

“十二五”国家重点图书出版规划

物理学名家丛书

量子场论

Quantum Field Theory

段一士 著

高等教育出版社

“十二五”国家重点图书出版规划

物理学名家丛书

量子场论

Liangzi Changlun

Quantum Field Theory

段一士 著

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是作者长期讲授量子场论课程的经验总结,本书的讲义在兰州大学使用多年,是我国最早的量子场论教材之一。

本书第一章介绍了量子场论的研究对象:粒子和标准模型,便于初学者结合粒子物理这个量子场论的研究对象学习场论。第二章是经典场论,从四维时空的力学量算符化导出几类粒子的相对论量子力学波动方程。以作者早期提出的广义守恒定理,统一描述了场的守恒定律、守恒荷与微量变换的关系。第三章是自由场的量子化,第四章是场的相互作用 S 矩阵,均以量子电动力学为主,强调其方法可以推广到弱电统一理论和量子色动力学。本书内容化难为易、言简意赅、一语道破而不失深刻内涵。

本书可作为高等学校量子场论课程的教材,也可供粒子物理学工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

量子场论/段一士著. --北京:高等教育出版社,
2015.12

(物理学名家丛书)

ISBN 978-7-04-041823-1

I. ①量… II. ①段… III. ①量子场论 IV.
①O413.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 017104 号

策划编辑 高建
插图绘制 杜晓丹

责任编辑 张海雁
责任校对 王雨

封面设计 杨立新
责任印制 朱学忠

版式设计 王艳红

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 北京信彩瑞禾印刷厂
开本 787mm×960mm 1/16
印张 17.5
字数 310千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landracom.com>
<http://www.landracom.com.cn>
版次 2015年12月第1版
印次 2015年12月第1次印刷
定价 37.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 41823-00



段一士，男，汉族，祖籍四川武胜县，1927 年生于北京，著名理论物理学家，教授，博士生导师。

1951 年毕业于南京大学前身金陵大学，1953 年至 1956 年在苏联莫斯科大学物理系学习，获副博士学位，1956 年至 1957 年在苏联 Dubna 联合核子研究所工作，1957 年回国后至今在兰州大学物理系（现物理学院）任教，历任兰州大学物理系主任，理论物理研究所所长、名誉所长，中国高能物理学会理事，中国物理学会理事，甘肃省物理学会理事长、名誉理事长。

从事群论、量子场论、粒子物理、广义相对论、拓扑场论等方面的教学和科研工作，取得了许多重要研究成果。在国际上首先提出引力场的广义协变守恒定律、规范势可分解及其内部结构理论，并建立了拓扑场论中严格的拓扑流理论。多次受邀赴美国、意大利等国家讲学。多年来为我国培养了许多理论物理方面的优秀人才，在国内外享有崇高声誉，曾获国家自然科学奖、教育部科技进步奖、中国人民解放军科技进步奖。1984 年被评为全国优秀教师，1990 年被评为全国高等学校先进科技工作者。

《物理学名家丛书》编委会

主 编

冯 端 院士 南京大学

编 委 (按拼音排序)

陈式刚 院士 北京应用物理与计算数学研究所

段一士 教授 兰州大学

龚 敏 教授 四川大学

郭光灿 院士 中国科学技术大学

胡 岗 教授 北京师范大学

金晓峰 教授 复旦大学

马伯强 教授 北京大学

母国光 院士 南开大学

阮 东 教授 清华大学

石 兢 教授 武汉大学

唐孝威 院士 浙江大学

陶瑞宝 院士 复旦大学

田德诚 教授 武汉大学

王克明 院士 山东大学

邢定钰 院士 南京大学

于 录 院士 中国科学院理论物理研究所

张进修 教授 中山大学

赵光达 院士 北京大学

赵忠贤 院士 中国科学院物理研究所

郑志刚 教授 北京师范大学

朱邦芬 院士 清华大学

物理学名家丛书

978-704031147-1	半导体微纳电子学	夏建白
978-704031205-8	物理学中的群论	陶瑞宝
978-704019898-0	量子统计物理学	杨展如
978-704021960-9	现代天体力学导论	孙义燧等
978-704009925-6	高等量子力学(第二版)	喀兴林
978-704011576-5	固体理论(第二版)	李正中
978-704006997-6	群论及其在固体物理中的应用	徐婉棠
978-704041823-1	量子场论	段一士

前 言

量子场论是研究粒子的理论。20世纪20年代量子力学建立不久，结合相对论，量子场论就开始建立，并且一直是理论物理最活跃的前沿学科之一。量子场论被广泛应用于统计物理学、天体物理学、固体物理学、高能物理学、量子引力等学科和领域。由于量子场论是具有相当深度和难度的现代物理理论，从而使初学者遇到不少困难。大多数量子场论教材起点较高，更使初学者难以适应。鉴于此，作者深感有编写一本比较适用于初学者的教科书的必要。作者1957年从苏联莫斯科大学研究生毕业回国后建立兰州大学理论物理专业，编写了量子场论教材并在兰州大学开始主讲这门课程，同时还自编教材给本科生开设了群论和广义相对论课程，持续至今。

本书主要阐述量子场论的基础。第一章绪论主要介绍量子场论的研究对象即粒子及其反应，简单介绍了量子电动力学方法的优点和局限。第二章第一部分主要讲相对论情况下由粒子物理量的算符化得到经典场的各种运动方程，第二部分以作者发现的广义守恒定理 I 和 II 为基础，建立了各种场在相应变换下的守恒定理和守恒量。第三章讲自由场的二次量子化和传播子。第四章讲场的相互作用和 S 矩阵，用微扰论方法导出电磁作用时粒子的反应截面和衰变寿命。

本书的讲义在兰州大学使用多年，得到了学生的普遍好评。本书在出版过程中，得到了高等教育出版社的大力支持，在此表示感谢。

谬误之处，敬希读者指正。

段一士

2014年12月于兰州

目 录

第一章 绪论	1
§ 1 组成物质的粒子	1
§ 2 量子场论研究的对象	5
第二章 场的运动方程式和守恒定律	7
§ 3 狭义相对论与标量场方程式	7
§ 4 矩阵空间与旋量	12
§ 5 旋量场方程式	18
§ 6 向量场方程式	30
§ 7 场函数的变换规律	33
§ 8 场论中的 Lagrange(拉格朗日) 原理	38
§ 9 经典力学中的广义守恒原理	46
§ 10 场论中的广义守恒原理	51
§ 11 能量、动量、张量与能量、动量守恒定律	57
§ 12 角动量张量与角动量守恒定律	62
§ 13 电流密度向量与电荷守恒定律	69
§ 14 经典场论的总结与常用单位	72
第三章 自由场的二次量子化	77
§ 15 二次量子化的基础和量子场论的基本假设	77
§ 16 Schrödinger 表象与 Heisenberg 表象	82
§ 17 $\delta(x)$ 、 $\delta_{\pm}(x)$ 、 $\theta^{\pm}(x)$ 、 $\gamma(x)$ 和 $\varepsilon(x)$ 等五种函数的性质	86
§ 18 产生和消灭粒子的算符与场函数的傅里叶表示	92
§ 19 实标量场的二次量子化	99
§ 20 实标量场函数 $\varphi(x)$ 的对易关系式与 $\Delta(x)$ 、 $\Delta^{(1)}(x)$ 函数	109
§ 21 复标量场的二次量子化	113
§ 22 向量场或电磁场的二次量子化	119
§ 23 电磁场函数 $A_i(x)$ 的对易关系式与 $D(x)$ 、 $D^{(1)}(x)$ 函数	132
§ 24 Λ_{\pm} 和 Σ_{\pm} 投影算符与旋量场函数的傅里叶表示	135
§ 25 旋量场的二次量子化	146
§ 26 旋量场函数 $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 的反对易关系式与 $S(x)$ 、 $S^{(1)}(x)$ 两矩阵函数	154

§ 27	电荷共轭变换	158
§ 28	场方程式的格林函数与 Feynman 函数	163
§ 29	N -乘积、 p -乘积和 T -乘积	172
§ 30	场论中常用奇异函数的环路积分表示	178
第四章	场的相互作用与 S 矩阵 (量子电动力学)	185
§ 31	场的相互作用的 Lagrange 函数	185
§ 32	场在相互作用情况下的运动方程式与相互作用哈密顿 \hat{H}	190
§ 33	相互作用表象	194
§ 34	$U(t, t_0)$ 矩阵和它的性质	198
§ 35	S 矩阵和它在量子电动力学中的形式	205
§ 36	T -乘积展开的 Wick 定理和 S 矩阵的展开式	209
§ 37	S 矩阵的 Feynman 图解	215
§ 38	Furry 关于电子封闭内线的定理	222
§ 39	S 矩阵的矩阵元素	225
§ 40	S 矩阵的动量表象	231
§ 41	粒子反应的概率和截面	238
§ 42	光子或电子的自旋状态的求和与平均的公式	244
§ 43	在相对论情况下的 Rutherford 散射问题	248
§ 44	光子和电子的散射 (Compton 效应)	251
§ 45	正负电子对湮没为两个光子	260
附录:	关于 Feynman 图解问题的补充材料	267

第一章 绪 论

§1 组成物质的粒子

按照现代的观点,物质是由粒子组成的.这里所谓的物质,应该包括组成物体的原子,太空中飞行着的宇宙射线,以及它们与原子撞击所产生的新粒子.

随着科学的发展,粒子的概念有了很大的改变.人类曾认为原子是物质的最小粒子,而今大家都知道原子是由原子核中的质子、中子以及围绕着原子核运动的电子所组成的.到现在为止,已经发现的粒子有数百种之多,而物理学家还进行着对于质子和中子内部结构的研究.

在物理学的发展中,最早发现的粒子有光子(γ)、电子(e^-)和质子(p).因此,现代粒子的分类,通常以这三种粒子的静止质量为标准,详述如下:

1. 轻子

静止质量介于光子与电子的静止质量之间的粒子称为轻子,即

$$m_{\text{光子}} \leq m_{\text{轻子}} \leq m_{\text{电子}}$$

轻子有以下几种:

(1) 光子 γ

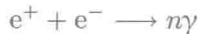
静止质量 $m_{\gamma} = 0$.

(2) 中微子 ν 和反中微子 $\bar{\nu}$

静止质量也为零.但与光子不同,光子的自旋为 1,而中微子与反中微子的自旋则为 1/2.

(3) 电子 e^- 与正电子 e^+

静止质量 $m_e = 0.9109 \times 10^{-27}$ g. 正电子与电子相遇会湮没为数个光子,即



2. 介子

静止质量介于电子与质子的静止质量之间的粒子称为介子,即

$$m_{\text{电子}} < m_{\text{介子}} < m_{\text{质子}}$$

现在已经发现的介子有下列数种:

(1) μ^\pm 子

静止质量为 $206.7m_e$, μ 子是不稳定的粒子, 可衰变为正负电子、中微子和反中微子:

$$\mu^\pm \longrightarrow e^\pm + \nu + \bar{\nu}$$

(2) π^\pm 与 π^0 介子

π^\pm 介子的静止质量约为 $273m_e$. π^0 介子的质量约为 $264m_e$.

π 介子也是不稳定的粒子, 其衰变的方式如下:

$$\pi^\pm \longrightarrow \mu^\pm + \pi + \nu$$

$$\pi^0 \longrightarrow 2\gamma$$

(3) K^\pm 与 K^0 介子

静止质量约为 $965m_e$, K 介子依其衰变后产生的粒子不同, 而分为下列五种:

① K_{π^2} 介子

$$K_{\pi^2}^\pm \longrightarrow \pi^\pm + \pi^0$$

$$K_{\pi^2}^0 \longrightarrow \pi^\pm + \pi^\mp \quad (\text{或 } \pi^0 + \pi^0)$$

$$K_{\pi^2} \text{ 介子又名 } \theta \text{ 介子 } \quad K_{\pi^2}^\pm \equiv \theta^\pm, K_{\pi^2}^0 \equiv \theta^0$$

② K_{π^3} 介子

$$K_{\pi^3}^\pm \longrightarrow \pi^\pm + \pi^\mp + \pi^\pm \quad (\text{或 } \pi^\pm + \pi^0 + \pi^0)$$

$$K_{\pi^3}^0 \longrightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 \quad (\text{这个衰变方式存在与否, 尚未最后肯定})$$

$$K_{\pi^3} \text{ 介子又名 } \tau \text{ 介子, } K_{\pi^3}^\pm \equiv \tau^\pm, K_{\pi^3}^0 \equiv \tau^0$$

③ K_{μ^2} 介子

$$K_{\mu^2}^\pm \longrightarrow \mu^\pm + \nu$$

④ K_{μ^3} 介子

$$K_{\mu^3}^\pm \longrightarrow \mu^\pm + \nu + \pi^0$$

⑤ K_{e^3} 介子

$$K_{e^3}^\pm \longrightarrow e^\pm + \nu + \pi^0$$

以上五种 K 介子, 其本身是不同的粒子, 还是一种粒子而有不同的衰变方式, 这个问题现在还没有最后肯定。

3. 核子

组成原子核的质子和中子以及反质子与反中子统称为核子。

$$m_{\text{核子}} \approx m_{\text{质子}}$$

(1) 质子 p 与反质子 \bar{p} ——静止质量为 $1\ 836.15m_e$ 。

(2) 中子 n 与反中子 \bar{n} ——静止质量为 $1\ 838.68m_e$ 。

中子衰变后变成质子、电子和中微子，这就是原子核 β 衰变的道理。

$$n \longrightarrow p + e^{-} + \nu$$

核子与反核子相遇则可变为数个介子：

$$\left. \begin{array}{l} n + \bar{n} \\ p + \bar{p} \\ n + \bar{p} \\ p + \bar{n} \end{array} \right\} n\pi$$

4. 超子

静止质量大于质子的静止质量的粒子称为超子。

$$m_{\text{超子}} > m_{\text{质子}}$$

超子有以下三种：

(1) Λ^0 超子——静止质量约为 $2.181m_e$ 。

$$\Lambda^0 \longrightarrow p^+ + \pi^- \quad (\text{或 } n + \pi^0)$$

凡是以 Λ^0 代替中子 n 组成的原子核，称为超裂片。

(2) Σ^{\pm} 与 Σ^0 超子—— Σ^+ 的静止质量约为 $2.327m_e$ ， Σ^- 为 $2.340m_e$ ，

$$m_{\Sigma^0} \approx m_{\Sigma^+}.$$

$$\Sigma^+ \longrightarrow p^+ + \pi^0 \quad (\text{或 } n + \pi^+)$$

$$\Sigma^- \longrightarrow n + \pi^-$$

$$\Sigma^0 \longrightarrow \Lambda^0 + \gamma$$

(3) Ξ^- 与 Ξ^0 超子——静止质量约为 $2.580m_e$ 。

$$\Xi^- \longrightarrow \Lambda^0 + \pi^-$$

$$\Xi^- \longrightarrow \Lambda^0 + \pi^0$$

关于粒子的较详细情况，请参看粒子分类表。

在以上所述的粒子中，介子和超子都是在宇宙射线中发现的。但这些粒子在宇宙线中很少，在实验室中，进行研究异常困难。自从 1948 年起，利用加速器人工产生了 π 介子以后， π 介子的研究迅速地得到了发展， π 介子的物理学已列入原子核物理学中重要的一章。利用高能粒子加速器，1956 年在美国曾发现了反质子与反中子。狄拉克的相对论量子力学理论的预言又一次得到了强有力的证实。苏联 Dubna 联合核子研究所的 100 亿电子伏同步稳相加速器运转后，用人工的方法产生了大量的 K 介子、超子和其他的新粒子。这对于当时研究核

力与粒子的问题,起重要的作用.在 CERN 建造的 LHC 是当时世界上能量最高的加速器,是一种将质子加速对撞的高能物理设备.两个对撞加速管中的质子各具有能量 7 TeV,总撞击能量达 14 TeV.物理学家希望由加速器来寻找希格斯粒子、超对称粒子和暗物质的存在.在 2012 年 LHC 上两个探测器 ATLAS 和 CMS 上同时发现了希格斯玻色子.探讨粒子的性质和它内部的结构是物理学中最重要的问题之一.

粒子是可以相互转化的,也就是说,物质可以从一种存在的形式变化为另一种存在的形式,譬如正电子与电子相遇,或 π^0 介子的衰变可变为光子:

$$e^+ + e^- \longrightarrow n\gamma$$

$$\pi^0 \longrightarrow z\gamma$$

在过去,一部分现代的马赫主义唯心论的学者看来,好像是正电子与负电子相遇便化为乌有了. π^0 介子的衰变,也似乎是 π^0 介子本身被消灭.这是由于他们否定了光子也是物质,他们没有认识到光子即电磁波,也是物质存在的一种形式.从唯物辩证的观点看来,粒子的互相转化,仅是一种物质变化为另外一种物质而已.而物质本身并没有被消灭.1908 年在唯物论与经验批判论一书中就明确地指出:

“‘物质正在消灭’——这是意味着我们在此以前所知道的物质的界线正在消灭.我们的认识愈更深入着;从前看起来是绝对的、不变的、根源的那些特性,正在消灭.这些特性现在显示为相对的,只是物质的某些状态所固有的。”

虽然那时很多粒子的特性还没有发现.粒子的理论当然也没有建立.但是当时的概念,在科学已经相当发达的今天,还是有着极其伟大的意义.他对于现代物理学中一切唯心主义的看法,都给予致命的打击,也武装了我们物理学的科学研究工作者.

人类不仅要认识世界,还要改变和创造世界.我们物理学工作者认识了,粒子转化的规律.物质变化的规律,便可以依我们的愿望,人工产生我们所需要的粒子,进行有计划的科学研究工作,进而使它们为人类服务,这是有着重大的现实意义的.

参 考 文 献

- [1] Shapiro M. Rev. of Modern Phys., 1956, 28(2): 165.
- [2] 朗道,栗弗席兹.场论.北京:高等教育出版社.2012.

§2 量子场论研究的对象

“场”这个名词，也是物理学家认识物质的历史产物。过去认为电荷间互相作用的力是由电磁场产生。自从发现光子以后才知道光子和电磁场是一种东西。量子电动力学建立以后，便用光子的交换来解释电荷间力的作用，这才把电磁场和光子的概念完全统一起来。同样的道理，在经典物理学中认为核子与核子间的作用力，是由介子场所产生。量子场论则用核子间交换介子来解释核力。这说明场和粒子是一种东西的两种不同的说法。

关于物质间作用的重力场产生的原因，现在还没有得到本质的解释。也曾有人提出重力场的产生是由于物质之间交换一种新粒子“重力子”所致。重力子究竟存在与否，现在尚无法肯定。现在正在设法用实验说明重力波是否存在的问题，可能这对重力场的进一步认识有推进作用。

总之，场与粒子是物质存在的两种不同的形式，而人类在认识物质的过程中，给了它们不同的名称，场应该有它的物质内容，场的本身就是粒子，严格地说，我们应该认为场是同类型的粒子的集合。因此我们可以称介子的集合为介子场，电子的集合为电子场，质子的集合为质子场等，不过后两种称呼少听见而已。

由此可见，场论就是研究粒子的理论，而场论研究的具体对象有：

- (1) 研究粒子的运动规律，即场的运动方程式。
- (2) 研究粒子本身的性质。
- (3) 研究粒子间的相互作用。
- (4) 研究粒子相互转化和产生的概率。

研究光子、电子、正电子的相互间的作用和相互转化的学问，我们称之为量子电动力学。这是场论中重要的一部分内容。

量子电动力学得到了光辉的成就。它比较定量地说明了正负电子和光子互相作用的许多现象，特别是用量子电动力学的理论计算出来的电子附加磁矩和氢光谱能级，由于真空效应的移动，得到了实验的精确证实。

但是早期的量子电动力学还存在着严重的缺点，就是用量子电动力学的理论计算出电子的自能，电子本身的质量、电荷以及其他某些量是无限大的，取消这种无限大的方法，我们称之为“重整化”。在1948年前后，Bethe Tomonega、Schwing Dyson等人对于场的方程式的相对论的形式，和避免发散问题的重整化的方法都有较大的贡献。但将此重整化的方法运用到介子场的问题上，则遇到原则性的困难，并与实验不符合，更重要的是这些重整化的方法

多少有些人为的性质,重整化的假设并没有包含在量子电动力学的原始理论和原始方程式中,因而破坏了逻辑的完整性.因此,现在量子电动力学的理论还不能说是完整的理论.

此外,关于消除场论的发散问题, Yukawa 等人曾提出非区域性场的理论,还有 Heisenberg 等人提出的非线性场的理论,这些理论在目前来说,还是非常不完整而且是有内在矛盾的理论.

量子电动力学之所以相当的成功,就是在解其基本方程式时,能够用以作用常数展开的微扰法.但是应用于介子与核子互相作用问题时,由于相互作用强大,不能用微扰法,造成了介子场的理论的严重困难.

Nauu 和 Dancoff 提出了不用微扰法来解决介子场理论的方法,但用他们的方法计算实际问题,是非常复杂困难的,同时也有原则的缺点.此后 Chew 与 Low 在介子场的理论中,获得了很大的成就,许多计算结果还与实验比较符合,但现在应用起来,也有很大的局限性,应该加以扩展.因此现在关于介子场的理论方面,虽然有了不小的进展,但存在的困难还是很多的.

至于用量子场论的理论来研究 K 介子与超子的问题,目前已有很大的进展.其中一个比较重要的贡献,就是 Gellmann, Nishijima 等人发现了这些基本粒子的产生和转化的规律,关于 K 介子与超子问题,将是以后场论理论研究的另一重要方向.

第二章 场的运动方程式和守恒定律

§3 狭义相对论与标量场方程式

在狭义相对论中, 为了方便起见, 通常采用四维空间坐标:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict \quad (3.1)$$

x, y, z 代表质点的空间直角坐标, t 代表时间, c 为在真空中光进行的速度. 在狭义相对论的理论中要求 c 为一常量.

在四维空间中, 两相邻点之微小距离 ds 由

$$ds^2 = - \sum_{i=1}^4 dx_i^2 \quad (3.2)$$

决定. 将 (3.1) 式代入 (3.2) 式可得

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= (c^2 - v^2) dt^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

此处 $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$ 为质点运动的速度.

狭义相对论的理论要求质点或物体的速度不能超过光速. 为了使 ds 不致变为虚数, 故 (3.2) 式的右边有一个负号. 由 (3.3) 式, ds 可表示为

$$ds = c \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt \quad (3.4)$$

ds^2 对于洛伦兹变换为一不变量. 洛伦兹变换是一个四维空间的正交线性变换:

$$\begin{aligned} x'_i &= a_{ik} x_k \\ \text{或 } x' &= Ax \end{aligned} \quad (3.5)$$

系数 a_{ik} 满足正交条件

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^4 a_{ik}a_{jk} &= \delta_{ij} \\ \sum_{i=1}^4 a_{ik}a_{ij} &= \delta_{kj} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

此处

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ik})$$

符号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{当 } i \neq j \\ 1, & \text{当 } i = j \end{cases}$$

A 是一个方阵, 称为洛伦兹变换方阵, 其具体的形式如下:

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{v_x^2}{v^2}(\alpha - 1) & \frac{v_x v_y}{v^2}(\alpha - 1) & \frac{v_x v_z}{v^2}(\alpha - 1) & \frac{i v_x}{c} \alpha \\ \frac{v_x v_y}{v^2}(\alpha - 1) & 1 + \frac{v_y^2}{v^2}(\alpha - 1) & \frac{v_y v_z}{v^2}(\alpha - 1) & \frac{i v_y}{c} \alpha \\ \frac{v_x v_z}{v^2}(\alpha - 1) & \frac{v_y v_z}{v^2}(\alpha - 1) & 1 + \frac{v_z^2}{v^2}(\alpha - 1) & \frac{i v_z}{c} \alpha \\ -\frac{i v_x}{c} \alpha & -\frac{i v_y}{c} \alpha & -\frac{i v_z}{c} \alpha & \alpha \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

其中 v_x, v_y, v_z 为 (x'_i) 坐标系之原点对于 (x_i) 坐标系原点运动的相对速度, 而

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

如 (x'_i) 坐标系运动方向仅在 x 轴方向, 则 $v_y = v_z = 0$, 有

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} & 0 & 0 & \frac{+i\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$