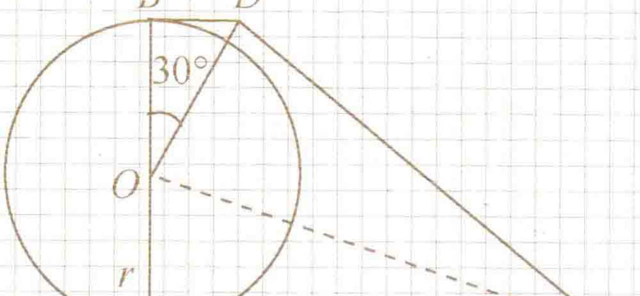
探秘数学常数

陈梅 陈仁政 主编

说不尽的圆周率

陈仕达 陈雪

著



中国工信出版集团

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

探秘数学常数

陈梅 陈仁政 主编

说不尽的
圆周率

陈仕达 陈雪
著

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

说不尽的圆周率 / 陈仕达，陈雪著 ； 陈梅，陈仁政主编. -- 北京 ：人民邮电出版社，2016.4
（探秘数学常数）
ISBN 978-7-115-41785-5

Ⅰ. ①说… Ⅱ. ①陈… ②陈… ③陈… ④陈… Ⅲ. ①圆周率—普及读物 Ⅳ. ①O123.6-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第050940号

内容提要

古往今来，在数学上很少有问题能像圆周率这样引起人们广泛的关注。它既激发了无数数学家、科学家和艺术家的极大兴趣，也曾经难倒诸多大家名人和英雄好汉，很多凡夫俗子也试图小试身手，当然也引起了一些沽名钓誉之徒的不轨之心。在这一方舞台之上，各色人等粉墨登场。

本书生动详尽地叙述了从古到今人类对圆周率不断加深的认识和艰难曲折的探索历程，有关圆周率的定义、名称、符号、性质以及林林总总的数值让人目不暇接，形形色色的算法令人拍案叫绝，多如牛毛的奇闻趣事让人忍俊不禁，五花八门的名题趣题使人流连忘返，难解难破的谜团雾障令人梦绕魂牵……

本书适合广大数学爱好者阅读。

◆ 主　　编　陈　梅　陈仁政
著　　　　陈仕达　陈　雪
责任编辑　刘　朋
执行编辑　杜海岳
责任印制　彭志环

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
大厂聚鑫印刷有限责任公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：17
字数：322 千字　　　　2016 年 4 月第 1 版
印数：1-3 000 册　　　2016 年 4 月河北第 1 次印刷

定价：39.00 元

读者服务热线：(010)81055410　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京东工商广字第 8052 号

编 委 会

丛书主编：陈　梅　陈仁政

丛书副主编：陈仕达　陈　雪　黎　渝

本册主编：陈仕达　陈　雪

丛书编委（以姓氏的汉语拼音为序排列）：

曹明清　陈出新　陈　立　陈　梅　陈仁政　陈仁仲　陈仕达
陈　雪　方裕强　傅艳艳　龚炳文　郭　春　郭汉卿　胡权阳
胡　晓　江明珍　匡晓燕　黎　渝　李昌敏　李　骥　李军红
梁　聪　梁媛琳　廖洪波　刘　伟　刘　洋　卢　颖　丘　雷
钱丹锋　全　刚　全建辉　任治奇　税康秀　王　可　王　奎
王明华　王　倩　魏　佳　席　波　席　涛　杨素君　易　扬
曾君成　张　静　周兴国

前　言

著名数学家哥德尔 18 岁进入维也纳大学时学习的是理论物理专业，他常到位于维也纳第九区斯特鲁德尔霍夫大街 4 号的理论物理研究所 4 楼的大教室聆听奥地利物理学家蒂林的课。有一次，他参加了德国哲学家、物理学家施里克介绍罗素数论著作的研讨会，由此对数理逻辑产生了浓厚的兴趣。数的吸引力如此之大，竟致哥德尔改换门庭。入校两年后，哥德尔放弃了物理学专业，改学数学。5 年以后的 1931 年，25 岁的哥德尔发表了震惊数学界的不完备定理。而在今天，用他的姓氏命名的哥德尔奖从 1993 年起每年都在颁发。

提及数学，我们自然无法回避数学常数。最著名的数学常数当属圆周率 π、黄金分割数 φ 和自然对数的底 e。以色列数学史家马奥尔在《无穷之旅——关于无穷大的文化史》一书中称它们为“3 个著名的无理数”。在美国加州谷歌公司总部的 4 座办公大楼中，有 3 座是以这 3 个数学符号命名的。当然，数学中重要的常数远不止于此。

数学常数是古老而又年轻的数论的重要组成部分。虽然截至目前已经取得了许多重大的数论研究成果，但是还有不少谜团让人看朱成碧，不辨五色。正如日本著名数学家弥永昌吉所说，数论的“大部分仍然笼罩在神奇的面纱之下”。因此，需要我们继续不断探索。“苔花如米小，也学牡丹开。”本丛书作者虽然明知力所不逮，但凭借着对数学常数的浓厚兴趣，自 1982 年开始，断续经过 33 年的努力，终于编写成了这套系统介绍数学常数的普及读物。这套书包括《说不尽的圆周率》《不可思议的自然对数》《奥妙无穷的黄金分割》《妙趣横生的数学常数》。

虽然目前国内外出版了一些介绍上述三大数学常数的图书，但总体来说不够系统全面，许多有趣的知识没有罗列其中。本套图书希望能在以下方面做出

有益探索。

首先，本套图书以 π、φ、e 等主要的数学常数为主线，但又不限于此，内容涵盖重要数学概念和数学思想的形成、著名公式和定理的证明以及它们在各学科和生活中的应用。单是书中涉及的数学家以及相关的科学家、哲学家等就有 2000 多位，读者可以从书中了解这些著名人物在数学研究中艰难的探索历程（而心怀感恩之情）、所取得的重要成果以及逸闻趣事。

其次，本套图书在化繁为简、深入浅出方面进行了积极的尝试，力求消除“数学是可怕的学科”这样的误解，把“可怕”变为“可爱”，让读者充分感受到数学之真、之美、之乐、之用，感受到数学的魅力。中国数学家张景中在其所著的《数学与哲学》一书开篇就指出：“联系数学的发展历史学习数学哲学，有趣又有效。”在编写过程中，作者也尽力将数学史和科学史内容融入书中，从而梳理出重要数学思想或者数学定理的发展脉络，以及著名数学难题的求解历程。读者感受到的将不再是仅以定理、证明、计算面孔出现的枯燥乏味的脑力训练，而将看到一个有血有肉、充满活力与无限乐趣的新形象。

再次，知识驱动着人类文明的发展，数学作为我们理解和探索科学以及世界的重要工具发挥了重要作用。知识的获取过程是艰辛的，但也充满着乐趣，数学更是如此。本套图书在介绍数学知识之外，更加注重表现数学家的优秀品质以及探索精神，希望读者在享用前人所留下的宝贵精神财富的同时能有一些感触或感悟。

除了作者团队的协作与努力之外，许多专家、学者、朋友及相关人士也对本套图书的编写与出版给与了帮助。在此感谢张景中、李敏、郭书春、宁挺、梁宗巨、张奠宙、查有良、吴振奎、丘和、曾润生、王青建、邹大海、彭定才、潘宁、邓文华、陈文伟、贾小勇、吴至友、罗明、安克・毛雷尔等。由于篇幅所限，还有不少人士的姓名在此未能提及，一并表示感谢。

限于作者的陋见，书中难免存在疏漏与不当之处，请读者批评指正。

爱因斯坦说：“不要担心你在数学上遇到的困难，我敢保证我遇到的困难比你大得多。”让我们以此共勉，并慢慢爱上有趣又好玩的数学吧。

编者

目　录

第 1 章

圆周率的定义——多角度给 π “拍照”

数学，作为人类思维的表达形式，反映了人们积极进取的意志，缜密周详的推理以及对完美境界的追求。

——德国-美国数学家柯朗

各国的圆周率表示法：英，number π；法，nombre π；德，Ludolphsche Zahl，Ludolphian Number；俄，число π；日，円周率；希腊，π——世界通用。

各家的圆周率数值：数学家说是圆周长和直径的比；工程师说约为 3.14；物理学家说是 3.1416，误差小于 0.0003%；天文学家说是 3.141 592 65，误差约为 1.146×10^{-9}。

1.1 用圆周长和直径定义的“黑白照”

小学数学书上说，圆周率 π 是（欧几里得）平面上圆周长和直径的比（值）。

我们不难发现，这个定义中有两个问题。第一，圆周是曲线，曲线的长与直线的长不同，它是什么意思？第二，任何圆的周长和直径的比（值）都一样吗，即都是同一个常数 π 吗？如果是，应该加以证明。

首先，我们来看圆周长是什么意思。

我们在平面几何里知道，当圆内接（或者外切）正多边形的边数无限增加时，它的周长就接近于圆周长。于是就得到圆周长的定义：当圆内接正多边形的边数

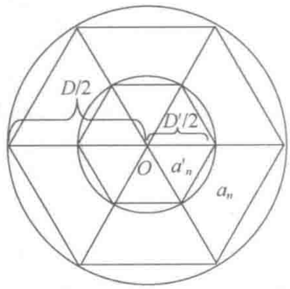
用加倍的方法无限增加的时候，这些正多边形的周长的极限叫圆周长。

当然，要说明上面这个定义是合理的，首先要证明圆内接正多边形的周长存在极限。对于学了数列和极限的人，做到这一点并不难，因此这一任务留给读者。

事实上，从圆的任一内接正多边形出发，用任何方法（不一定用“边数加倍法”）使它的边数无限增加，各条边的长度就无限缩短，那么，这些多边形的周长也有一个极限，这个极限就是圆周长。这就得到圆周长的另一个定义：当圆内接正多边形的边数无限增加时，内接正 n 边形的周长 p_n 就接近于一个确定的值，这个值叫圆周长，用 C 表示，即 p_n 的极限是 C。当然，以上两种定义并无本质区别。

有了圆周长的定义，下面我们来证明圆周长 C 和直径 D 的比 C/D 是一个与 D 的大小无关的常数。为此，设圆内接正 n 边形的边长是 a_n。

如右图所示，以 D' 为直径作⊙O 的同心圆，并且把这个圆的周长记作 C'，它的内接正 n 边形的边长、周长分别记作 a_n' 和 p_n'。



用圆周长和直径求圆周率

从 O 到正多边形顶点的半径把这两个正 n 边形各分成 n 个三角形。很明显，这两个正 n 边形相似，所以 $\dfrac{a_n}{a_n'}=\dfrac{D/2}{D'/2}$，也就是 $\dfrac{a_n}{D/2}=\dfrac{a_n'}{D'/2}$。因此，$\dfrac{p_n}{D}=\dfrac{p_n'}{D'}$。取极限后就得到 $\dfrac{C}{D}=\dfrac{C'}{D'}$。这就说明 C/D 是一个常数，把它记为 π，就得到我们熟悉的 $C=\pi D$。

这种 π 的定义是一张传统的“照片”，但还没“褪色”，直到今天还在使用。

1.2 用圆面积和半径决定的“另类照”

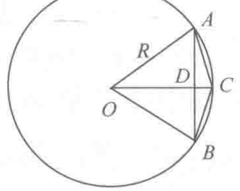
圆周率是一个常数，还可以换个角度，从求圆面积和半径的比来证明。

任取半径是 R 的圆，画它的内接正 n 边形，并把多边形的面积记作 S_n。我们在 1.1 节中说过，当 n 无限增大时，内接正 n 边形接近于圆，p_n 接近于 C；同时，S_n 也就接近一个确定值，这个值叫圆的面积 A。也就是说，当 n 无限增大时，内接正多边形面积组成的无穷数列 S_3，S_4，S_5，S_6，…，S_n，…的极限是 A。

现在证明：圆周率 π 又是 A 和 R 的平方的比，即ⓐ$A=\pi R^2$ 成立。事实上，这时 $D=2R$，而 n，a_n 和圆内接正 $2n$ 边形的面积 S_{2n} 之间有ⓑ$S_{2n}=nRa_n/2$ 和ⓒ$p_n=na_n$ 的关系。其中ⓒ成立是显然的，下面我们来证明ⓑ也成立。

如下页右图所示，画⊙O 的内接正 $2n$ 边形并连接它的中心和顶点，这 $2n$ 条

连线就把它分成 $2n$ 个三角形。把其中相邻的两个三角形记作△OAC、△OCB，这时 AB 与 OC 垂直相交于 D，于是有ⓓ△AOB 的面积$=OD\times AB/2$，以及ⓔ△ACB 的面积$=CD\times AB/2$。而 AB 是圆内接正 n 边形的一边，它的长度等于 a_n。又 $OD+CD=OC=R$。因此，从ⓓ和ⓔ就可以得到ⓕ△OAC 的面积+△OCB 的面积=△AOB 的面积+△ACB 的面积$=(OD+CD)\times AB/2=Ra_n/2$。



用圆面积和半径求圆周率

而圆内接正 $2n$ 边形是由 n 个△OAC 和△OCB 这样的相邻三角形拼成的，因此由ⓕ就得到ⓑ。

从ⓑ和ⓒ就得到ⓖ$S_{2n}=p_nR/2$。

当 n 无限增大时，S_{2n} 趋向于 A，p_n 趋向于 C，所以ⓖ的两边就分别趋向于 A 和 $CR/2$，而 $CR/2=\pi DR/2=\pi R^2$，这就得到ⓐ。

于是，我们就换了一个角度，用圆面积来定义了 π。

1.3　由“过海八仙”拍的“彩照”

显然，原则上任何含 π 的公式都可用来定义 π。例如，由球体积公式 $V=\dfrac{4\pi R^3}{3}$ 就可以得到 $\pi=\dfrac{3V}{4R^3}$。于是我们可以说，圆周率 π 是球体积的 3 倍与球半径 3 次方的 4 倍之比。不过很显然，这类定义不如 1.1 节和 1.2 节的方法（用周长或面积来定义）方便，所以我们不打算继续这样给它“拍照”。

我们要说的是另一类定义——给它拍几张打破传统的“彩照”。

数学家们都知道 $\pi=4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$，它的源头是英国数学家、密码专家沃利斯对单位圆面积的研究。稍懂微积分的人都知道，这个式子表示的是一个单位圆的面积。后来，瑞士数学家欧拉还给出了这类“彩照”的通式：$\pi=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$。

此外，还可以证明 $\pi=2\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$。而欧拉还把这张“彩照”润色为 $\pi=4\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}\int_0^1\dfrac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$。

当然，这样的微积分表达式并不少：$\pi=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，$\pi=\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sech}(x)\mathrm{d}x$，

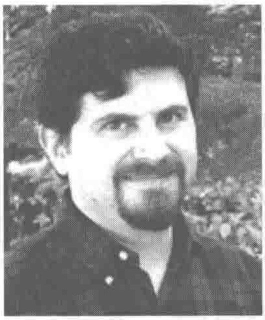
$\pi=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$，$\pi=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2$，…。

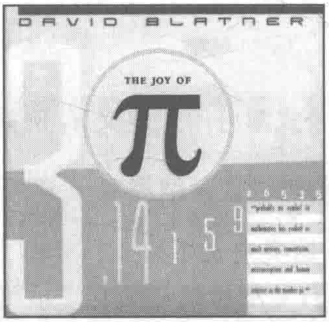

法格纳诺

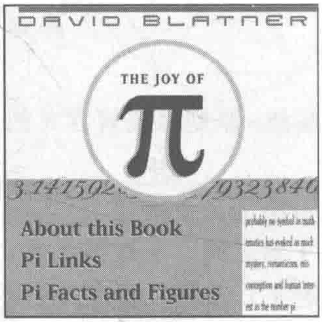

朗斯基

在 1719 年，最先使用虚数的意大利业余数学家法格纳诺给出的“彩照”是 $\pi=4\ln\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{\frac{\mathrm{i}}{2}}$，也就是 $\pi=2\mathrm{i}\ln\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$。它巧妙地把数学中最重要的“四大金刚”1，i，π，e 联系在一起。另外一位使用虚数的数学家——波兰的朗斯基则别出心裁地说“数 π 的绝对意义是 $\frac{400}{\mathrm{i}}\left[(1+\mathrm{i})^{\frac{1}{\infty}}-(1-\mathrm{i})^{\frac{1}{\infty}}\right]$”。

此外，美国讲演家、国际知名计算机书籍作家布拉特纳则在其所著的《神奇的 π》一书中写道，如果某个数在 0 和 2 之间，而且它的余弦值为 0，那么这个数的两倍就是 π。这本书由美国沃克公司于 1997 年 12 月 1 日出版，中国台湾地区和大陆分别于 1999 年和 2003 年出版了中文译本。



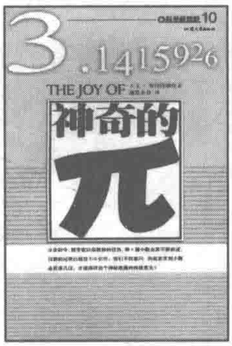




布拉特纳和两个版本的《神奇的 π》

而我们知道，π=2arcsin(1)=arccos(−1)。当然，在分析学中，π 也可以严格地定义为满足 sin(x)=0 的最小正实数 x。

由上述可见，不但从几何的角度可以给 π“拍照”，而且从代数和数学分析、解析几何、三角函数等多个角度都可以给 π“拍照”。“数学在它自身的发展过程中是自由的，只遵守一个明显的考虑，那就是数学概念之间必须是没有矛盾



中国大陆出版的《神奇的 π》

中国台湾地区出版的《神奇的 π》

的；同时通过定义，同以前存在的、已经确立的概念发生确定的、井然有序的关系……数学的本质在于它的自由。”德国数学家乔治·费迪南德·鲁德维格·菲利普·康托尔这样说。“数学的本质在于它的自由”这句话被用德语镌刻在后人为他建造的纪念碑上，虽然他因为发表了超越时代认识的、正确的集合论观点（“在无穷大数学中，有可能全体等于部分”），而被一些数学家“群殴”或冷落，从而“一刻也不曾自由”。

不过，有人认为把 π 解释成圆周率蕴含了一个逻辑循环（圆周率决定圆的周长，圆的周长又反过来决定圆周率），因而并不严谨。可见，尽管圆周率在表面上是一个可以说得过去的概念，但似乎并没有被国际数学界所接受，所以在英文版的《数学术语辞典》中没有圆周率这个词，而只有 π。

第 2 章

圆周率的名称——世人给π改绰号

人的昨天总是和他的明天两样；除了变，一切都不能长久。

——英国诗人雪莱

现代人称 π 为圆周率，但历史上世界各国却给它取了许多绰号，而不少已尘封在浩如烟海的历史文献之中。

原则上任何一个得出当时领先的 π 值的人都可以获得一个与圆周率有关的命名，使 π 增加一个绰号，但事实上却不都是这样。例如，英国数学家威廉·山克斯用了 30 年时间在 1873 年将 π 算出 708 位（从第 528 位小数起出错），这一世界纪录保持了 73 年，但却没有看到“山克斯率”的名称。所以，本书提到的有关 π 的名称都以有文献记载的为准。

2.1 古率

人类最早使用的粗糙圆周率是 3，这个值被后人称为古率。这个“3”最早起于何时，已“穷远不可追问”。但是，在中国，木工师傅有句从古流传下来的口诀：“周三径一，方五斜七。”这个口诀的意思是，直径为 1 的圆的周长大约是 3，边长为 5 的正方形的对角线之长大约是 7。这个口诀反映了中国古代人们对圆周率的初步研究和简洁的提炼。

这类研究还有实物为证：甘肃出土的马家窑彩陶四系罐是人类在距今大约

中国邮票：马家窑彩陶四系罐（左）与计里鼓车（右）

5000 年前（新石器时代晚期）制作的旋转体陶罐，罐上有同心圆纹饰，四周绘着有周期变化的波浪线，说明当时的人们对圆有比较深刻的认识与应用；发明于汉代的计里鼓车中装有传动齿轮、凸轮和杠杆等，车行 1 里时车上的木人击一次鼓，人们听鼓声就知道行程，说明这一时期的人们已能计算圆周长并据此设计车轮大小。

中国唐代初期国子监算学馆中规定算经十书为课本。其中最早的一本是《周髀算经》，这本书成书不晚于公元前 1 世纪，是一本解释盖天说和四分历的天文学著作，由多人经多个朝代写成。其中的“卷上”记述了约公元前 1100 年周公与商高的问答。其中有“商高曰‘数之法出于圆方’”，下面有三国时代吴国的数学家赵爽大约在 222 年所做的“圆径一而周三”的注解。此外，其他中国古代文献（例如《周礼考工记》）中也有相同的记载。


刘徽

中国魏晋时期的数学家刘徽被誉为中国的牛顿。例如，美国数学家、数学史家斯韦兹就赞扬他的著作《海岛算经》“使中国测量学达到登峰造极的地步”，让“中国数学测量学的成就超越西方约 1000 年”。刘徽于 263 年开始注释约 1 世纪成书的《九章算术》，写成《九章算术注》一书时，把圆周率称为“周三径一之率”。这是古率的又一个名称，它在一些文献中被叫作“径一周三之率”。由此可见，古率 3 在中国古代刘徽之前已广为流传。

2.2　阿基米德数和托勒密之值

古希腊数学家、物理学家阿基米德率先将 π 值算到两位小数 3.14。为了纪念他的这一伟大贡献，后人将 3.14 叫作阿基米德（常）数或阿氏率。中国翻译家郑太朴翻译、商务印书馆于 1930 年出版的美国数学史家雅各布・威廉・阿尔伯特・杨、莱昂纳德・尤金・迪克森与戴维・尤金・史密斯合著的《数论、尺规作图及周率》一书，将阿基米德译为亚儿默德，并把 22/7 称为亚氏率。

关于 22/7，还有一道名题：证明 $22/7>\pi$。现证明如下。