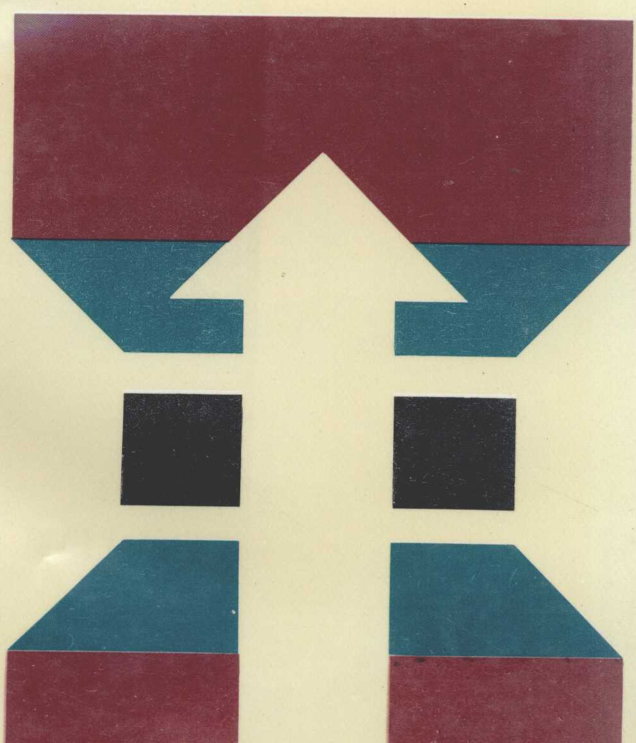
广义相对论入门

叶壬癸 编著



大学出版社

广义相对论入门

叶壬癸　编著

厦门大学出版社

[闽]新登字 09 号

本书承福建省自然科学著作基金赞助出版

广义相对论入门

叶壬癸 编著

*

厦门大学出版社出版发行

（邮编：361005 电话：2186128）

三明地质印刷厂印刷

（地址：三明市富兴路 60 号 邮编：365001）

*

开本 850×1168 1/32 5.75 印张 144 千字

1996 年 12 月第 1 版 1996 年 12 月第 1 次印刷

印数：1—1000 册

ISBN 7—5615—1222—8/O·74

定价：7.50 元

说　明

本书主要部分是作者下放期间写的，是已出版的《狭义相对论入门》（厦门大学出版社 1988 年版）的姊妹篇，但两者内容互相独立。80 年代初，本书稿曾经修改后油印成讲义，作为选修课教材。今再次修改出版，仍保留入门读物的特色，写时以易于自学为目的，不追求数学上严格。读者只要学过大学理工科的公共高等数学课和具备必要的狭义相对论知识，比如读过上述《狭义相对论入门》或其他狭义相对论的书，就可以阅读本书了。对于想自学或了解广义相对论的大学本科生及中学物理老师和大学普通物理老师，将会有所帮助。

作　者

1996 年 1 月 21 日

目录

（一）张量知识

1—1. 参考坐标系 ……………………………………………… (1)
1—2. 反变矢量 ……………………………………………… (3)
1—3. 符号的约定 ……………………………………………… (8)
1—4. 共变矢量 ……………………………………………… (11)
1—5. 矢量的长度 ……………………………………………… (18)
1—6. 度规张量 ……………………………………………… (22)
1—7. 张量的定义 ……………………………………………… (24)
1—8. 商律 ……………………………………………… (31)
1—9. 共轭张量、张量指标的升降 ……………………………… (36)
1—10. 矢量的平移 ……………………………………………… (41)
1—11. 克里斯多菲符号 ……………………………………… (50)
1—12. 克里斯多菲符号的变换 ……………………………… (53)
1—13. 张量的共变微商 ……………………………………… (55)
1—14. 黎曼—克里斯多菲曲率张量 …………………………… (61)
1—15. 黎曼—克里斯多菲曲率张量的一些性质 ……………… (67)
1—16. 散度、拉普拉斯 ……………………………………… (71)
1—17. 李奇张量及其散度、爱因斯坦张量 …………………… (80)
1—18. 短程线 ……………………………………………… (84)
1—19. 短程线坐标系、比安基恒等式 ………………………… (87)

（二）广义相对论概要

2—1. 狭义相对论与引力不相容…………………………（90）
2—2. 等价原理…………………………………………（92）
2—3. 局部惯性系………………………………………（95）
2—4. 引力影响时空性质………………………………（97）
2—5. 爱因斯坦引力场方程……………………………（99）
2—6. 运动方程 ………………………………………（107）
2—7. Schwarzschild 度规 ……………………………（115）
2—8. 水星近日点的进动 ……………………………（124）
2—9. 光线在引力场中的偏折 ………………………（131）
2—10. 雷达回波的延迟………………………………（135）
2—11. 恒星的引力透镜效果…………………………（140）
2—12. 黑洞……………………………………………（148）
2—13. 宇宙学初步……………………………………（150）
2—14. 宇宙学与观测事实的联系……………………（159）

附录：

A. 矩阵与行列式简单知识 ……………………………（165）
B. 关于 2—6 中的 $\nabla^2\phi=4\pi G\rho_0$ ……………………（170）
C. 关于 2—13 练习 3 求体积的公式 ………………（172）
D. Schwarzschild 内部解 ……………………………（174）

（一）张量知识

1—1 参考坐标系

为了描述物理现象发生的地点，需要有参考坐标系。

为简单起见，我们先在二维平面上讨论问题。

假设在平面上 P 点有一个粒子，为了说明这个粒子的位置，可以采用直角坐标描述 P 点(图 1.1)，记为 P:(x,y)，但是我们也可以采用极坐标来描述 P 点，把 P 点位置记为 P:(r,φ)。只要 x、y 或 r、φ 有确定数值，P 点的位置也就确定了。采用直角坐标或极坐标，对于描述平面上某点的位置来说都是等效的。只要我们高兴，还可以采用别的坐标系，例如采用斜线坐标系，同样可以确定 P 点的位置(图 1.2)P:(ξ,η)，这里坐标 ξ 及 η 分别为以 O、P 为对角顶点，Oξ、Oη 轴为边的平行四边形的两个相邻边(夹角在 O)的边长。很清楚，同一个 P 点的位置，用上面这几种作为例子的不

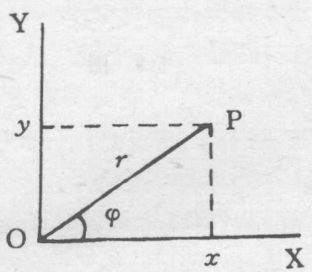


图 1.1

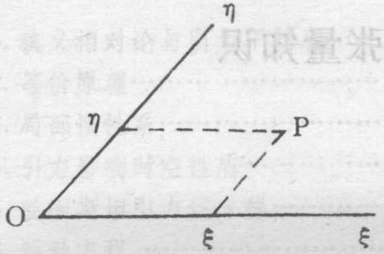


图 1.2

同坐标系来描述时，各对坐标值 x、y；r、φ；ξ、η 彼此间一般说来是不同的，但都同样确定了P点。坐标的不同，只是由于采用了不同的坐标系。如果我们愿意，还可以让上述这些坐标系的原点任意移动某个距离或让整个坐标框架转过某个角度。这样P点的坐标也就会与原来的不同，但坐标值虽然变了，所描述的仍然是同一个客观的P点，其物理内容——粒子所在位置依然一样。

1—2 反变矢量

设想有一个粒子从平面上 P 点移动到无限邻近的另一个 P′点，在直角坐标系中，元位移 $dl = \underline{PP'}$ 的两个分量分别为 dx 及 dy，在极坐标中，如何把 dx、dy 改成 r 和 φ 来表示呢？

大家知道，直角坐标 x、y 和极坐标 r、φ 的关系（设原点相同，极坐标的基线与 OX 轴重合）。（见图 2.1）为

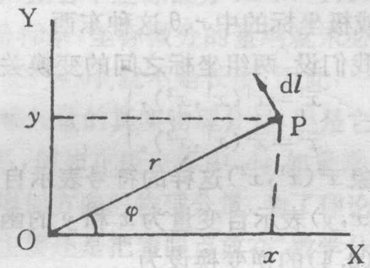


图 2.1

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi。\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

所以

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi}d\varphi, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi}d\varphi。\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

考虑到(2.1)，就可以把(2.2)改为

$$\left.\begin{aligned} dx &= dr\cos\varphi - r\sin\varphi d\varphi, \\ dy &= dr\sin\varphi + r\cos\varphi d\varphi。\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

一般说来，坐标系的更换并不总是在直角坐标与极坐标之间进行，而且极坐标的基线也未必总得与 OX 轴一致，原点也不一定非重合不可。因此，为了普遍起见，让我们设有任意两组平面上的坐标框架 x^1、x^2 与 $\bar{x}^1$、$\bar{x}^2$，我们来讨论，某段客观的元位移 $\mathrm{d}l$ 的两个分量在这两个坐标系中如何互相联系。在这里需要说明的是：由于下面将会谈到的理由，我们不用 x_1、x_2 而用 x^1、x^2，右上角的数字不是指数而是序数。比如 x^2 读成“x 第 2”而不是“x 平方”。往后 x 平方应写成$(x)^2$，以示区别，因此，x^1、x^2 是相当于直角坐标中的 x、y 或极坐标的中 r、θ 这种东西。

我们设，两组坐标之间的变换关系为

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}^1&=\bar{x}^1(x^1,x^2),\\ \bar{x}^2&=\bar{x}^2(x^1,x^2)。\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

这里象 $\bar{x}^2(x^1,x^2)$ 这样的符号表示自变量为 x^1 及 x^2 的函数 $\bar{x}^2$，就如 $f(x,y)$ 表示自变量为 x 和 y 的函数 f。(2.4)是(2.1)的普遍情况。(2.4)的逆变换设为

$$\left.\begin{aligned}x^1&=x^1(\bar{x}^1,\bar{x}^2),\\ x^2&=x^2(\bar{x}^1,\bar{x}^2)。\end{aligned}\right\}\tag{2.5}$$

这里这些函数关系 $\bar{x}^1=\bar{x}^1(x^1,x^2)$，$\bar{x}^2=\bar{x}^2(x^1,x^2)$；$x^1=x^1(\bar{x}^1,\bar{x}^2)$，$x^2=x^2(\bar{x}^1,\bar{x}^2)$应当使得平面上每一个点只与一对的 x^1、x^2 或 $\bar{x}^1$、$\bar{x}^2$ 对应，而每一对的 x^1、x^2 或 $\bar{x}^1$、$\bar{x}^2$ 数值也只与一个点对应，并且相邻的点经过坐标变换后仍然保持为相邻的点。根据(2.4)或(2.5)式，我们就可以得到坐标的微分关系，按微分法则我们有

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}\bar{x}^1&=\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1+\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2,\\ \mathrm{d}\bar{x}^2&=\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1+\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2。\end{aligned}\right\}\tag{2.6}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}x^1&=\frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^1}\mathrm{d}\bar{x}^1+\frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^2}\mathrm{d}\bar{x}^2,\\ \mathrm{d}x^2&=\frac{\partial x^2}{\partial\bar{x}^1}\mathrm{d}\bar{x}^1+\frac{\partial x^2}{\partial\bar{x}^2}\mathrm{d}\bar{x}^2。\end{aligned}\right\}\tag{2.7}$$

显然，如果让 $\bar{x}^1=x,\bar{x}^2=y,x^1=r,x^2=\varphi$，则(2.6)式就是(2.2)式或(2.3)式，(2.6)或(2.7)就是(2.2)的更一般写法，它不限于直角坐标 x、y 与极坐标 r、φ 之间的变换。

从上面的讨论我们看出，当更换坐标系时，元位移矢量的分量总是按一定的规律变换，这种变换规律和 x^1、x^2 与 $\bar{x}^1$、$\bar{x}^2$ 之间的函数关系直接相关，由微分法则(2.6)或(2.7)决定下来。我们这里的所谓元位移矢量的分量，就是坐标的微分 $\mathrm{d}x^i(i=1,2)$ 或 $\mathrm{d}\bar{x}^i(i=1,2)$。如果所采用的是直角坐标，则各个坐标微分 $\mathrm{d}x^i(i=1,2)$ 的量纲都是长度。如果采用别的坐标系，坐标微分的量纲就未必为长度。例如在极坐标中 $\mathrm{d}r$ 是长度，但 $\mathrm{d}\varphi$ 就不是长度，因此，一般说来，坐标的微分未必能反映位移矢量的真实物理分量，但是它们与真实的物理分量有确定的关系，例如在极坐标中，$\mathrm{d}\varphi$ 如果乘以 r，即 $r\mathrm{d}\varphi$，就反映元位移 $\mathrm{d}l$ 沿 φ 增加方向的物理分量。为了理论上探讨问题的方便起见，我们以后主要还是把着眼点放在“数学分量”，即把量纲与元位移矢量 $\mathrm{d}l$ 不同的诸如 $\mathrm{d}\varphi$ 这类的量也作为 $\mathrm{d}l$ 的分量，余类推。这样做在讨论物理问题时不会有什么值得不放心的地方，因为比方说，知道了 $\mathrm{d}\varphi$ 之后，人们就不难知道 $\mathrm{d}l$ 在 φ 增加方向的真实物理分量。下面将会看到，数学分量与物理分量之间有简单的规律联系着。

在物理学中，矢量多得很，我们上面所引用的 dl，只不过是作为例子而已，大家可以随手举出很多矢量的例子来，比如速度就是矢量，让我们就以速度为例，看看坐标变换后，作为某个客观存在的速度矢量，其分量如何变换。当然，我们这里所说的分量，依然是数学分量，比如说，在极坐标中，$\frac{d\mathrm{r}}{d\mathrm{t}}$ 与 $\frac{d\varphi}{d\mathrm{t}}$ 就分别作为速度的两个分量，这里 t 表示时间。大家知道，$\frac{d\varphi}{dt}$ 是角速度，但是，只要乘以 r，则 $\mathrm{r}\frac{d\varphi}{d\mathrm{t}}$ 就是速度沿 φ 增加方向的物理分量。据此，速度的分量(数学

分量)就是坐标对时间的微商,即$\frac{dx^i}{dt}(i=1,2)$,由于时间 t 与坐标系的选取无干,不同的坐标系用的是共同的时间(暂时别管相对论),因此,时间是标量,是不随坐标系的更动而变换的量——不变量。所以,坐标变换时,速度的变换规律只要把(2.6)或(2.7)两侧除以 dt 就是了:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\bar{x}^1}{dt}&=\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^1}\frac{dx^1}{dt}+\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^2}\frac{dx^2}{dt},\\ \frac{d\bar{x}^2}{dt}&=\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^1}\frac{dx^1}{dt}+\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^2}\frac{dx^2}{dt}。\end{aligned}\right\}\tag{2.8}$$

或

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx^1}{dt}&=\frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^1}\frac{d\bar{x}^1}{dt}+\frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^2}\frac{d\bar{x}^2}{dt},\\ \frac{dx^2}{dt}&=\frac{\partial x^2}{\partial\bar{x}^1}\frac{d\bar{x}^1}{dt}+\frac{\partial x^2}{\partial\bar{x}^2}\frac{d\bar{x}^2}{dt}。\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

让我们令

$$\frac{d\bar{x}^1}{dt}=\bar{v}^1,\ \frac{d\bar{x}^2}{dt}=\bar{v}^2,\ \frac{dx^1}{dt}=v^1,\ \frac{dx^2}{dt}=v^2$$

就得

$$\left.\begin{aligned}\bar{v}^1&=\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^1}v^1+\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^2}v^2,\\ \bar{v}^2&=\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^1}v^1+\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^2}v^2。\end{aligned}\right\}\tag{2.10}$$

$$\left.\begin{aligned}v^1&=\frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^1}\bar{v}^1+\frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^2}\bar{v}^2,\\ v^2&=\frac{\partial x^2}{\partial\bar{x}^1}\bar{v}^1+\frac{\partial x^2}{\partial\bar{x}^2}\bar{v}^2。\end{aligned}\right\}\tag{2.11}$$

把(2.10)、(2.11)与(2.6)及(2.7)对比可以看出,速度矢量(的分量)的变换规律和元位移矢量(的分量)的变换规律一样。人们规定,当坐标变换时,如果一个矢量的各个分量按(2.6)、(2.7)或(2.10)、(2.11)的规律变换,这个矢量就叫做反变矢量。坐标的微分 dx^i(元位移矢量 dl 写成分量时的形式,$i=1,2$)就是反变矢量的典

型。

例：在平面中，如果采用直角坐标，某粒子在 P 点的速度为 $v^x = \frac{dx}{dt}$、$v^y = \frac{dy}{dt}$，试问，在极坐标中，这个粒子的速度 $v^r = \frac{dr}{dt}$、$v^\varphi = \frac{d\varphi}{dt}$ 如何由 v^x、v^y 算出？

解：按（2.6）的变换公式，有

$$v^r = \frac{\partial r}{\partial x} v^x + \frac{\partial r}{\partial y} v^y,$$

$$v^\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} v^x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} v^y。$$

直角坐标 x、y 与极坐标 r、φ 的函数关系为

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \varphi = tg^{-1}\frac{y}{x}。$$

因而 $$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\varphi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{r^2} = \frac{-\sin\varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}$$

所以

$$v^r = v^x \cos\varphi + v^y \sin\varphi,$$

$$v^\varphi = -v^x \frac{\sin\varphi}{r} + v^y \frac{\cos\varphi}{r}。$$

1—3　符号的约定

我们前面的讨论，都局限于二维平面上的坐标变换，这些讨论可以按类似步骤推广到N维空间。当空间维数N很大时，象(2.6)这类式子写起来就很繁了。因此，需要来个简化。以(2.6)推广到N维空间为例，可以写成

$$d\bar{x}^1=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^i}dx^i,$$

$$d\bar{x}^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^i}dx^i,$$

$$\vdots$$

$$d\bar{x}^N=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\bar{x}^N}{\partial x^i}dx^i。$$

即使如此，写起来也够冗长了，再来一次简化，写成

$$d\bar{x}^j=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^i}dx^i,\quad (j=1,2\cdots,N)\tag{3.1}$$

这样一个式子，就代表N个式子，因为j可以分别为1，2，…，N，从这个式子我们还可注意到，式中累加的指标i出现两次，一次在“水平线”下(在分母)，一次在“水平线”上。这种现象是极其普遍的。因此，我们还可以约定，凡是在同一个项中，出现重复指标，并且两个重复指标的位置分别位于“水平线”两侧，就必须对该指标的所有可能值累加起来。即约定(举例说)

$$\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^i}dx^i=\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^2}dx^2+\cdots+\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^N}dx^N$$

经过这样约定，(3.1)的Σ符号就可以省去，简写为

$$d\bar{x}^j=\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^i}dx^i\quad (j=1,2,\cdots,N)\tag{3.2}$$

根据这种规定，重复的上、下指标就意味着对该指标累加，从而省

去书写累加符号 $\sum\limits_{i=1}^{N}$。这种约定给人们带来极大的方便。通常称这种约定为爱因斯坦约定或叫爱因斯坦惯例。根据这个约定，在写一般式子时，必须避免在同一项中出现三个以上的重复指标。例如式子

$$d\bar{x}^i=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^i}dx^i \quad (i=1,2,\cdots,N)$$

就无意义。因为式子右边在同一个项中出现三个 i，人们无法知道该对哪两个上、下指标累加。

既然重复的上、下指标意味着对该指标从 1 到 N 累加，不管这个指标用什么字母表示都是如此，可见，累加的重复指标可以随意更换成别的字母而意义不变，只要这个字母不与该项中其他作为指标的字母重复就可以了。例如

$$d\bar{x}^j=\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^i}dx^i=\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^r}dx^r=\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^s}dx^s, \quad (j=1,2,\cdots,N)。$$

由于累加的重复指标的字母可以任意更换而意义不变，因而这种指标叫做傀标。与傀标不同的指标叫做自由指标，例如(3.2)式中的 j 就是自由指标，它表示让 $j=1,2,\cdots,N$ 这些数字的任何一个该式都成立，即事实上(3.2)共有 N 个式子。请注意，自由指标在任何式子中都必须"平衡"。例如，在(3.2)式中左边自由指标是 j，右边也必须是 j，而且都必须在"水平线"的同一侧，都"上"(或"下")指标①，这叫做"平衡"，可见，(3.2)这类式子是很浓缩的式子，它事实上表示 N 个式子，每个式子的右边都包含 N 个项之和。往后，我们还要省去自由指标必须从 1 到 N 的注解，即省去如(3.2)式后面的"$(j=1,2,\cdots,N)$"这个尾巴。只不过我们心照不宣，承认该式自由指标 $j=1,2,\cdots,N$ 就是了。

在一些极个别的情况下，也可能出现重复的上、下指标并不表

---

① 指标附在文字的右上角的叫上标，在文字右下角的叫下标，但如果文字本身在分数式的分母，其在右上角的指标就作为下标。

示必须对该指标从 1 到 N 的所有可能值都累加起来，遇到这种情况，就要特别声明。通常是把这样的指标用括号围起来，比如，写成(i)。总之，遇到特殊情况，加以特别声明或特别处理就是了。这种情况很少见。

有了上述关于符号的约定，我们就可以仿照(2.6)式定义二维反变矢量的方式，定义 N 维空间的反变矢量。设 x^i 及 $\bar{x}^i$ 分别为 N 维空间的两组不同坐标架，它们之间的关系由函数

$$\bar{x}^i=\bar{x}^i(x^i) \text{ 或 } x^i=x^i(\bar{x}^i) \tag{3.3}$$

联系着，这些函数要求 x^i 与 $\bar{x}^i$ 之间一一对应并且相邻的点经坐标变换后仍为相邻的点。如果在 x^i 坐标系中某点 P 有一个物理量 v^i，它必须由 N 个量才能完整描述，而且在坐标变换时，按下面方式变换

$$\bar{v}^i=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j}v^j \tag{3.4}$$

则这个物理量就叫做N 维反变矢量。(3.4)的逆变换为

$$v^i=\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^j}\bar{v}^j \tag{3.5}$$

注意，(3.3)式中()中的 x^i 或 $\bar{x}^i$ 的指标 i 不参与关于指标累加的约定，也不参与自由指标的平衡，它只是表明了"$\bar{x}^i$ 是 x^i 的函数"或"x^i 是 $\bar{x}^i$ 的函数"的功能。

1—4 共变矢量

在 1－2 我们谈到了二维的速度矢量，它与元位移直接相关。元位移对时间的微商就是速度。因此，速度（各个分量）的变换规律就与元位移（各个分量）的一样，成为反变矢量，这是很自然的。其他矢量是否也如此呢？我们以电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 作为例子来探讨一番。

仍以二维平面来讨论比较简单。设 x^1、x^2 坐标系中，平面上各点的电势为 $v(x^1、x^2)$，我们从电磁学中知道，如果 x^1、x^2 为直角坐标，则 v 对于坐标的偏微商和电场强度只差一个负号，即

$$\left.\begin{aligned} E_1&=-\frac{\partial v}{\partial x^1},\\ E_2&=-\frac{\partial v}{\partial x^2}。\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

为了免去负号的纠缠，我们令 $\varphi=-v$，则

$$\left.\begin{aligned} E_1&=\frac{\partial \varphi}{\partial x^1},\\ E_2&=\frac{\partial \varphi}{\partial x^2}。\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

或写成

$$E_i=\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \tag{4.3}$$

我们这里把 E 的自由指标写在下方，是为了使同一个式子中各项的自由指标平衡。右边 i 在分母，所以左边 E 的指标 i 写在下方，下面我们将看到，这样写法是非常合理的。

我们刚说过，如果(4.2)中 x^1、x^2 对应于直角坐标的 x、y 时，E_1、E_2 就分别表示静电场的物理分量。但是，我们打算把(4.2)或(4.3)这类式子推广到所有坐标系，即把 φ 对坐标的偏微商总是当