普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学

（本科少学时类型）（第四版） 下册

同济大学数学系 编

高等教育出版社

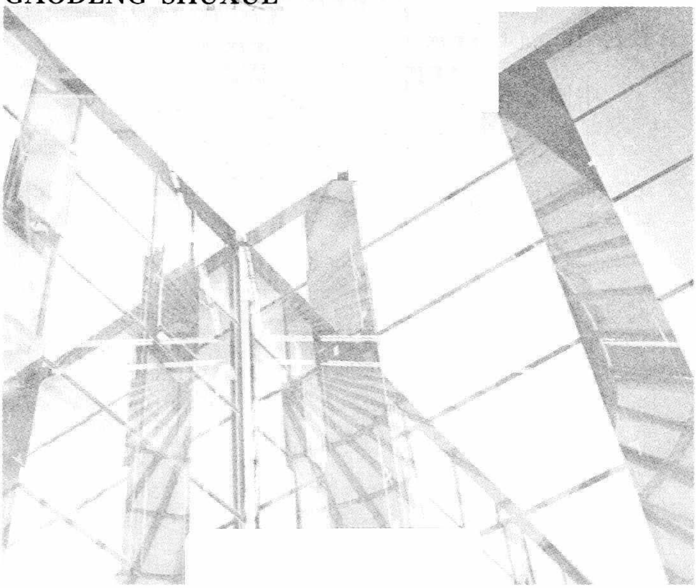
普通高等教育"十一五"

高等数学

（本科少学时类型）（第四版）下册

同济大学数学系 编

GAODENG SHUXUE



高等教育出版社·北京

内容提要

本书结构严谨，语言平实，易教易学，分上、下两册出版。上册6章，内容为函数与极限、一元函数微积分学、微分方程；下册4章，内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学、无穷级数。本书第四版修订的主要依据是最近正式公布的工科类本科微积分课程教学基本要求，并充分考虑本科少学时类型和专科的微积分课程教学实际，恰当把握理论深度，突出微积分中实用的分析和计算方法，着重基本知识的掌握和基本技能的训练，注意与中学数学教学的衔接。在大部分目的后面配置了与每一目内容紧密结合的基本概念题或简单计算题，在每章的后面配置了用于阶段复习的章复习题，便于学生及时消化和掌握所学内容。本书可作为本科少学时和专科的高等数学教材或参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册 / 同济大学数学系编．-- 4版．--
北京 ：高等教育出版社，2015.8
本科少学时类型
ISBN 978-7-04-043118-6

Ⅰ．①高… Ⅱ．①同… Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第134900号

策划编辑 于丽娜　责任编辑 蒋 青　封面设计 王 睢　版式设计 范晓红
插图绘制 邓 超　责任校对 胡美萍　责任印制 韩 刚

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 涿州市星河印刷有限公司
开　　本 850mm×1168mm 1/32
印　　张 8.125
字　　数 200千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 1978年3月第1版
　　　　 2015年8月第4版
印　　次 2015年8月第1次印刷
定　　价 16.00元

物 料 号 43118-00

目　录

第七章　向量代数与空间解析几何 …… 1
第一节　向量及其线性运算 …… 1
一、向量的概念 …… 1
二、向量的加减法 …… 3
三、向量与数的乘法 …… 5
习题 7－1 …… 8
第二节　点的坐标与向量的坐标 …… 8
一、空间直角坐标系 …… 8
二、利用坐标作向量的线性运算 …… 11
三、向量的模、两点间的距离 …… 13
四、向量的方向角与方向余弦 …… 14
五、向量的投影 …… 16
习题 7－2 …… 17
第三节　数量积·向量积·*混合积 …… 18
一、两向量的数量积 …… 18
二、两向量的向量积 …… 21
*三、向量的混合积 …… 25
习题 7－3 …… 27
第四节　平面及其方程 …… 28
一、点的轨迹·方程的概念 …… 28
二、平面的点法式方程 …… 29

三、平面的一般方程 …… 31
四、两平面的夹角 …… 33
习题 7 – 4 …… 35
第五节 空间直线及其方程 …… 36
一、空间直线的一般方程 …… 36
二、空间直线的点向式方程与参数方程 …… 37
三、两直线的夹角 …… 39
四、直线与平面的夹角 …… 40
五、综合举例 …… 42
习题 7 – 5 …… 45
第六节 曲面及其方程 …… 46
一、柱面 …… 46
二、旋转曲面 …… 48
三、二次曲面 …… 50
习题 7 – 6 …… 55
第七节 空间曲线及其方程 …… 56
一、空间曲线的一般方程 …… 56
二、空间曲线的参数方程 …… 57
三、空间曲线在坐标面上的投影 …… 59
习题 7 – 7 …… 62
第七章复习题 …… 62
第八章 多元函数微分法及其应用 …… 65
第一节 多元函数的基本概念 …… 65
一、多元函数的概念·区域 …… 65
二、多元函数的极限 …… 70
三、多元函数的连续性 …… 72
习题 8 – 1 …… 74

第二节　偏导数 …… 75
一、偏导数的定义及其计算法 …… 75
二、高阶偏导数 …… 80
习题 8 – 2 …… 83
第三节　全微分 …… 84
习题 8 – 3 …… 90
第四节　多元复合函数的求导法则 …… 91
习题 8 – 4 …… 97
第五节　隐函数的求导公式 …… 98
习题 8 – 5 …… 102
第六节　多元函数微分法的几何应用举例 …… 102
一、空间曲线的切线与法平面 …… 102
二、曲面的切平面与法线 …… 104
习题 8 – 6 …… 108
第七节　多元函数的极值及其求法 …… 109
一、多元函数的极值及最大值、最小值 …… 109
二、条件极值 …… 113
习题 8 – 7 …… 116
第八章复习题 …… 117
第九章　重积分及曲线积分 …… 119
第一节　二重积分的概念与性质 …… 119
一、曲顶柱体的体积与二重积分 …… 119
二、二重积分的性质 …… 122
习题 9 – 1 …… 124
第二节　二重积分的计算法 …… 125
一、利用直角坐标计算二重积分 …… 125
二、利用极坐标计算二重积分 …… 133
习题 9 – 2 …… 138

第三节 二重积分的应用 …………………………… 141
一、曲面的面积 …………………………… 141
二、平面薄片的质心 …………………………… 144
三、平面薄片的转动惯量 …………………………… 146
习题 9－3 …………………………… 147
*__第四节 三重积分__ …………………………… 148
一、三重积分的概念 …………………………… 148
二、三重积分的计算法 …………………………… 149
*习题 9－4 …………………………… 155
*__第五节 对弧长的曲线积分__ …………………………… 155
一、对弧长的曲线积分的概念 …………………………… 156
二、对弧长的曲线积分的计算法 …………………………… 158
*习题 9－5 …………………………… 161
*__第六节 对坐标的曲线积分__ …………………………… 162
一、对坐标的曲线积分的概念 …………………………… 162
二、对坐标的曲线积分的计算法 …………………………… 165
*习题 9－6 …………………………… 169
*__第七节 格林公式及其应用__ …………………………… 170
一、格林公式 …………………………… 170
二、平面上曲线积分与路径无关的条件…………………………… 173
*习题 9－7 …………………………… 177
第九章复习题 …………………………… 179
第十章 无穷级数 …………………………… 182
第一节 常数项级数的概念与性质 …………………………… 182
一、常数项级数的定义 …………………………… 182
二、级数的性质 …………………………… 185
习题 10－1 …………………………… 188

第二节　常数项级数的审敛法 …………………………… 189
一、正项级数及其审敛法 …………………………… 190
二、交错级数及其审敛法 …………………………… 196
三、绝对收敛与条件收敛 …………………………… 198
习题 10 - 2 …………………………… 201
第三节　幂级数 …………………………… 202
一、函数项级数的一般概念 …………………………… 202
二、幂级数及其收敛区间 …………………………… 203
三、幂级数的运算 …………………………… 208
习题 10 - 3 …………………………… 210
第四节　函数展开成幂级数 …………………………… 210
习题 10 - 4 …………………………… 217
***第五节　幂级数在近似计算中的应用** …………………………… 217
*习题 10 - 5 …………………………… 222
第十章复习题 …………………………… 222
附录　二阶和三阶行列式简介 …………………………… 225
思考题答案 …………………………… 231
习题答案 …………………………… 236

第七章

向量代数与空间解析几何

在这一章里,我们先引进向量的概念,介绍向量的一些运算,然后以向量为工具讨论空间的平面和直线,最后介绍二次曲面和空间曲线的部分内容.

第一节　向量及其线性运算

一、向量的概念

客观世界中有这样一类量,它们既有大小,又有方向,例如位移、速度、加速度、力、力矩等,这一类量称为向量(也称矢量).

数学上常用有向线段来表示向量,有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{AB}$(图 7-1).有时也用一个黑体字母,或为便于书写,在字母上面加箭头来表示向量,例如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a},\vec{r},\vec{v},\vec{F}$ 等.

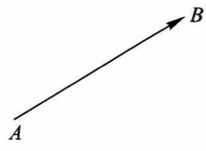


图 7-1

在实际问题中,有些向量与其起点有关(例如质点的运动速度与该质点的位置有关,一个力与该力的作用点的位置有关),有些向量与其起点无关.由于一切向量的共性是它们都有大小和方向,因此数学上只研究与起点无关的向量,并称这种向量为自由向量(以后简称为向量),即只考虑向量的大小和方向,而不论它的起点在什么地方.当遇到与起点有关的向量

时,可在一般原则下做特别处理.

由于我们只讨论自由向量,所以如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等,且方向相同,我们就说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这就是说,经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

向量的大小叫做向量的模. 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{a}$, $\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$, $|\boldsymbol{a}|$, $|\vec{a}|$. 模等于 1 的向量叫做单位向量. 模等于零的向量叫做零向量,记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点和终点重合,它的方向可以看作是任意的.

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 任取空间一点 O, 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 规定不超过 π 的 $\angle AOB$ (设 $\varphi=\angle AOB, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$) 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 7-2), 记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$, 即 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量,规定它们的夹角可在区间 $[0,\pi]$ 上任意取值.

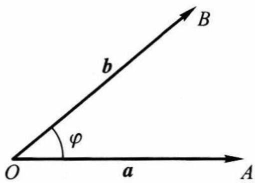


图 7-2

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为零或 π, 就称这两个向量平行,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量与另一向量的夹角可以在区间 $[0,\pi]$ 上任意取值,因此可以认为零向量与任何向量都平行.

如果 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$, 就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直,记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 由于零向量与另一向量的夹角可以在区间 $[0,\pi]$ 上任意取值,因此可以认为零向量与任何向量都垂直.

当两个平行向量的起点放在同一点时,它们的终点和公共起点应在一条直线上,因此,两向量平行,又称两向量共线.

类似还有向量共面的概念. 设有 k $(k\geqslant3)$ 个向量,当把它们的起点放在同一点时,如果 k 个终点和公共起点在一个平面上,就称这 k 个向量共面.

思考题 1 如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等,那么 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是否相等呢? 如

果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，那么 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是否平行呢？

二、向量的加减法

向量的加法运算规定如下：

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC（图 7－3），那么向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

上述作出两向量之和的方法叫做向量相加的三角形法则.

向量相加的三角形法则的实际背景是力学上求合力或合速度的平行四边形法则：当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB，AD 为边作一平行四边形 $ABCD$，连接对角线 AC（图 7－4），向量 $\overrightarrow{AC}$ 即等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和. 显然，这个和向量就是按三角形法则得出的 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

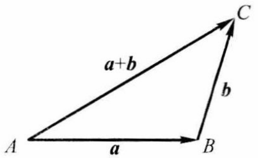


图 7－3

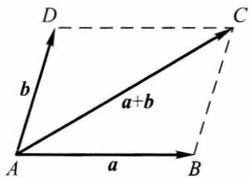


图 7－4

向量的加法符合下列运算规律：

（1）交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

（2）结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

这是因为，按向量加法的规定（三角形法则），从图 7－4 可见：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c},$$

所以向量的加法符合交换律. 又如图 7－5 所示，

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD},$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD},$$

所以向量的加法符合结合律.

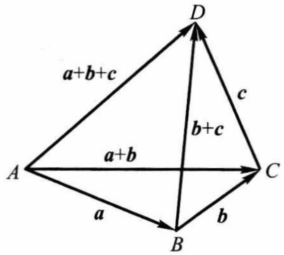


图 7－5

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$. 由此，规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$（图 7－6(a)）.

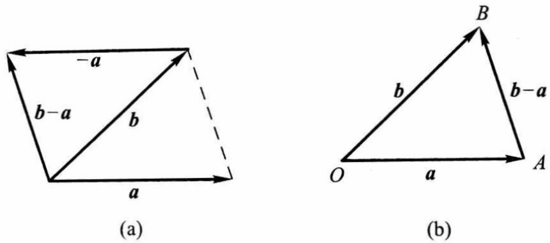


图 7－6

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

显然，任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O，有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}.$$

因此，若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$（图 7－6(b)）.

由于三角形两边之和大于第三边，故有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \quad 及 \quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中等号在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

思考题 2　如图 7-7 所示，若记$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{d}$，试将 $\boldsymbol{a}$ 用 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 表示出来.

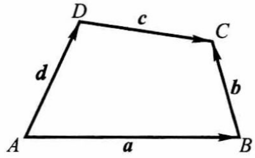


图 7-7

三、向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的.

特别地，当 $\lambda=\pm1$ 时，有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\quad (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

向量与数的乘积符合下列运算规律：

(1) 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

这是因为，由向量与数的乘积的规定可知，向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$，$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$，$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 都是平行的向量，它们的方向也是相同的，而且

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\mu(\lambda\boldsymbol{a})|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|,$$

所以

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}.$$

(2) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

这个规律同样可以按向量与数的乘积的规定来证明，这里从略了.

向量相加及数乘向量统称为向量的线性运算.

例　在平行四边形 $ABCD$ 中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点（图 7-8）.

解 由于平行四边形的对角线互相平分,所以

$$a+b=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM},$$

即

$$-(a+b)=2\overrightarrow{MA},$$

于是

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(a+b).$$

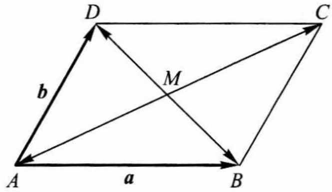


图 7-8

因为$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$,所以$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(a+b)$.

又因 $-a+b=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$,所以$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(b-a)$.

由于$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$,所以$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(a-b)$.

前面已经讲过,模等于 1 的向量叫做单位向量. 通常用 e_a 表示与非零向量 a 同方向的单位向量. 按照向量与数的乘积的规定,由于 $|a|>0$,所以 $|a|e_a$ 与 e_a 的方向相同,即 $|a|e_a$ 与 a 的方向相同. 又因 $|a|e_a$ 的模是

$$|a||e_a|=|a|\cdot 1=|a|,$$

即 $|a|e_a$ 与 a 的模也相同,因此,

$$a=|a|e_a.$$

此式表明,任何一个非零向量可由该向量的模(即向量的大小)与该向量同方向的单位向量表示为数乘向量的形式,这也就反映出了向量具有大小及方向的属性. 我们规定,当 $\lambda\neq 0$ 时,$\frac{a}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}a$.

由此,上式又可写成

$$\frac{a}{|a|}=e_a.$$

这表示一个非零向量除以它的模就得到与原向量同方向的单位向量.

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系. 即有

定理　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充要条件是:存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证　条件的充分性是显然的,下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$. 取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负值,即有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向,且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

再证数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,两式相减,便得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$

即 $|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0$. 因 $|\boldsymbol{a}|\neq0$,故 $|\lambda-\mu|=0$,亦即 $\lambda=\mu$.

上述定理是建立数轴的理论依据. 我们知道,给定一个点、一个方向及单位长度,就确定了一条数轴. 由于一个单位向量既确定了方向又确定了单位长度,因此,只要给定一个点及一个单位向量,就确定了一条数轴. 设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox(图 7-9),并约定单位向量 $\boldsymbol{i}$ 所指的方向为数轴 Ox 的正向,与 $\boldsymbol{i}$ 方向相反的方向为 Ox 的负向. 对于数轴上任一点 P,对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$,由于 $\overrightarrow{OP}/\!/\boldsymbol{i}$,根据上述定理,必有唯一的实数 x,使 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$,并知 $\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应. 如果用符号“$\longleftrightarrow$”表示一一对应关系,则上述一一对应关系可表示为

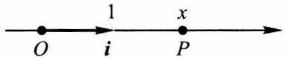


图 7-9

$$\text{点 } P \longleftrightarrow \text{向量 } \overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i} \longleftrightarrow \text{实数 } x,$$

从而数轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系,据此,定义实数 x 为数轴上点 P 的坐标.

由此可知,数轴上点 P 的坐标为 x 的充要条件是 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$.

思考题 3　在三角形 ABC 的边 BC 上插入一点 D,使 $|\overrightarrow{BD}|=2|\overrightarrow{DC}|$,试

以$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$表示向量$\overrightarrow{AD}$.

习题 7－1

1. 设$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.试用$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$来表示$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分,试用向量证明:它是平行四边形.

3. 把$\triangle ABC$的BC边五等分,设分点依次为D_1,D_2,D_3,D_4,再把各分点与点A连接,试以$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$表示向量$\overrightarrow{D_1A}$,$\overrightarrow{D_2A}$,$\overrightarrow{D_3A}$和$\overrightarrow{D_4A}$.

4. 用向量的方法证明:梯形两腰中点的连线平行于底边且其长度等于两底边长度和的一半.

第二节 点的坐标与向量的坐标

一、空间直角坐标系

在空间取定一点O和三个两两垂直的单位向量$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$,就确定了三条都以O为原点的两两垂直的数轴,依次记为x轴(横轴)、y轴(纵轴)、z轴(竖轴),统称为坐标轴,它们组成一个空间直角坐标系,称为$Oxyz$坐标系(图 7－10).

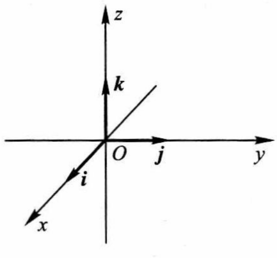


图 7－10

建立空间直角坐标系时,习惯上取右手系,即x,y,z三条轴的方向符合右手规则,这就是:以右手握住z轴,当右手的四个手指从正向x轴以$\frac{\pi}{2}$角度转向正向y轴时,大拇指的指向就是z轴的正向,如图 7－11 所示.

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面,这样定出的三个平面统称为坐标面.x轴及y轴所确定的坐标面叫做xOy面,另