成人高考金钥匙丛书

CHENG REN GAO KAO JIN YAO SHI CONG SHU

数学

陈德燕 主编

福建少年儿童出版社

成人高考金钥匙丛书

数学

主编 陈德燕

编者 陈德燕 陈登山
陈祥青 陈仁灼
陈祥嵩 胡玉青

福建少年儿童出版社

成人高考金钥匙丛书　数学

主编：陈德燕
出版发行：福建少年儿童出版社
社址：福州市东水路 76 号（邮编：350001）
经销：福建省新华书店
印刷：福建省蓝盾印刷厂
开本：787 × 1092 毫米　1/16
字数：320 千字
印张：12. 625
印数：1 – 5220
版次：2000 年 7 月第 1 版
印次：2000 年 7 月第 1 次印
ISBN 7 – 5395 – 1865 – 0/G · 1186
定价：12. 00 元

目　　录

第一部分　代　数

第一单元　数、式、方程和方程组

【复习指导】

本单元的考试要求是：1. 理解有理数、实数及数轴、相反数、绝对值、倒数、算术平方根的概念，会进行有关计算. 2. 理解有关整式、分式、二次根式的概念，掌握它们的一些性质和运算法则. 3. 掌握一元一次方程、一元二次方程的解法，能灵活运用一元二次方程根的判别式以及根与系数的关系解决有关问题. 4. 会解有惟一解的二元一次方程组、三元一次方程组；会解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组；会解简单的由两个二元二次方程组成的方程组（主要指以下几种类型：用加减消元法可消去某个未知数、可消去二次项的，以及至少有一个方程可分解成一次方程的）.

从近几年的试卷来看，考查的重点是：能灵活运用一元二次方程根的判别式以及根与系数的关系（韦达定理）解决有关问题. 解方程、解方程组则作为工具在后面的内容中结合考查. 考查一元二次方程根的判别式、一元二次方程根与系数的关系的试题每年都有 1 题，有的是小题，有的是大题，分值大致为 5 分或 8 分. 难度不大，是应该做好并拿到分数的题目. 现将 1996～1999 这四年的考试题整理如下，供大家分析与比较.

1. （1996 年）设实数 a 使得方程 $x^2+(a-1)x+1=0$ 有两个实根 x_1、x_2.

（1）求 a 的取值范围；（2）当 a 取何值时，$\frac{1}{{x_1}^2}+\frac{1}{{x_2}^2}$取得最小值，并求出这个最小值.

答案：（1）$a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant 3$；（2）当 $a=-1$ 或 $a=3$ 时，取最小值 2.

2. （1997 年）实数 m 取何值时，关于 x 的方程 $x^2+(m-2)x-(m+3)=0$ 的两根的平方和最小？并求出该最小值.

答案：$m=1$ 时，方程两根的平方和最小，最小值为 9.

3. （1998 年）已知关于 x 的不等式 $x^2-ax+a>0$ 的解集为实数集 R，则 a 的取值范围是（　　）.

A. (0，4)　　B. [2，+∞)　　C. [0，2)　　D. $(-\infty, 0)\cup(4, +\infty)$

答案：A

4. (1999年) 已知关于 x 的方程 $x^2+ax-a=0$ 有两个不等的实根，则（　　）.

A. $a<-4$ 或 $a>0$　　B. $a\geqslant 0$　　C. $-4<a<0$　　D. $a>-4$

答案：A

5. (1999年) 关于 x 的方程 $x^2-(a+3b)x-2b=0$ 的两根之和为 8，两根之积为 -4，则（　　）.

A. $a=-2$，$b=-2$　　B. $a=-2$，$b=2$　　C. $a=2$，$b=-2$　　D. $a=2$，$b=2$

答案：D

例 1　$-6\frac{1}{2}$ 的相反数等于________；$-6\frac{1}{2}$ 的倒数等于________；$-6\frac{1}{2}$ 的绝对值等于________.

解：$-6\frac{1}{2}$ 的相反数是 $6\frac{1}{2}$；倒数是 $-\frac{2}{13}$；绝对值是 $6\frac{1}{2}$.

例 2　计算：$|3a+1|+|2a-1|$.

分析：去掉绝对值符号，应考虑绝对值符号内式子的正负符号. 若不能确定其正负符号，则应分区间讨论.

解：1) 当 $a<-\frac{1}{3}$ 时，原式 $=-(3a+1)-(2a-1)=-3a-1-2a+1=-5a$；

2) 当 $-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，原式 $=3a+1-(2a-1)=3a+1-2a+1=a+2$；

3) 当 $a>\frac{1}{2}$ 时，原式 $=3a+1+2a-1=5a$.

例 3　若 $a<0$，则 a 与 $-a$ 的大小关系是（　　）.

A. $a<-a$　　B. $a\leqslant -a$　　C. $a>-a$　　D. $a\geqslant -a$

解：$\because$ $a<0$，$\therefore$ $-a>0$，因此 $a<-a$. 选 A.

例 4　若 $|m|=|n|$，则 m 和 n 的关系是（　　）.

A. $m=n$　　B. $m=-n$　　C. $m=\pm n$　　D. $-m=n$

解：两数绝对值相同，这两数可以相同，也可以是互为相反数. 故选 C.

例 5　若 $\frac{x}{|x|}=-1$，则 x 应满足的条件是（　　）.

A. $x>0$　　B. $x<0$　　C. $x\geqslant 0$　　D. $x\leqslant 0$

解：根据绝对值定义：当 $x>0$ 时，$|x|=x$；当 $x=0$ 时，$|x|=0$；当 $x<0$ 时，$|x|=-x$，结合本题特点，知 $x<0$. 应选 B.

例 6　若 $a+b<0$，且 $ab<0$，那么只要（　　）.

A. $a>0$，$b>0$　　B. $a<0$，$b<0$

C. a、b 异号　　D. a、b 中一个为负，一个为正且负的绝对值较大

解：$\because$ $ab<0$，$\therefore$ a、b 异号. 又 $\because$ $a+b<0$，$\therefore$ 负数的绝对值较大. 故选 D.

例 7　在数轴上与数 -2 对应的点距离为 2 的点所对应的有理数是（　　）.

A. 0　　B. -4　　C. 0 或 -4　　D. ± 4

解：设所对应的数为 x. 依题意有 $|x-(-2)|=2$，$\therefore$ $x+2=\pm 2$，$x=0$ 或 $x=-4$. 故应选 C.

例 8　在整式 $2x^3-5$，$-8y$，$2m-n$，$3a^2+2b^2$，$-6x$，2，$-9x^2y^3$，$7a^3b+c-x$ 中，单

项式共有（　　）.

A. 4个　　B. 5个　　C. 6个　　D. 7个

解：在上述整式中，单项式有：$-8y$，$-6x$，2，$-9x^2y^3$ 共4个．应选A.

例9　在代数式$-3x$，$-x^2y$，$\frac{ay}{x}$，$-\sqrt{2}$，x，$\frac{1}{2}$，$\frac{xy^2}{2}$，$\frac{1}{a+b}$，a^2-4x^2 中，整式共有（　　）.

A. 5个　　B. 6个　　C. 7个　　D. 8个

解：在上述代数式中，整式有：$-3x$，$-x^2y$，$-\sqrt{2}$，x，$\frac{1}{2}$，$\frac{xy^2}{2}$，a^2-4x^2 共7个，故应选C.

评注：实数2，$-\sqrt{2}$，$\frac{1}{2}$等都是单项式，也是整式.

例10　已知实数 x，y 满足关系 $x^2+y^2+2x-4y+5=0$，求$[2x^2-(x+y)(x-y)]\times[(-x-y)(-x+y)+2y^2]$的值.

解：将条件配方，得$(x+1)^2+(y-2)^2=0$，∴　$x+1=0$ 且 $y-2=0$．因此，$x=-1$ 且 $y=2$．∴　原式$=[2x^2-(x^2-y^2)]\times[(x^2-y^2)+2y^2]=(x^2+y^2)(x^2+y^2)=(1+4)^2=25$.

例11　计算下列各题：

(1) $(m+1)^2-5(m+1)(m-1)+3(m-1)^2$；　(2) $(x+y)^2(x^2-xy+y^2)^2$；

(3) $(x+y)^2-(x^3+y^3)\div(x+y)$.

解：(1) 原式$=m^2+2m+1-5(m^2-1)+3(m^2-2m+1)=-m^2-4m+9$；

(2) 原式$=[(x+y)(x^2-xy+y^2)]^2=(x^3-y^3)^2=x^6-2x^3y^3+y^6$；

(3) 原式$=x^2+2xy+y^2-(x^2-xy+y^2)=3xy$.

例12　把下列各式分解因式：

(1) $(x-2)^3-(2-x)^2$；　(2) $a^3-b^3-a^2+b^2$；

(3) $a^3-4a^2b+4ab^2$；　(4) $(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$.

解：(1) $(x-2)^3-(2-x)^2=(x-2)^2(x-2-1)=(x-2)^2(x-3)$；

(2) $a^3-b^3-a^2+b^2=(a^3-b^3)-(a^2-b^2)=(a-b)(a^2+ab+b^2)-(a-b)(a+b)=(a-b)(a^2+ab+b^2-a-b)$；

(3) $a^3-4a^2b+4ab^2=a(a^2-4ab+4b^2)=a(a-2b)^2$；

(4) $(x^2+y^2)^2-4x^2y^2=(x^2+y^2+2xy)(x^2+y^2-2xy)=(x+y)^2(x-y)^2$.

例13　已知 $x^2-3x+1=0$，求 $x^4+\frac{1}{x^4}$的值.

解：∵　$x^2-3x+1=0$，∴　$x^2+1=3x$ 且 $x\neq0$，∴　$x+\frac{1}{x}=3$；$x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=7$；$x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2=47$.

例14　计算$\sqrt{24}+\sqrt{150}+\sqrt{54}+10\sqrt{44}+2\sqrt{98}-5\sqrt{176}$的值.

解：原式$=2\sqrt{6}+5\sqrt{6}+3\sqrt{6}+20\sqrt{11}+14\sqrt{2}-20\sqrt{11}=10\sqrt{6}+14\sqrt{2}$.

例15　计算$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{2}{\sqrt{3}+1}$的值.

解：原式$=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}+1-\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2}=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1=2$.

例16　已知 $x=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$，$y=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$，求 $3x^2-5xy+3y^2$ 的值.

解：∵ $x=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$，$y=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

解法一：原式$=3(2+\sqrt{3})^2-5(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+3(2-\sqrt{3})^2=3(7+4\sqrt{3})-5+3(7-4\sqrt{3})=37$.

解法二：原式$=3(x+y)^2-11xy=3\times4^2-11=37$.

例 17 已知$\begin{cases}x=1,\\ y=-\frac{1}{2}\end{cases}$是方程组$\begin{cases}2x+6y=a,\\ bx-ay=1\end{cases}$的解，那么$a+b=$________.

解：∵ $\begin{cases}x=1,\\ y=-\frac{1}{2}\end{cases}$是方程组$\begin{cases}2x+6y=a,\\ bx-ay=1\end{cases}$的解，

∴ $\begin{cases}2-3=a,\\ b+\frac{1}{2}a=1,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}a=-1,\\ b=\frac{3}{2},\end{cases}$ ∴ $a+b=\frac{1}{2}$.

例 18 甲、乙两人从相距 28 千米的两地同时相向而行，经 3 小时 30 分钟相遇. 如果乙先出发 2 小时，那么甲在出发 2 小时 45 分钟后与乙相遇. 问甲、乙两人每小时各走多少千米?

解：设甲每小时走 x 千米，乙每小时走 y 千米. 根据题意，当他们同时出发时，各走 $3\frac{1}{2}$ 小时时相遇，故 $3\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}y=28$. 乙先出发 2 小时，甲再出发，此时当甲出发 $2\frac{3}{4}$ 小时时他们相遇，因此，$2\frac{3}{4}x+(2+2\frac{3}{4})y=28$. 由此可得下列方程组：

$$\begin{cases}3\frac{1}{2}(x+y)=28,\\ 2\frac{3}{4}x+(2+2\frac{3}{4})y=28.\end{cases}\quad ∴ \begin{cases}x+y=8,\\ 11x+19y=112.\end{cases}\quad \text{解得}\quad \begin{cases}x=5,\\ y=3.\end{cases}$$

答：甲每小时走 5 千米，乙每小时走 3 千米.

例 19 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x^2+y^2=25 \cdots\cdots ①,\\ x+y=7 \cdots\cdots ②;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}xy+x=10 \cdots\cdots ①,\\ xy-x=8 \cdots\cdots ②;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2-y=29 \cdots\cdots ①,\\ x^2+x+y=49 \cdots\cdots ②;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x^2+2xy+y^2=9 \cdots\cdots ①,\\ (x-y)^2-3(x-y)+2=0 \cdots\cdots ②.\end{cases}$

解：(1) 由②知，$y=7-x$，代入①得，$x^2+(7-x)^2=25$，即 $x^2-7x+12=0$. 解得 $x_1=3$，$x_2=4$，分别代入求得 $y_1=4$，$y_2=3$. 因此，方程组的解为$\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=4,\\ y_2=3.\end{cases}$

(2) 由①－②，得 $2x=2$，$x=1$，代入①得 $y=9$. 因此，方程组解为$\begin{cases}x=1,\\ y=9.\end{cases}$

(3) 由①＋②，得 $2x^2+x=78$，即 $2x^2+x-78=0$，解得 $x_1=-\frac{13}{2}$，$x_2=6$. 代入①得 $y_1=\frac{53}{4}$，$y_2=7$. 因此，方程组的解为$\begin{cases}x_1=-\frac{13}{2},\\ y_1=\frac{53}{4};\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=6,\\ y_2=7.\end{cases}$

(4) 将①配方，②因式分解，得$\begin{cases}(x+y)^2=9,\\(x-y-1)(x-y-2)=0,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}x+y=3,\\x-y-1=0\end{cases}$
或$\begin{cases}x+y=3,\\x-y-2=0\end{cases}$ 或$\begin{cases}x+y=-3,\\x-y-1=0\end{cases}$ 或$\begin{cases}x+y=-3,\\x-y-2=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=2,\\y_1=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\dfrac{5}{2},\\y_2=\dfrac{1}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=-1,\\y_3=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=-\dfrac{1}{2},\\y_4=-\dfrac{5}{2}.\end{cases}$

例 20 已知关于 x、y 的方程组$\begin{cases}5x+my=4\\3x+2y=6\end{cases}$有解. 问 m 在什么范围取值时，其解满足 $x<0$ 和 $y>0$.

解：由$\begin{cases}5x+my=4,\\3x+2y=6,\end{cases}$ 得$\begin{cases}15x+3my=12,\\15x+10y=30,\end{cases}$ 相减得$(3m-10)y=-18$，$y=\dfrac{-18}{3m-10}$，代入得 $x=\dfrac{6m-8}{3m-10}$. 由 $x<0$，$y>0$ 知，$\begin{cases}\dfrac{6m-8}{3m-10}<0,\\\dfrac{-18}{3m-10}>0.\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}\dfrac{4}{3}<m<\dfrac{10}{3},\\m<\dfrac{10}{3}.\end{cases}$ ∴ $\dfrac{4}{3}<m<\dfrac{10}{3}$.
因此，m 的取值范围是$\dfrac{4}{3}<m<\dfrac{10}{3}$.

例 21 方程 $x^2-2x+m=0$ 有两个相异实根，则 m 的取值范围是（ ）.

A. $m>0$ B. $m<1$ C. $0<m<1$ D. $m<0$ 或 $m>1$

解：∵ 原方程有两个相异实数根，∴ $\Delta=(-2)^2-4m=4-4m>0$，∴ $m<1$. 应选 B.

例 22 已知一元二次方程 $kx^2-x-1=0$ 有两个不相等的实数根，那么 k 的取值范围是（ ）.

A. $k>\dfrac{1}{4}$ B. $k<\dfrac{1}{4}$且 $k\neq0$ C. $k<-\dfrac{1}{4}$ D. $k>-\dfrac{1}{4}$且 $k\neq0$

解：∵ 方程有两个不相等的实数根，

∴ $\begin{cases}k\neq0,\\\Delta>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}k\neq0,\\(-1)^2+4k>0,\end{cases}$ ∴ $k>-\dfrac{1}{4}$且 $k\neq0$. 应选 D.

评注：1. 由判别式 Δ 的符号，判断一元二次方程实根的情况：$\Delta>0\Longleftrightarrow$方程有两个不相等的实根；$\Delta=0\Longleftrightarrow$方程有两个相等的实根；$\Delta<0\Longleftrightarrow$方程没有实根. 它是高考的重点内容之一. 应予以准确地理解，并熟练掌握. 2. 若二次项系数中含有字母，则要考虑二次项系数与零的关系（二次项系数应不为零）. 如例 22 中，由于方程有两个不同实根的前提是该方程必须是一个二次方程，因此二次项系数 $k\neq0$.

例 23 已知关于 x 的一元二次方程 $2m(x+2)^2+x=0$，(1) 若方程有两个不相等的实数根，求 m 的取值范围；(2) 若方程有两个相等的实数根，求 m 的值并求出这时方程的根；(3) 若方程没有实数根，求 m 的取值范围.

解：方程化为 $2mx^2+8mx+8m+x=0$，即 $2mx^2+(8m+1)x+8m=0$……①，①的判别 $\Delta=(8m+1)^2-4\times2m\times8m=16m+1$.

(1) 若方程有两个不相等的实根，则$\begin{cases}2m\neq0,\\\Delta>0.\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}2m\neq0,\\16m+1>0.\end{cases}$ ∴ $m>-\dfrac{1}{16}$且 $m\neq0$.

(2) 若方程有两个相等的实根，则$\begin{cases}2m\neq0,\\\Delta=0,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}2m\neq0,\\16m+1=0.\end{cases}$ ∴ $m=-\dfrac{1}{16}$.

将 $m=-\frac{1}{16}$ 代入方程①，并化简整理得，$x^2-4x+4=0$，∴ $x_1=x_2=2$.

(3) 若方程没有实根，则 $\begin{cases}2m\neq0,\\ \Delta<0,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}2m\neq0,\\ 16m+1<0,\end{cases}$ ∴ $m<-\frac{1}{16}$.

因此，当 $m>-\frac{1}{16}$ 且 $m\neq0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $m=-\frac{1}{16}$ 时，方程有两个相等的实数根，并且此时两根为 $x_1=x_2=2$；当 $m<-\frac{1}{16}$ 时，方程没有实数根.

例 24 如果方程 $ax^2-bx-6=0$ 与方程 $ax^2+2bx-15=0$ 有一个公共根是 3，求 a、b 的值，并分别求出两个方程的另一根.

解：∵ $x=3$ 是两个方程的公共根，∴ 将 $x=3$ 代入方程成立，因此有：

$\begin{cases}9a-3b-6=0,\\ 9a+6b-15=0.\end{cases}$ 解此方程组，得 $\begin{cases}a=1,\\ b=1.\end{cases}$ 将 $a=1$，$b=1$ 代入第一个方程得 $x^2-x-6=0$，解得 $x_1=3$，$x_2=-2$；代入第二个方程得 $x^2+2x-15=0$，解得 $x_1=3$，$x_2=-5$. ∴ $a=1$，$b=1$，两个方程的另一根分别是 -2 和 -5.

例 25 若 $2+\sqrt{2}$ 是方程 $x^2+kx+2=0$ 的一根，则 $k=$__________，方程的另一根是__________.

解：设方程的另一根为 x_2，由韦达定理知，$x_2+(2+\sqrt{2})=-k$，$x_2(2+\sqrt{2})=2$.

∴ $x_2=\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}$，代入得 $-k=(2-\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})$. ∴ $k=-4$.

∴ $k=-4$，方程的另一根是 $2-\sqrt{2}$.

评注：一元二次方程根与系数的关系（韦达定理）：设 x_1、x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$) 的两根，则 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$. 它是高考的重点内容之一，每年都有涉及此内容的考题，希望能熟练掌握，并会灵活运用.

例 26 若方程 $2x^2-5x+1=0$ 的两根为 α、β，则 $|\alpha-\beta|$ 的值是（　　）.

A. $\dfrac{17}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ 或 $-\dfrac{\sqrt{17}}{2}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{17}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$

解：∵ α、β 是方程 $2x^2-5x+1=0$ 的两根，∴ $\alpha+\beta=\dfrac{5}{2}$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{2}$.

∴ $|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{(\frac{5}{2})^2-4\times\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{17}{4}}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$. 选 D.

例 27 若 α、β 是方程 $x^2-2(2m+1)x+3m^2-4=0$ 的两个根，且 $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=2$，则 m 的值是（　　）.

A. $\dfrac{5}{3}$ 或 1　　B. $-\dfrac{5}{3}$ 或 1　　C. $\dfrac{5}{3}$ 或 -1　　D. $-\dfrac{5}{3}$ 或 -1

解：∵ α、β 是方程 $x^2-2(2m+1)x+3m^2-4=0$ 的两根，∴ $\alpha+\beta=2(2m+1)$，$\alpha\beta=3m^2-4$，∴ $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{2(2m+1)}{3m^2-4}$. ∵ $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=2$. ∴ $\dfrac{2(2m+1)}{3m^2-4}=2$. 化简得 $3m^2-2m-5=0$，解得 $m=\dfrac{5}{3}$ 或 $m=-1$. 又∵ 方程的判别式 $\Delta=4(2m+1)^2-4(3m^2-4)=4(m^2+4m+5)$，∴ 当 $m=\dfrac{5}{3}$ 或 $m=-1$ 时，$\Delta>0$. 因此，$m=\dfrac{5}{3}$，$m=-1$ 符合要求，选 C.

例 28 求作一个一元二次方程使它的两根分别是方程 $x^2-3x-1=0$ 两根的平方.

分析：不妨设所作的一元二次方程的二次项系数为 1，即 $x^2+px+q=0$，并设 x_1、x_2 是它的两根，则由 $x_1+x_2=-p$，$x_1\cdot x_2=q$ 知，问题转化为求 x_1+x_2 与 $x_1\cdot x_2$ 的值.

解：设所作的一元二次方程为 $x^2+px+q=0$，它的两根为 x_1，x_2. 设方程 $x^2-3x-1=0$ 的两根为 α、β，则 $\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=-1$. 依题意知，$x_1=\alpha^2$，$x_2=\beta^2$. ∴ $-p=x_1+x_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9+2=11$，$q=x_1\cdot x_2=\alpha^2\cdot\beta^2=(\alpha\beta)^2=1$. 因此，$p=-11$，$q=1$，符合条件的一个方程是 $x^2-11x+1=0$.

评注：为提高使用一元二次方程根与系数的关系式解题的能力，应熟记下列常见的变形方法： 1) ${x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$； 2) $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$； 3) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}$. 另外，若由根与系数的关系式求出方程中的字母值（或范围）时，应注意验证判别式 Δ 的符号（$\Delta>0$ 或 $\Delta\geqslant 0$），如例 27. 否则有时会出现增根（或取值范围扩大）.

例 29 关于 x 的一元二次方程 $ax^2-bx+4=0$ 的两个实根的和与这两个实根的积相等，若它的一个根为 $\dfrac{1}{4}$，则 a 的值是（ ）.

A. -48　　B. 24　　C. 48　　D. -24

解：设方程的另一根为 x_2，由于方程两根和与两根积相等. 所以 $\dfrac{1}{4}+x_2=\dfrac{1}{4}\times x_2$. 解得，$x_2=-\dfrac{1}{3}$. 因此方程的两根是 $x_1=\dfrac{1}{4}$，$x_2=-\dfrac{1}{3}$. 又∵ $x_1\cdot x_2=\dfrac{4}{a}$，∴ $-\dfrac{1}{12}=\dfrac{4}{a}$，$a=-48$. 选 A.

例 30 已知关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 的根为 p 和 q，则 p 和 q 的值为（ ）.

A. $p=-1$，$q=-2$　　B. $p=1$，$q=-2$ 或 $p=0$，$q=0$

C. $p=1$，$q=0$　　D. $p=0$，$q=-2$ 或 $p=1$，$q=0$

解：∵ p、q 是方程 $x^2+px+q=0$ 的两根，∴ $\begin{cases}p+q=-p\cdots\cdots①,\\ pq=q\cdots\cdots\cdots\cdots②,\end{cases}$

由②知 $q=0$ 或 $p=1$.

1）当 $q=0$ 时，代入①得 $p=0$； 2）当 $p=1$ 时，代入①得，$q=-2$.

∴ $p=0$，$q=0$ 或 $p=1$，$q=-2$. 应选 B.

例 31 实数 a 在什么范围内取值时，关于 x 的二次方程 $ax^2+2x+a-2=0$ 有两个相异负根.

分析：本题是 1999 年成人高考理科考题. 显然仅有 $\Delta>0$ 是不够的，由于两个根都是负数，因此，它们的和是负数，积为正数，即 $x_1+x_2<0$，$x_1\cdot x_2>0$.

解：∵ 方程有两个不相等的实根， ∴ $\begin{cases}a\neq 0,\\ \Delta=4-4a(a-2)>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a\neq 0,\\ a^2-2a-1<0,\end{cases}$ 解得 $1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$ 且 $a\neq 0$. 又由于两根 x_1，x_2 都是负数，∴ $x_1+x_2<0$，$x_1x_2>0$，

即 $\begin{cases}-\dfrac{2}{a}<0,\\ \dfrac{a-2}{a}>0,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}a>0,\\ a>2.\end{cases}$ 解得 $a>2$. 综合得 a 的取值范围是 $2<a<1+\sqrt{2}$.

评注：此类问题对于文科考生而言，要求稍高一些，现归纳如下：

1. 方程两根异号 $\Longleftrightarrow\begin{cases}\Delta>0,\\ x_1\cdot x_2<0;\end{cases}$

2. 方程两根同号且不相等$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0,\\x_1\cdot x_2>0\end{cases}$（若两根可以相等，则 $\Delta>0$ 改为 $\Delta\geqslant0$）；

3. 方程两根同正且不相等$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0,\\x_1+x_2>0,\\x_1\cdot x_2>0\end{cases}$（若两根可以相等，则 $\Delta>0$ 改为 $\Delta\geqslant0$）；

4. 方程两根同负且不相等$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0,\\x_1+x_2<0,\\x_1\cdot x_2>0\end{cases}$（若两根可以相等，则 $\Delta>0$ 改为 $\Delta\geqslant0$）.

例 32　实数 m 取何值时，关于 x 的方程 $x^2+(m-2)x-(m+3)=0$ 的两根的平方和最小？并求出该最小值.

分析：先依据一元二次方程根与系数的关系式. 用 m 表示该方程两根的平方和（建立目标函数）；再利用方程有两个实根（$\Delta\geqslant0$）求出 m 的取值范围（确定函数的定义域）；最后利用二次函数的最大、最小值求出最值（求函数的最值）.

解：设方程的两根为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=-(m-2)$，$x_1\cdot x_2=-(m+3)$.

$\therefore$　$x_1{}^2+x_2{}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(m-2)^2+2(m+3)=m^2-2m+10=(m-1)^2+9$.

又$\because$　方程有两个实根，$\therefore$　$\Delta=(m-2)^2+4(m+3)=m^2+16>0$，$m$ 可取任何实数值.

因此，当 $m=1$ 时，方程两根的平方和最小，最小值为 9.

例 33　设实数 a 使得方程 $x^2+(a-1)x+1=0$ 有两个实根 x_1，x_2.

（1）求 a 的取值范围；

（2）当 a 取何值时，$\dfrac{1}{x_1{}^2}+\dfrac{1}{x_2{}^2}$取得最小值，并求出这个最小值.

解：（1）由于方程有两个实根 x_1，x_2. 因此方程的判别式 $\Delta=(a-1)^2-4\geqslant0$，
解得　$a\geqslant3$ 或 $a\leqslant-1$.

（2）由一元二次方程根与系数的关系知，$x_1+x_2=-(a-1)$，$x_1x_2=1$.

$\therefore$　$\dfrac{1}{x_1{}^2}+\dfrac{1}{x_2{}^2}=\dfrac{x_1{}^2+x_2{}^2}{x_1{}^2x_2{}^2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\dfrac{(a-1)^2-2}{1}=(a-1)^2-2$.

由（1）知，a 的取值范围是 $a\leqslant-1$ 或 $a\geqslant3$，因此，当 $a=-1$ 或 $a=3$ 时，$\dfrac{1}{x_1{}^2}+\dfrac{1}{x_2{}^2}$有最小值 2.

评注：1. 上述两例的解题过程有一个共同的特点，这也是求函数最值问题的一般性步骤：一是建立目标函数，二是确定函数的定义域，三是求函数的最值. 2. 由于函数的最大值、最小值与函数的定义域（字母的取值范围）有关，因此需要利用方程有实根的条件，求出字母的取值范围，否则将造成字母取值范围扩大，所得的最值就可能不是所需要的最值. 如例 33.

【能力测试】

一、选择题

1. $m+n$ 的相反数是（　　）.

　A. $m-n$　　B. $n-m$　　C. $-m-n$　　D. $n+m$

2. 一个有理数和它的相反数的积（　　）.

　A. 符号必为正　　B. 符号必为负　　C. 一定不小于零　　D. 一定不大于零

3. a、b 是两个有理数，且 $a>b$，那么一定有（　　）.

A. $a+b>a$　　B. $a-b<a$　　C. $2a>2b$　　D. $\frac{a}{b}>1$

4. 在数轴上，到原点的距离等于 5 个单位长度的点所表示的数是（　　）.

A. -5　　B. 5　　C. ±5　　D. $|\pm5|$

5. 若 $ab<0$，则必有（　　）.

A. $a>0$，$b<0$　　B. $a<0$，$b>0$

C. $a>0$，$b<0$ 或 $a<0$，$b>0$　　D. 不同于以上的结论

6. 若 $ab=|ab|$，则（　　）.

A. $ab>0$　　B. $ab\geqslant0$　　C. $a<0$，$b<0$　　D. $ab\leqslant0$

7. $x>2\sqrt{6}$ 时，化简 $|x-4|+x-4$ 的结果是（　　）.

A. $2x-8$　　B. 0　　C. $8-2x$　　D. $2x-8$ 或 0

8. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. n　　D. $n+1$

9. 已知 $a=\sqrt{2}+1$，$b=1-\sqrt{2}$，代数式 a^2+ab+b^2 的值是（　　）.

A. 5　　B. 7　　C. 3　　D. 6

10. 计算 $(4a^{m+1}b)\div(-8a^{2m+1})$ 所得的结果是（　　）.

A. $\frac{1}{2}a^{m+2}b^3$　　B. $-\frac{1}{2}a^{4-m}b$　　C. $-\frac{1}{2}a^{-m}b$　　D. $\frac{1}{2}a^{3-m}b$

11. 一个数的相反数与该数的倒数的和等于 0，则这个数的绝对值等于（　　）.

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

12. 某人以八折的优惠价购买一套服装省 15 元，那么这套服装的实际售价是（　　）.

A. 75 元　　B. 60 元　　C. 150 元　　D. 300 元

13. 若 $\begin{cases}x=3,\\y=5\end{cases}$ 是方程组 $mx-2y=2$ 的一个解，那么 m 的值为（　　）.

A. $\frac{8}{5}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. 4　　D. $-\frac{8}{3}$

14. 方程 $(1+\sqrt{2})x^2-(1-\sqrt{2})x=0$ 的解是（　　）.

A. $x_1=0$，$x_2=2\sqrt{2}-3$　　B. $x_1=1$，$x_2=3-2\sqrt{2}$

C. $x_1=0$，$x_2=3-2\sqrt{2}$　　D. $x_1=0$，$x_2=1$

15. 方程 $4x^2-12x=3$ 的解是（　　）.

A. $x_1=\frac{-3+\sqrt{6}}{2}$，$x_2=\frac{-3-\sqrt{6}}{2}$　　B. $x_1=\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$，$x_2=\frac{3-2\sqrt{3}}{2}$

C. $x_1=\frac{-3+2\sqrt{3}}{2}$，$x_2=\frac{-2-2\sqrt{3}}{2}$　　D. $x_1=\frac{3+\sqrt{6}}{2}$，$x_2=\frac{3-\sqrt{6}}{2}$

16. 解关于 x 的方程 $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0(ab\neq0)$，所得的根是（　　）.

A. $x_1=\frac{2b}{a}$，$x_2=\frac{2a}{b}$　　B. $x_1=\frac{b}{a}$，$x_2=\frac{a}{b}$

C. $x_1=\frac{a^2+b^2}{ab}$，$x_2=0$　　D. 以上都不对

17. 关于 x 的方程 $4x^2-mx-1=0$ 的根的情况是（　　）.

A. 有两个相等的实数根　　B. 有两个不相等的实数根

C. 没有实数根　　D. 与 m 的取值有关，无法确定

18. 关于 x 的方程 $2mx^2+(8m+1)x+8m=0$ 有两个不相等的实数根，则实数 m 的取值范围是（　　）.

A. $m>\frac{1}{16}$　　B. $m>-\frac{1}{16}$　　C. $m>-\frac{1}{16}$ 且 $m\neq 0$　　D. $m<-\frac{1}{16}$

19. 当 $k\geqslant -\frac{1}{4}$ 且 $k\neq 2$ 时，关于 x 的方程 $(k-2)x^2-(2k-1)x+k=0$ 有（　　）.

A. 两个不相等的实数根　　B. 两个相等的实数根

C. 两个实数根　　D. 以上都不对

20. 以 -7 与 3 两数为根，且二次项系数为 1 的一元二次方程是（　　）.

A. $x^2-7x+6=0$　　B. $x^2+7x+3=0$

C. $x^2-4x-21=0$　　D. $x^2+4x-21=0$

21. 设 x_1、x_2 为方程 $2x^2-x-5=0$ 的两个根，则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 等于（　　）.

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{5}$　　C. $-\frac{5}{2}$　　D. $-\frac{2}{5}$

22. 方程 $x^2+3x+m=0$ 的两根之差是 5，则 m 的值是（　　）.

A. 4　　B. -4　　C. ± 4　　D. ± 2

23. 若方程 $x^2+px+q=0$ 的两根是 α、β（$\alpha\beta\neq 0$），则方程 $qx^2+px+1=0$ 的两根是（　　）.

A. $-\alpha$，$-\beta$　　B. $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$　　C. $-\frac{1}{\alpha}$，$\frac{1}{\beta}$　　D. $\frac{1}{\alpha}$，$\frac{1}{\beta}$

二、填空题

1. 计算 $\left(\sqrt{54}-2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)-\left(12\sqrt{\frac{1}{6}}-\sqrt{32}+\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)=$________.

2. 若 $x=\frac{2}{\sqrt{3}-1}$，则 $x^2-2x+1=$______.

3. 方程 $x^2+px+q=0$ 的两根是 -3 和 1，则 $p=$______，$q=$______.

4. 若方程 $6x^2-5kx-12k^2+6=0$ 有一根是 0，则 $k=$______.

5. 若 $2+\sqrt{2}$ 是方程 $x^2+kx+2=0$ 的一根，则方程的另一根是__________.

6. 方程 $4x^2-8x+k=0$ 的两根的倒数的和是 $\frac{8}{3}$，则 $k=$________.

7. 若方程 $2x^2-3x+k=0$ 的两根的差为 $2\frac{1}{2}$，则 $k=$______.

8. 若方程 $x^2+mx-15=0$ 的两根之差的绝对值是 8，则 $m=$______.

9. 若方程 $x^2-x+p=0$ 的两根之比为 3，则 $p=$______.

10. 设 x_1、x_2 是方程 $x^2+4x+p=0$ 的两根，若 $(x_1-2)(x_2-2)$ 的值是 -8，则实数 p 的值是________.

11. 若方程组 $\begin{cases}4x+3y=1,\\ kx+(k-1)y=3\end{cases}$ 的解中 x 和 y 的值相等，则 $k=$______.

三、解答题

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3x-y=3,\\ 4x+3y=17;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x+y-7=0,\\ x^2+y^2=25.\end{cases}$

2. 已知方程 $x^2+2(m-2)x+m^2+4=0$ 有两个实根，且这两个实根的平方和比两根的积

大 21，求 m 的值.

3. 设方程 $2x^2+3x-1=0$ 的两根为 x_1、x_2，求下列各式的值：

(1) $\dfrac{2}{x_1}+\dfrac{2}{x_2}$；　　(2) ${x_1}^2+{x_2}^2$；　　(3) ${x_1}^3+{x_2}^3$.

4. 如果方程 $ax^2-bx-6=0$ 与方程 $ax^2+2bx-15=0$ 有一个公共根是 3，求 a、b 的值，并分别求出两个方程的另一个根.

5. m 取什么值时，方程组 $\begin{cases} x^2+2y^2=6, \\ mx+y=3 \end{cases}$ 有惟一解？并求出这时方程组的解.

6. m 为何值时，方程 $(m+1)x^2-3x+5=0$ 有两个不相等的实数根？

7. 已知方程 $8x^2-(m-1)x+(m-7)=0$ 有两个正根，求 m 的取值范围.

8. 已知方程 $2x^2+mx-2m+1=0$ 的两实根的平方和等于 $7\dfrac{1}{4}$，求 m 的值.

第二单元　不等式和不等式组

【复习指导】

本单元的考试要求是：1. 了解不等式的性质. 会解一元一次不等式、一元一次不等式组和可化为一元一次不等式组的不等式，会解一元二次不等式，了解区间的概念，会在数轴上表示不等式或不等式组的解集. 2. 会解形如 $|ax+b|\geqslant c$ 和 $|ax+b|\leqslant c$ 的绝对值不等式.

考查的重点在解不等式. 解不等式的应用非常广泛，如在求函数的定义域、值域、解判别式等中都有体现. 因此，除解绝对值不等式外，主要与其他知识结合考查，但解不等式是一种工具，应熟练、准确地掌握它，否则将寸步难行. 试卷中对绝对值不等式的考查每年都有 1 小题. 现将 1996～1999 这四年中有关此类不等式的试题整理如下：

1. (1996 年) 不等式 $|2x+5|\geqslant 1$ 的解集为____________________.

答案：$\{x|x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant -2\}$.

2. (1997 年) 不等式 $|3x-5|<8$ 的解集是____________________.

答案：$\{x|-1<x<\frac{13}{3}\}$.

3. (1998 年) 不等式 $|5x+3|>2$ 的解集是____________________.

答案：$\{x|x<-1$ 或 $x>-\frac{1}{5}\}$.

4. (1999 年) 不等式 $|3-2x|-7\leqslant 0$ 的解集是____________________.

答案：$\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$.

例 1　已知 x 为任意实数，试比较 $(x+1)(x+2)$ 与 $(x-3)(x+6)$ 的大小.

分析：比较两数的大小，通常考虑它们的差. 如果 $a-b$ 是正数，那么 $a>b$；如果 $a-b$ 是负数. 那么 $a<b$；如果 $a-b$ 等于零，那么 $a=b$. 反过来也对. 因此有：

$a-b>0\Leftrightarrow a>b$；$a-b=0\Leftrightarrow a=b$；$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

解：$\because$　$(x+1)(x+2)-(x-3)(x+6)=(x^2+3x+2)-(x^2+3x-18)=20>0$.

$\therefore$　$(x+1)(x+2)>(x-3)(x+6)$.

例 2　下列命题中正确的是（　　）.

A. $a>b\Rightarrow a^2>b^2$　　　B. $a>b\Rightarrow |a|>b$

C. $a^2>b^2\Rightarrow a>b$　　　D. $|a|>b\Rightarrow a>b$

分析：对 a、b 取特殊值代入验证，可排除选项 A、C、D. 如：取 $a=2$，$b=-3$. 可排除 A；取 $a=-3$，$b=2$ 则可排除 C 和 D. B 的正确性说明如下：$\because$　$a>b$，$|a|\geqslant a$（一个数的绝对值不小于这个数本身），$\therefore$　$|a|\geqslant a>b$（不等式传递性）.

答：选 B.

例 3　若 $a<b<0$，则下列不等式中正确的是（　　）.