

高等学校教材

电

E l e c t r o m a g n e t i c

磁

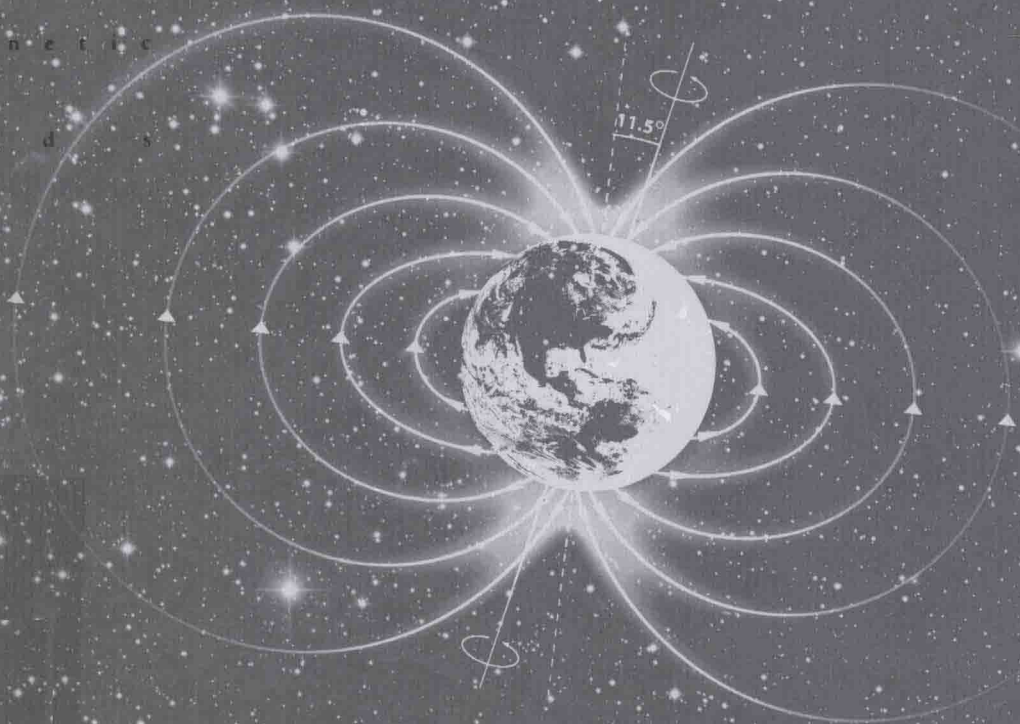
F i e l d s

场

李琳 编著

a g n e t i c

f i e l d s



高等教育出版社

高等学校教材

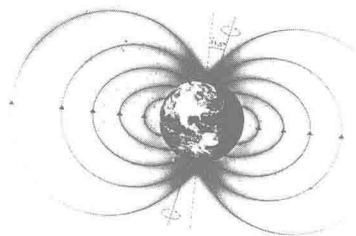
电

E l e c t r o m a g n e t i c

磁

F i e l d s

场



· 编 著

高等教育出版社·北京

内容简介

本书参照教育部高等学校电子电气基础课程教学指导分委员会制订的《电磁场类课程教学基本要求》编写。

本书的主要内容是阐述宏观电磁场的基本理论和分析方法,全书正文共有7章。第1章为电磁场的基本规律。阐述静电场和恒定磁场的基本规律并引入时变电磁场的基本方程,为全书的理论基础。第2章在电准静态场的范畴中引入标量电位和电容、电导参数,并讨论导电媒质中的电场。第3章在磁准静态场的范畴中引入矢量磁位、标量磁位和电感参数,并讨论磁准静态电场和导电媒质中的电磁扩散等内容。第4章讨论静态电磁场的边值问题及其求解方法。第5章介绍电磁场的能量与功率流和准静态场中的电场力与磁场力。第6章介绍电磁波的传播特性和电磁辐射的基本理论。第7章讲述电磁波在规则波导中的模式、传播规律和谐振腔中电磁场的模式及特性。

本书可作为普通高等学校电气工程及其自动化专业或其他电气信息类专业本科生“电磁场”课程的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场 / 李琳编著. --北京: 高等教育出版社,
2016. 1

ISBN 978-7-04-044533-6

I. ①电… II. ①李… III. ①电磁场-高等学校-教材 IV. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 311934 号

电 磁 场 Dian ci chang

策划编辑 张江漫 责任编辑 张江漫 封面设计 张申申 版式设计 马敬茹
插图绘制 杜晓丹 责任校对 吕红颖 责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	北京汇林印务有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.hepmall.com
印 张	14.25	版 次	2016 年 1 月第 1 版
字 数	260 千字	印 次	2016 年 1 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	23.70 元
咨询电话	400-810-0598		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 44533-00

前 言

本书参照教育部高等学校电子电气基础课程教学指导分委员会制订的《电磁场类课程教学基本要求》编写,可作为普通高等学校电气工程及其自动化专业或其他电气信息类专业本科生“电磁场”课程的教材或教学参考书。

本书的编写思想和主要特色如下:

1. 鉴于目前我国普通高等学校电气信息类专业普遍是在开设大学物理“电磁学”课程之后开设“电磁场”或“电磁场与电磁波”课程,本书注重与“电磁学”课程内容的合理衔接,减少两门课程在静态场内容上的重复,提高学时利用率。第1章从作为电磁场理论基础的库仑定律和安培力定律出发,采用场论的方法证明静电场和恒定磁场的散度和旋度特性。在讨论了媒质的电磁特性的基础上,引入时变电磁场的基本方程,构建起全书的理论基础。

2. 在电气工程领域的工程实践中,纯粹的静态电场、磁场问题非常少。如果采用“似稳场”的概念研究诸如换流变压器中的极性反转电场、电机中的工频电磁场和涡流场等工程电磁场问题,难以对其中的物理机理有清晰的认识。本书突出对准静态电磁场内容的讲解,在第2章电准静态场的范畴中引入标量电位和电容、电导等电气参数,并进一步讨论导电媒质中的电场。在第3章磁准静态场的范畴中引入矢量磁位、标量磁位和电感参数,并进一步讨论磁准静态电场和导电媒质中的电磁扩散等内容。第4章单独讨论静态电磁场的边值问题及其求解方法。

3. 电磁能与电磁力是电磁场固有的物理属性,为我们认识电磁场提供了除矢量分析与场论之外的另一个视角。第5章首先在非线形媒质的范畴中讨论静电场与恒定磁场的能量和能量密度,以此为基础介绍时变电磁场的能量与功率流,并进一步讨论准静态场的功率流和储能,最后介绍准静态场中的电场力和磁场力。

4. 电气工程中诸如输电线路无线电干扰、电磁屏蔽和电磁环境等工程电磁问题的研究需要涉及电磁波的传播、辐射、波导和谐振腔等时变、高频电磁场的理论。第6章首先介绍电磁波在自由空间、有损媒质以及分层媒质中的传播特

性,然后介绍电磁辐射的基本理论和近场、远场的概念。第7章首先讲述电磁波在规则波导中的模式和传播规律,然后介绍谐振腔中电磁场的模式及特性。

在本书的撰写过程中,华北电力大学电磁与超导电工研究所的同仁们给出了很多有价值的意见和建议。浙江大学杨仕友教授审阅了本书,提出了很多宝贵的修改意见。在此,谨向关心、支持本书的老师、学生和广大读者致以深切的谢意!欢迎读者批评指正,编者联系方式:lilin@ncepu.edu.cn。

编 者

2015年7月

目 录

第 1 章 电磁场的基本规律	1
1.1 静电场的基本规律	1
1.1.1 库仑定律与电场强度	1
1.1.2 静电场的散度和旋度	2
1.2 电荷守恒定律与恒定电流连续性	4
1.3 恒定磁场的基本规律	5
1.3.1 安培力定律与磁感应强度	5
1.3.2 磁感应强度的散度和旋度	6
1.4 媒质的电磁特性	9
1.4.1 电介质的极化与电位移矢量	9
1.4.2 媒质的磁化与磁场强度	11
1.4.3 媒质的导电性	13
1.5 时变电磁场的基本方程	13
1.5.1 时变磁场产生有旋、无散电场	14
1.5.2 时变电场产生有旋、无散磁场	17
1.5.3 麦克斯韦方程	20
1.6 时变电磁场的边界条件	22
1.6.1 两种一般的不同媒质分界面上的边界条件	22
1.6.2 理想介质与理想导体分界面上的边界条件	24
1.7 时谐电磁场	26
1.7.1 时谐电磁场的复数表示法	26
1.7.2 麦克斯韦方程的复数形式	28
1.7.3 复介电常数和复磁导率	28
1.8 准静态定律	32
习题	34

第 2 章 电准静态场	38
2.1 标量电位	38
2.1.1 标量泊松方程及其解	38
2.1.2 电场线和等电位线	39
2.2 不同介质分界面上的边界条件	41
2.3 电容	42
2.4 导电媒质中的电场	45
2.4.1 自由电荷在导电媒质中的弛豫	45
2.4.2 导电媒质中电场的基本方程	46
2.4.3 恒定电场	49
2.4.4 接地	50
习题	52
第 3 章 磁准静态场	55
3.1 矢量磁位与标量磁位	55
3.1.1 矢量磁位	55
3.1.2 标量磁位	57
3.1.3 磁场线和等磁位线	57
3.2 不同媒质分界面上的边界条件	61
3.3 电感	63
3.3.1 磁链	63
3.3.2 自感与互感	65
3.4 磁准静态电场	67
3.5 电磁扩散	70
3.5.1 轴向磁场向薄壳导体内的扩散	71
3.5.2 电磁扩散方程	72
3.5.3 趋肤效应	72
3.5.4 铁心叠片中的涡流	74
习题	77
第 4 章 边值问题	79
4.1 标量泊松方程解的唯一性条件	79
4.2 镜像法	81
4.2.1 点电荷与无限大导电平面的电场	82
4.2.2 无限长线电荷与无限大导电平面的电场	83

4.2.3	电轴法	85
4.2.4	点电荷与无限大介质平面的电场	86
4.2.5	点电荷与接地导体球的电场	87
4.2.6	无限长载流导线与无限大导磁平面的磁场	88
4.3	分离变量法	90
4.3.1	直角坐标系中的平行平面场	90
4.3.2	圆柱坐标系中的平行平面场	93
4.3.3	球坐标系中的轴对称场	96
4.4	有限元法	99
	习题	102
第 5 章	电磁能与电磁力	105
5.1	静电场的能量	105
5.1.1	带电体系统的静电能量	105
5.1.2	静电能量的分布	106
5.1.3	汤姆森(Thomson)定理	108
5.2	恒定磁场的能量	110
5.2.1	载流回路系统的磁场能量	110
5.2.2	磁场能量的分布	111
5.2.3	铁磁材料的磁滞损耗	113
5.3	时变电磁场的能量	114
5.3.1	坡印廷定理	114
5.3.2	坡印廷定理的复数形式	117
5.3.3	准静态场的功率流	118
5.3.4	准静态场的储能	119
5.4	电磁力	122
5.4.1	电准静态场中的电场力	122
5.4.2	磁准静态场中的磁场力	124
	习题	126
第 6 章	电磁波与辐射	128
6.1	波动方程	128
6.1.1	直接以场强变量表示的波动方程	128
6.1.2	达朗贝尔方程及其解的物理意义	129
6.2	无限大无损媒质中的均匀平面电磁波	133

6.2.1	均匀平面电磁波的一般特性	133
6.2.2	时谐均匀平面电磁波	136
6.2.3	沿任意方向传播的时谐均匀平面电磁波	138
6.3	波的极化	141
6.4	有损媒质中的均匀平面电磁波	144
6.5	均匀平面波对平面界面的垂直入射	149
6.5.1	对理想导体的垂直入射	150
6.5.2	对理想介质的垂直入射	152
6.5.3	对两种一般媒质分界面的垂直入射	156
6.5.4	对多层介质的垂直入射	157
6.6	均匀平面波对平面界面的斜入射	161
6.6.1	反射定律与折射定律	161
6.6.2	反射系数与折射系数	162
6.7	辐射	166
6.7.1	电偶极子的时谐电磁场	167
6.7.2	电偶极子的近场和远场	168
6.7.3	辐射方向图与辐射电阻	170
6.7.4	对称振子天线的辐射场	171
习题	173
第 7 章	波导与谐振腔	175
7.1	规则波导中时谐电磁场的一般规律	175
7.1.1	导行电磁波的一般方程	175
7.1.2	导行电磁波的一般特性	178
7.2	规则矩形波导	180
7.2.1	横电波(TE 波)	181
7.2.2	横磁波(TM 波)	184
7.2.3	主波(TE_{10} 波)	184
7.2.4	矩形波导的传输功率	186
7.3	谐振腔	187
习题	191
附录 I	正交坐标系	192
附录 II	场论	195
II.1	场的基本概念	195

II.2 标量场的梯度	196
II.3 矢量场的通量与散度	198
II.4 矢量场的环量与旋度	200
II.5 矢量场解的唯一性定理	202
II.6 矢量分析公式	203
习题参考答案	207
参考书目	216

第 1 章 电磁场的基本规律

本章首先介绍宏观电磁理论的基础——库仑定律和安培力定律,引入电磁场的基本物理量电场强度和磁感应强度,在此基础上介绍静态电磁场的积分解。在分析媒质的极化和磁化特性的基础上,引入媒质的本构方程。介绍法拉第电磁感应定律,引入位移电流的概念,分析时变电磁场的基本性质,阐述时变电磁场的基本方程——麦克斯韦方程。进一步讨论时变电磁场的边界条件,介绍时谐电磁场的复数表示方法。最后介绍准静态定律,引入准静态电磁场的概念。

1.1 静电场的基本规律

1.1.1 库仑定律与电场强度

法国科学家库仑在 1785 年通过扭秤试验描述了两个点电荷之间的相互作用力,如图 1-1 所示。其数学表达式为

$$\boldsymbol{F}_{21} = \boldsymbol{a}_R \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (1-1)$$

式中, \boldsymbol{F}_{21} 代表点电荷 q_1 对点电荷 q_2 的作用力,单位为牛顿。 R 为两个点电荷之间的距离, \boldsymbol{a}_R 为由 q_1 指向 q_2 的单位矢量, $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ 为真空的介电常数。

由无穷小试验电荷 q 在电场中受力 \boldsymbol{F} 定义电场强度矢量为

$$\boldsymbol{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{F}}{q} \quad (1-2)$$

由式(1-1)和(1-2)可得如图 1-2 所示点电荷 q 的电场为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \boldsymbol{a}_R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2} \quad (1-3)$$



图 1-1 两个点电荷之间的作用力

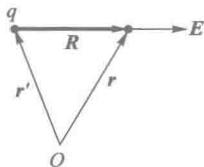


图 1-2 点电荷的电场

其中, r' 为源点位置矢量, r 为场点位置矢量, a_R 为由源点指向场点的单位矢量。多个点电荷的电场等于每个点电荷产生的电场强度的矢量和。

若电荷以体密度 ρ 分布在体积 V 内, 则一个小体积元内的电荷可以看作一个点电荷, 因此, 空间任意场点的电场强度可以表示为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') \mathbf{a}_R}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dV' \quad (1-4)$$

同理可得电荷以面密度 σ 分布在曲面 S 上, 或以线密度 τ 分布在曲线 l 上, 空间任意场点的电场强度分别为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') \mathbf{a}_R}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dS' \quad (1-5)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\tau(\mathbf{r}') \mathbf{a}_R}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dl' \quad (1-6)$$

1.1.2 静电场的散度和旋度

利用 $\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\mathbf{a}_R \frac{1}{R^2}$, 式(1-4)可以表示为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \nabla\left(\frac{1}{R}\right) dV' \quad (1-7)$$

对式(1-7)两端取散度, 且注意到散度运算是场点坐标运算, 式中的积分是对源点坐标运算, 可得

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) dV' \quad (1-8)$$

利用关系式 $\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, 式(1-8)变为

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (1-9)$$

式(1-9)称为微分形式的静电场高斯定理,表明空间分布的电荷是静电场的场源。在任意空间区域 V 上对式(1-9)两边做体积分,并利用矢量分析的高斯定理,得

$$\oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') dV' \quad (1-10)$$

其中曲面 S 是空间区域 V 的外表面,式(1-10)称为积分形式的静电场高斯定理。

对式(1-7)两端取旋度,得

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \left[\nabla \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right] dV' \quad (1-11)$$

由矢量分析,任意标量函数梯度的旋度恒为零,可知式(1-11)右端项等于零,即

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1-12)$$

由此可知静电场是无旋场。在任意曲面 S 上对式(1-12)两边做面积分,并利用矢量分析的斯托克斯定理,得

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1-13)$$

其中曲线 C 是曲面 S 的外边界轮廓线。由此可知电场强度沿任意闭合曲线的线积分为零,或电场强度的线积分与路径无关。

【例 1-1】如图 1-3 所示,真空中长度为 L 的直线段沿 z 轴放置,坐标原点位于线的中点,线上存在均匀线电荷,密度为 τ ,求线外任意一点的电场强度。

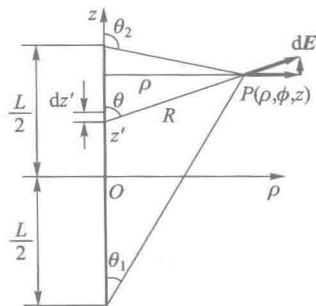


图 1-3 有限长线电荷的电场

解:显然场对于 z 轴具有轴对称性。线元 dz' 上的电荷可以看作一个点电荷,在场点 P 产生的电场具有三个分量,分别为

$$dE_\rho = dE \sin\theta = \frac{\tau dz'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin\theta$$

$$dE_\phi = 0$$

$$dE_z = dE \cos\theta = \frac{\tau dz'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta$$

另外有如下的几何关系：

$$R = \frac{\rho}{\sin\theta} = \rho \csc\theta, z' = z - \rho \cot\theta, dz' = \rho \csc^2\theta d\theta$$

将这些几何关系代入场的表达式，可得

$$dE_\rho = \frac{\tau\rho \csc^2\theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 \rho^2 \csc^2\theta} \sin\theta = \frac{\tau \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 \rho} d\theta$$

$$dE_z = \frac{\tau \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 \rho} d\theta$$

整个线电荷在场点 P 产生的电场分量为

$$E_\rho = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\tau \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 \rho} d\theta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 \rho} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$E_z = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\tau \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 \rho} d\theta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 \rho} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

当 $L \rightarrow \infty$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, 可得此时的电场为

$$E_\rho = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \rho}, E_z = 0, E_\phi = 0$$

即

$$\mathbf{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \rho} \mathbf{a}_\rho$$

1.2 电荷守恒定律与恒定电流连续性

电荷守恒表明单位时间从任意闭合面流出的电荷量等于闭合面内电荷的减少量,用方程表示如下:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (1-14)$$

其中, S 为任意闭合面, V 为闭合面 S 所包围的空间区域; \mathbf{J} 为电流密度, ρ 为体电荷密度。

借助矢量分析的高斯散度定理, 可以推得式(1-14)对应的微分形式方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1-15)$$

对于恒定电流, 电流密度和空间电荷分布均不随时间变化, 因此, 从式(1-14)得到恒定电流连续性方程为

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1-16)$$

对应的微分形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1-17)$$

1.3 恒定磁场的基本规律

1.3.1 安培力定律与磁感应强度

以实验为基础的安培力定律描述了两个载流回路之间的相互作用力。如图 1-4 所示, 真空中两个细导线回路 C_1 和 C_2 分别通过恒定电流 I_1 和 I_2 , 回路 C_1 对回路 C_2 的作用力为

$$\mathbf{F}_{21} = \oint_{C_2} I_2 d\mathbf{l}_2 \times \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{a}_R}{R^2} \quad (1-18)$$

式中, \mathbf{F}_{21} 单位为牛顿。 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ 为两个线元 $d\mathbf{l}_1$ 和 $d\mathbf{l}_2$ 之间的距离矢量, \mathbf{a}_R 为单位矢量, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ 为真空的磁导率。

按照宏观电磁场的观点, 回路 C_1 对回路 C_2 的作用力为回路 C_1 中的电流 I_1 在空间产生的磁场对回路 C_2 的电流 I_2 的作用力。结合线电流在磁场中受力的洛仑兹定律 $\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$, 可以从式(1-18)中分离出任意回路 C 中的线电流 I 在空间产生的磁感应强度的表达式:

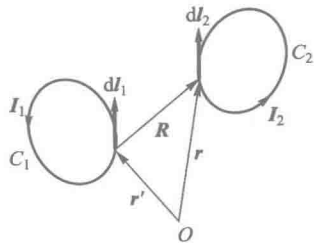


图 1-4 两个载流回路之间的作用力

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{a}_R}{R^2} \quad (1-19)$$

式(1-19)也称为毕奥-萨伐尔定律。磁感应强度的单位为特斯拉(T)或韦伯/米²(Wb/m²)。

对于在空间区域 V 中分布的体电流,体电流密度为 $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$,空间任意场点的磁感应强度为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{a}_R}{R^2} dV' \quad (1-20)$$

对于在曲面 S 上分布的面电流,面电流密度为 $\mathbf{K}(\mathbf{r}')$,空间任意场点的磁感应强度为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times \mathbf{a}_R}{R^2} dS' \quad (1-21)$$

1.3.2 磁感应强度的散度和旋度

利用 $\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\mathbf{a}_R \frac{1}{R^2}$, 式(1-20)可以表示为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \quad (1-22)$$

再利用 $\nabla \times (\varphi \mathbf{F}) = \nabla \varphi \times \mathbf{F} + \varphi \nabla \times \mathbf{F}$, 得

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right) - \frac{1}{R} \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] dV' \quad (1-23)$$

由于 $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ 仅为源点坐标的函数,式(1-23)积分中的第二项为零,因此

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right) dV' \quad (1-24)$$

对式(1-24)两端取散度,且利用矢量恒等式 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \equiv 0$, 得

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-25)$$

式(1-25)表明恒定磁场没有散度源。在任意空间区域 V 上对式(1-25)两边做体积分,并利用矢量分析的高斯定理,得

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1-26)$$

式(1-26)表明恒定磁场在任意闭合面上的磁通量为零,该式也称为磁通连续性

原理。

定义矢量磁位 \mathbf{A} , 其定义式为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1-27)$$

注意由式(1-27)定义的矢量磁位 \mathbf{A} 不是唯一的, 比如给矢量磁位 \mathbf{A} 加上任意标量函数的梯度, 取旋度仍然为磁感应强度 \mathbf{B} 。由矢量分析的亥姆霍兹定理, 需要在确定 \mathbf{A} 的散度后, \mathbf{A} 才是唯一的。规定矢量磁位 \mathbf{A} 的散度称为给矢量磁位 \mathbf{A} 取规范, 通常取 \mathbf{A} 的散度为零, 也称为库仑规范。由式(1-24), 可得矢量磁位 \mathbf{A} 的一个表达式

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV' \quad (1-28)$$

对式(1-28)两端取散度, 得

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_V \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right) dV' \quad (1-29)$$

注意到式(1-29)中散度运算是场点坐标运算, 利用式(1-17), 且 $\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\nabla' \left(\frac{1}{R} \right)$, 可得

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right) &= \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \\ &= -\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R} \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') - \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right) \\ &= -\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right) \end{aligned}$$

因此, 可得

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_V \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right) dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dS' \quad (1-30)$$

其中, S 为积分区域 V 的外边界曲面。因为电流仅存在于积分区域内有限的区域, 在外边界曲面 S 上电流密度为零, 所以

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1-31)$$

可见由式(1-28)表示的矢量磁位 \mathbf{A} 的散度为零, 满足库仑规范。对式(1-27)两端取旋度, 并利用式(1-31)得

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) dV' \quad (1-32)$$