 线段A与线段B的笛卡儿积



(b) 圆盘A与线段B的笛卡儿积

图 1.1.2　笛卡儿积的直观图例

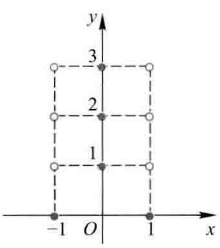


图 1.1.3　例 3 中直积的图示

实数集由有理数和无理数组成，记为 $\mathbb{R}$. 有理数集由正整数、负整数、正分数、负分数和零组成，记为 $\mathbb{Q}$. 正整数集记为 $\mathbb{N}_+$（在现行中学教材中，将正整数与 0 统称为自然数，自然数集记为$\mathbb{N}$）. 由正整数、负整数和零组成的集合称之为整数集，记为 $\mathbb{Z}$. 微积分学中所论之数通常为实数，偶尔也提及复数. 复数集记为 $\mathbb{C}$.

有理数又称分数，它能表示为有限小数或无限循环小数，如$\frac{3}{2}=1.5$，$\frac{1}{3}=0.333\cdots=0.\dot{3}$；无理数则是无限不循环小数，如$\sqrt{2}=1.414\cdots$，圆周率 $\pi=3.14159\cdots$ 及自然对数之底 $e=2.71828\cdots$ 都是无理数. 对一个任意指定的实数，想辨识出它是有理数还是无理数通常是一个困难的问题. 尚有许多数我们不知道它们是否是有理数，如著名的欧拉常数.

实数集上可以进行算术运算、代数运算. 实数之间还存在着大小关系，称为实数的有序性.

全体实数与数轴上的点是一一对应的，即每一实数恰好对应数轴上的一点，同时数轴上的每一点也恰好对应一个实数. 实数的这一特性称为实数的连续性或完备性. 全体有理数不能与数轴上的点形成一一对应.

实数集与有理数集在完备性上的差异还可以用实数的大小关系来描述. 这种观点在微积分学习中尤为重要. 为了阐明这种观点，我们先介绍两个概念：数集的上界与上确界.

设 E 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集，M 是一实数（常数）. 若 M 不小于 E 中的任何元素，则称 M 为数集 E 的一个上界.

MOOC
微视频
1－3－5
确界与连续性公理

当然，若 M 为数集 E 的一个上界，那么任何比 M 大的实数皆是数集 E 的一个上界. 另一方面，并不是任何数集都有上界，例如 $\mathbb{R}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{N}$ 都是无上界的.

设 E 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集，M 是一实数（常数），若 M 为数集 E 的一个上界且 M 不大于 E 的任何上界，换句话说，M 是 E 的最小上界，则称 M 为数集 E 的上确界.

既然上确界是最小上界，那么一个集合的上确界（若有的话）是唯一的. 另一方面，由于存在着无上界的集合，当然这些集合是无上确界的.

现在我们要问，是否存在着有上界而无上确界的非空数集？我们直觉地认为答案是否定的. 这就是连续性公理.

微积分学的基础是极限理论. 而连续性公理是极限论的基石，极限论中的一些重要结论需要由它才能推得.

连续性公理　非空有上界的实数集必有上确界.

连续性公理也称为确界原理. 与上界和上确界相对应，还可以定义数集的下界与下确界. 应当指出，利用上确界的连续性公理可以推出“非空有下界的数集必有下确界”.

例如，$A_1=\{2,3,5,7\}$表示不超过 10 的素数，它既有上界也有下界，而且也有上确界 7 和下确界 2. 但是对于无穷集合，情况就要复杂得多. 例如，如果用 A_2 表示所有的素数的集合，欧几里得在二千三百年前就已经证明了素数是无穷多的，所以它无上界，肯定也没有上确界，换句话说，就是没有最大的素数，但 2 是最小的素数. 求得一个较大的素数一直对人类智慧与计算能力提出挑战，当然现在对计算机的能力也提出挑战. 2013 年 1 月 25 日，美国一位数学爱好者发现了已知的最大素数. 这个素数共有 1 700 万位，可写成 2 的 57 885 161 次方减 1. 这是人类发现的第 48 个梅森素数（称形如 2^n-1 的素数为梅森素数）. 又如，集合 $B=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$ 既有上界又有下界，它的上确界是 1，下确界为 0，但 0 不在集合 B 中.

微视频
1-3-6
区间与邻域

随堂测验

1.1.2 区间与邻域

区间是用得较多的一类特殊数集. 区间分为有限区间与无限区间.

设 $a,b\in\mathbb{R}$，且 $a<b$，下面给出四种形式的有限区间：

（1）开区间 (a,b)，即数集

$$\{x\mid a<x<b\}.$$

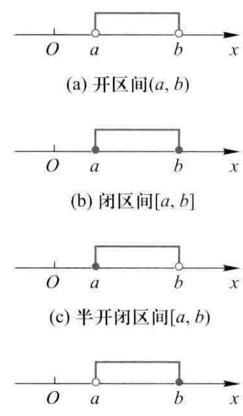
（2）闭区间 $[a,b]$，即数集

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

（3）半开闭区间，包含 $[a,b)$ 与 $(a,b]$，分别对应数集

$$\{x\mid a\leqslant x<b\},\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

以上 a 和 b 都是实数，称 a 为区间的左端点，b 为区间的右端点，$b-a$ 为区间的长度. 这些区间在数轴上对应一段线段，如图 1.1.4 所示.



(a) 开区间 (a,b)

(b) 闭区间 $[a,b]$

(c) 半开闭区间 $[a,b)$

(d) 半开闭区间 $(a,b]$

图 1.1.4 以 a,b 为端点的有限区间

无限区间有如下三种形式：

（1）无限开区间 $(-\infty,a)$ 与 $(a,+\infty)$，分别对应数集

$$\{x\mid x<a\},\{x\mid x>a\}.$$

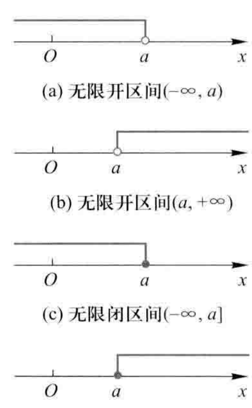
这里，记号 $-\infty$ 与 $+\infty$ 分别读作“负无穷大”与“正无穷大”.

（2）无限闭区间 $(-\infty,a]$ 与 $[a,+\infty)$，分别对应数集

$$\{x\mid x\leqslant a\},\{x\mid x\geqslant a\}.$$

（3）全体实数的集合 $\mathbb{R}$ 也可记作区间 $(-\infty,+\infty)$，它在几何上对应整个实数轴.

无限开区间与无限闭区间在数轴上如图 1.1.5 所示.



(a) 无限开区间 $(-\infty,a)$

(b) 无限开区间 $(a,+\infty)$

(c) 无限闭区间 $(-\infty,a]$

(d) 无限闭区间 $[a,+\infty)$

图 1.1.5 无限区间

邻域也是一个常用的数学概念. 我们给出它的正式定义.

定义 1.1.4 设 δ 是某一个正数，则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的一个 δ 邻