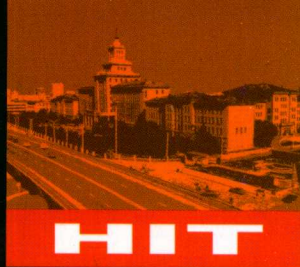


General Broken Line Geometry



数学·统计学系列

一般折线几何学

杨之 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



数学·统计学系列

General Broken Line Geometry 一般折线几何学

• 杨之 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书详细介绍了一般折线几何学的基础内容及性质,同时介绍了一般折线几何学在生活中的应用.

本书适合数学爱好者参考研读。

图书在版编目(CIP)数据

一般折线几何学/杨之著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2015.8

ISBN 978-7-5603-5506-1

I. ①—… II. ①杨… III. ①几何学 IV. ①O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 161679 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 杨万鑫 刘春雷
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 23.25 字数 402 千字
版 次 2015 年 8 月第 1 版 2015 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5506-1
定 价 48.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎

目

录

第0章 绪论 //1

第1章 平面折线的基本性质 //4

1.1 基本概念及初步分类 //4

1.1.1 基本概念 //4

1.1.2 初步分类 //5

1.1.3 多边形 //6

1.2 平面闭折线基本定理//9

1.2.1 边的折性:单折边与双折边//9

1.2.2 三种边的分布规律:折线基本定理//10

1.2.3 凸多边形基本概念//11

1.2.4 相交指数定理//12

1.2.5 闭折线的顶角和 //13

1.3 折线复杂性的三项指标 //15

1.3.1 闭折线的自交数 //16

1.3.2 闭折线的双折数 //18

1.3.3 闭折线的环数 //18

习题 //21

第2章 四边闭折线 //29

2.1 四边闭折线的分类 //29

2.1.1 初步分类 //29

2.1.2 进一步的分类 //30

2.2 凸四边形的一般性质 //32

2.2.1 截线公式 //32

2.2.2 一般割线定理 //34

2.2.3 凸四边形的几个面积公式 //36

2.2.4	凸四边形中的共生蝶形	//39
2.3	圆内接四边闭折线	//41
2.4	与四边闭折线相关的明珠定理	//45
2.4.1	九点圆定理	//45
2.4.2	蝴蝶定理及其推广	//47
2.4.3	关于四边形的几条定理	//49
2.5	四边闭折线之舞	//52
2.5.1	中点四边形	//52
2.5.2	牛顿线	//54
2.6	双圆四边形	//58
	习题	//62
第3章	星形折线与半多边形	//76
3.1	星形基本概念及性质	//78
3.1.1	基本概念	//78
3.1.2	星形折线的基本性质	//81
3.1.3	星形折线的子星形系列	//82
3.1.4	序号数列	//84
3.2	正星形	//85
3.2.1	基本概念与性质	//85
3.2.2	重要说明	//86
3.2.3	正星形中的数量关系	//87
3.3	圆内接与外切星形	//89
3.3.1	圆内接星形	//89
3.3.2	圆外切星形	//94
3.3.3	关于双圆星形	//97
3.4	半正多边形	//97
3.4.1	半正多边形概念与基本性质	//98
3.4.2	星形(多边形)	//101
	习题	//107
第4章	多边形	//109
4.1	多边形构形定理	//109
4.1.1	三角形构形定理	//109
4.1.2	凸多边形构形定理	//111
4.1.3	几个推论	//114
4.2	多边形的分类	//115
4.3	双圆多边形	//120
4.3.1	姚殿平的证明	//120
4.3.2	孙四周的相关研究	//123

4.4	凸多边形上的最大最小点	//128
4.4.1	凸多边形内部、外部的结构	//129
4.4.2	凸多边形上的最大点	//131
4.4.3	凸多边形上的定值	//135
4.4.4	凸多边形上的最小点	//140
4.5	多边形杂题集解	//144
4.5.1	与面积有关的问题	//144
4.5.2	带有组合意味的问题	//147
	习题	//153
第5章	闭折线的复杂性指标	//162
5.1	闭折线复杂性的深度探索	//162
5.2	平面闭折线的自交数问题	//162
5.2.1	基本概念与事实	//162
5.2.2	两个深刻的问题	//163
5.2.3	第1个问题的反面解决	//165
5.2.4	第1个问题的正面解答	//167
5.2.5	作图问题	//168
5.2.6	关于第2个问题	//172
5.3	平面闭折线的双折数问题	//172
5.3.1	基本概念与事实	//172
5.3.2	比较深刻的问题	//173
5.4	平面折线的环数问题	//174
5.4.1	基本概念与事实	//174
5.4.2	平面闭折线的最大最小环数	//176
5.4.3	有关环数的反问题	//176
5.5	综合考虑	//177
5.5.1	几个问题	//177
5.5.2	一些资料	//178
	习题	//180
第6章	折线的变换、分解与拼接	//182
6.1	什么是折线变换	//182
6.2	关于闭折线“可对称化”问题	//183
6.2.1	“可对称化”的概念	//183
6.2.2	可轴对称化的判定	//185
6.2.3	闭折线可中心对称化问题	//189
6.3	闭折线的等角变换与分解变换	//190
6.3.1	闭折线的等角变换	//190
6.3.2	闭折线的分解	//193

习题 //199

第7章 圆锥曲线关联的闭折线 //201

7.1 双圆闭折线 //201

7.1.1 非等边双圆闭折线的存在性 //201

7.1.2 苏文龙的工作 //204

7.2 闭折线与 m 次曲线的关系 //207

7.2.1 闭折线与直线 //207

7.2.2 闭折线与圆锥曲线 //208

7.2.3 闭折线与 m 次曲线 //210

7.3 若干梅氏型等式 //212

7.3.1 西摩松定理的演化与推广 //212

7.3.2 莱莫恩定理的演化与推广 //213

7.3.3 圆内接星形中的梅氏型等式 //215

7.4 闭折线与外接圆有关的性质 //218

7.4.1 几个概念和引理 //218

7.4.2 星形与外接圆有关性质 //219

7.4.3 一般闭折线与外接圆有关的性质 //220

习题 //221

第8章 闭折线的周长、面积、不等式 //223

8.1 周长问题——一个神秘的不等式 //223

8.2 闭折线面积探索 //227

8.2.1 闭折线面积的定义 //227

8.2.2 闭折线面积定义的合理性 //229

8.3 有向面积的计算 //230

8.3.1 行列式型公式 //230

8.3.2 正弦型公式 //232

8.4 闭折线的定值命题 //235

8.4.1 关于回形闭折线 //235

8.4.2 闭折线的定值命题 //236

8.5 闭折线等周问题 //239

8.6 闭折线中的不等式 //242

8.6.1 有关内含闭折线面积的不等式 //242

8.6.2 关联闭折线边长和面积的不等式 //243

8.6.3 与闭折线同侧点有关的不等式 //245

8.6.4 关于双圆闭折线的不等式 //247

习题 //249

第9章 顶点系与闭折线的性质 //252

9.1 三角形的各种心 //252

9.1.1	从重心谈起	//252
9.1.2	垂心和九心	//255
9.1.3	纳格尔点和斯俾克心	//258
9.1.4	三角形(顶点系)的 k 号心	//259
9.2	平面闭折线的 k 号心	//263
9.2.1	k 号心的概念	//263
9.2.2	k 号心的一般性质	//265
9.2.3	k 号心到原点的距离	//267
9.2.4	k 号心与顶点的距离	//271
9.3	闭折线顶点子集的 k 号心	//273
9.3.1	顶点子集 k 号心的概念与性质	//273
9.3.2	与 k 号心相关的共点线定理	//275
9.3.3	与 k 号心相关的共圆点定理	//277
9.3.4	轨迹定理与双圆闭折线的 k 号心	//280
9.4	神奇的 k 号心	//286
9.4.1	一项创新研究	//286
9.4.2	向量法的妙用	//286
9.4.3	神奇、深沉的“ k 号心”	//287
	习题	//287
第 10 章	闭折线杂题集解	//291
10.1	与筝形、蝶形有关的问题	//291
10.2	4,5 及 $2k+1$ 边闭折线	//293
10.3	闭折线的生成	//301
10.4	n 边闭折线	//303
10.5	克利福德问题	//310
	习题	//314
附 录	折线基本性质初探	//335
	参考文献	//342
	后 记	//345

绪 论

第

0

章

大约是1951年8月,我国知名数学教育家傅种孙教授,在北京市中学教员讲习会上,作了一个题为《从五角星谈起》的讲演^[1],讲稿发表在《中国数学杂志》1952年2-3期上.讲演开了星形折线研究的先河.但在尔后30多年中,没有相继的研究工作.

20世纪80年代与90年代相交之际,该讲稿引起了杨世明对“平面几何”学科的深入反思:在平面上,折线形何止万千,可号称“研究平面图形性质”的学科的“平面几何学”,却只研究了三角形、几类特殊四边形、凸多边形、正多边形,加上曲线形的圆,也不过寥寥数种;99%,甚至99.99%的折线形无人光顾.这促使他决心打破“正五”和“星形”的局限,提出“一般平面折线”的研究课题.而1989~1990年期间“折线基本性质”的发现,更使他感觉到这个课题的重要性.1990年,一篇名为“折线基本性质初探”^[2]的论文,寄往湖北《中学数学》编辑部,1991年2月,在该刊发表.同年8月,在“全国首届初等数学研究学术交流会”上所做的大会报告“初等数学问题”^[3]中,他再次提出这一课题,从而拉开了我国“一般折线”研究的序幕.另外,促使他提出这一研究课题的,还有一个重要的学术“环境”因素,那就是在国内外数学竞赛的命题中,在数学杂志上,不断有冲破传统几何题材的“越轨事件”发生,形成一种“山雨欲来”之势.

课题提出来了,在短短几年的时间里,就有很多的工作出现,而所用方法,仍是传统的“综合几何法”,说明这种方法在处理新材料、新内容时,并没有失效,从而使我们对于“因坐标法(即解析几何方法)之发明,综合法就失去价值”的说法产生了怀疑.而R·A·约翰逊的《近代欧氏几何学》^[4]和A·科克肖特与F·B·沃尔特斯合著的《圆锥曲线的几何性质》^[5]的翻译出版,更加强了我们的这种认识.前书的编者介绍说:“很多优美定理的证明,用的是初等几何方法.”“它是初等几何自然的继续,由一批可用类似于经典平面几何方法导出的命题组成,具有新奇的吸引力与内在的美.”后一本书的“译者序”说:“本书却用综合法,从图形到图形,以平面几何知识为主,立体几何知识为辅,轻车快马,直截了当,导出圆锥曲线的大批几何性质,包括许多通常资料中没有见过的性质.”你看,坐标法来了,综合法还健在,即没有退出数学历史舞台.

因此,在研究对象作为欧氏(平面)几何拓展的“一般折线”,在方法上也主要是拓展应用欧氏的综合法.但是:

第一,由于这种拓展不是小幅度的类推(像由三角形到四边形那样),而是一种大跨度的由三角形、四边形到一般闭折线的拓展,因此,方法上的拓展也是大跨度的.

第二,对象的变化必然引发研究内容的变化,从而也必然导致方法的变化.如“一般闭折线”的研究,往往令人关注它的整体结构、拓扑变形、分类和计数等问题的解决,因此会导致拓扑方法、组合计数方法、数论方法和某些代数方法(如数列方法)的运用.研究它同圆锥曲线的关系,它的等周问题,往往涉及函数、方程、不等式,而着重从闭折线顶点系进行研究,则难以离开坐标法.总而言之,闭折线的研究,将依照角度和内容的不同,选择适当的方法,不拘一格.

至于研究的目标,总体上看来,可提出如下几点^[6]:

(1) 严格界定基本概念,规范相关名词术语,为尔后的研究创造必要的条件.

(2) 阐述、发掘一般闭折线的基本(特征)性质,作为推证其他性质的基础.

(3) 审视传统“平面几何”研究的图形的性质,对能推广的进行适当的推广;同时,致力于发现一般闭折线的全新的性质.

(4) 进行分类问题的探索,研究各类型闭折线的特征性质,并着重深入地挖掘一些特殊闭折线,如四边闭折线,星形折线,回形折线,半正多边形,圆内接、外切与双圆闭折线等.

进而我们指出,由于“一般闭折线研究”课题的提出,深受文献[1]的启迪.而该文的内容是:

§1. 五角星中之点线布置; §2. 五角星中之角; §3. 五角星中之线段;

§ 4. 五角星中之三角形; § 5. n 角星之内外角和; § 6. n 角星之有无、多少、枝数、瓣数、边幅、角幅; § 7. n 角星之作图; § 8. 1 之 n 次方根; § 9. 二项式 $x^n - y^n$ 析因法; § 10. 十进法中之 n 位循环小数; § 11. R 进位法中之 n 位循环小数; § 12. n 个东西的循环排列.

易见, § 1 ~ § 4 着重于正五角星自身结构与组合拓扑性质的研究, § 5 ~ § 7 类推到正 n 角星, § 8 ~ § 12 则广泛联想, 一举“消灭”了代数、算术、排列组合中十分棘手的若干问题. 所用的思想方法是十分“厉害”的. 这主要是以“谈起”标志的广泛联想, 大胆运用类比、推广、观察、猜想等合情推理方法, 向新的领域进军. 后来, 数学家华罗庚在三个“谈起”(《从杨辉三角谈起》《从孙子的“神奇妙算”谈起》《从祖冲之的圆周率谈起》) 中, 进一步开发和弘扬了这种方法, 并引出《从刘徽割圆谈起》《从单位根谈起》《从 $\sqrt{2}$ 谈起》《从勾股定理谈起》《从除法谈起》等小册子或文章, 足见《从五角星谈起》一文, 其思想方法影响之深远. 而我们所提出的“一般折线”的研究课题, 着重于从边的特性出发, 探讨其整体结构(组合拓扑性质、复杂性程度、分类与计数问题等) 特征, 而忽视从顶点特性出发, 对闭折线诸“心”及“度量性质”的探索, 对研究有所误导, 直到 20 世纪 90 年代中期, 以熊曾润教授为首的“赣南学派”的出色工作和系列发现^[7,8], 才使局面有所改观. 我们将比较系统地介绍他们的相关工作.

最后, 我们还要指出, 关于题材和方法的选择, 将遵照如下 6 条准则: 平面折线与空间折线, 着重研究前者, 兼顾后者; 闭折线与开折线, 着重研究闭折线; 素(独支)折线与合(多支)折线, 着重前者, 兼顾后者(如研究星形时, 就需兼顾二者); 组合拓扑性质与度量性质, 二者并重; 从边与从顶点出发进行研究二者并重; 综合法、向量法、坐标法, 适当选择.

平面折线的基本性质

第

1

章

1.1 基本概念及初步分类

1.1.1 基本概念

定义 1.1 平面上若干条线段首尾顺次相接(每条线段最多同另外两条相接,每个相接的点最多有两条线段),构成的图形,称为平面折线(简称折线). 线段称为折线的边,线段的端点称为顶点. 同一边上的顶点称为相邻顶点,同一顶点关联的边称为邻边.

说明:(1) 在图 1.1 中,(a),(b),(c) 不符合定义,不是我们所说的折线.(d),(e),(f) 符合定义. 但(d) 有两边各只有一条邻边,(e) 可以一笔画出,而(f) 要两笔才行.

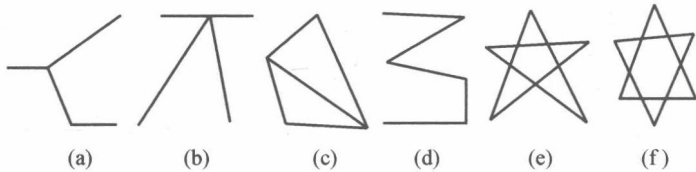


图 1.1

(2) 在定义中, 我们没有规定“任何三点不共线”“任何两线段不共线”, 即承认如图 1.2 所示的图形, 也是折线. 但应当规定, 对顶点 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 任何相邻三顶点 A_i, A_{i+1}, A_{i+2} ($i = 1, 2, \dots, n, A_{n+1} = A_1, A_{n+2} = A_2$) 不共线, 即任何角不等于平角.



图 1.2

(3) 此折线定义是很广泛的, 不仅包含了传统平面几何中研究的凹多边形、凸多边形、星形, 还包含很多其他类型的折线形.

定义 1.2 如果折线每个顶点都关联两条边, 就称之为闭折线, 否则 (即有两个顶点只关联一条边) 就称之为开折线. n 边闭折线常记作 Z_n .

图 1.1 中, (e), (f) 是闭折线, (d) 是开折线. 由定义直接推出:

定理 1.1 一条折线为闭折线的充要条件是其每边都有两邻边.

定义 1.3 如果折线能连续地一笔画出, 就称为单支折线或素折线, 否则 (即需多笔画出的) 就称为多支折线或合折线. 图 1.1 中的 (d), (e) 都是素折线, 而 (f) 是二支折线或合折线.

定理 1.2 n 边闭折线 (无论素合) 有 n ($n \geq 3$) 个顶点.

1.1.2 初步分类

定义 1.4 边不自相交的折线称为简单折线; 独支简单闭折线叫作多边形.

定理 1.3 多边形将平面划分为两个各自连通的部分, 一个有限部分和一个无限部分.

定义 1.5 多边形划分平面所得的有限部分称为内部, 无限部分称为外部. 有的多边形十分复杂, 如图 1.3 所示的“迷宫”多边形, 这时判断其内外部往往很困难. 有一个简单的方法是: 在这区域里任取一点 P , 过 P 任作一条射线, 如穿过奇数条边, P 所在区域就是内部, 否则就是外部 (简单说成“奇内偶外判定法”). 这样, 对于平面折线, 可初步分类如下所示:

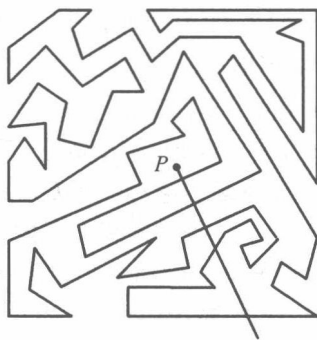
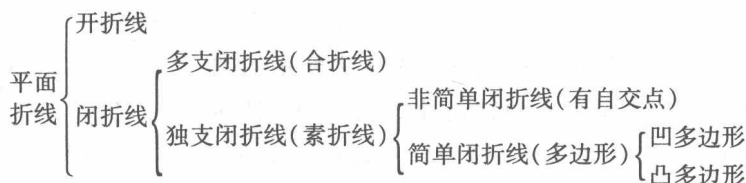


图 1.3



1.1.3 多边形

关于多边形,我们有^[9]:

定理 1.4 多边形至少有一条对角线在内部.

证明 在多边形内部任取一点 P , 那么在这点至少可以“看到”(即此点与那个点连线全在内部) 多边形三个顶点(图 1.4), 在这些“看到”的点中, 选出三个离 P 最近的点, 记作 Q, R, S , 那么, 在这三点中, 至少有两个点不共边, 比如为 Q 和 S , 那么 QS 就是全在多边形内部的对角线. 因为, 否则, 即 QS 有一部分在形外, 那么, 在 $\triangle PQS$ 内必有多边形顶点 T , 从而 $PT < PQ$, 这与“ Q, R, S 是三个离 P 最近的点”相矛盾. 证毕.

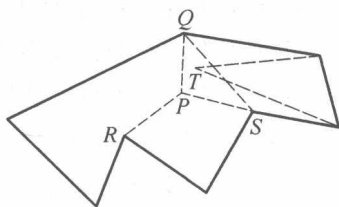


图 1.4

进而, 有:

定理 1.5 n 边形内部可以用在内部作对角线方式, 划分为以其顶点为顶点的 $n-2$ 个三角形.

证明 我们用数学归纳法. 如图 1.5, 当 $n=4$ 时, 如为凸四边形, 可任取一条对角线; 如为凹四边形, 设 D 为凹顶点, 则对角线 BD 全在形内, 于是四边形 $ABCD$ 被对角线分成了 $4-2=2$ 个三角形. 结论成立.

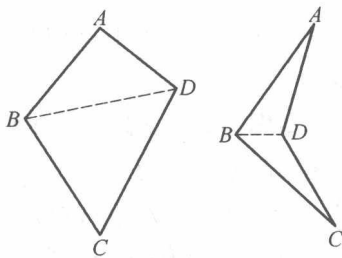


图 1.5

设命题结论对任何 $k \leq n$ 成立. 考虑 $n+1$ 边形 $A_1A_2 \cdots A_{n+1}$, 由定理 1.4 知, 它至少有一条对角线在形内, 不妨设为 A_iA_j ($1 \leq i \leq j \leq n$) (图 1.6), 那么 $n+1$ 边形被分划成两个多边形: $n+i-j+2$ 边形 $A_1A_2 \cdots A_iA_j \cdots A_{n+1}$ 和 $j-i+1$ 边形 $A_iA_{i+1} \cdots A_j$. 按归纳假设(由于 $n+i-j+2 \leq n, j-i+1 \leq n$) 知前者可分为 $(n+i-j+2)-2 = n+i-j$ 个三角形. 后者可分为 $(j-i+1)-2 = j-i-1$ 个三角形.

因此, $n+1$ 边形被分成了 $(n+i-j) + (j-i-1) = (n+1)-2$ 个三角

形. 可见, 结论对 $n+1$ 正确. 命题得证.

推论 1 n 边形内角和为 $(n-2)180^\circ$.

推论 2 n 边形至少有 $n-3$ 条对角线在形内.

这是因为, 按定理 1.5, n 边形已经被其内对角线划分成了 $n-2$ 个三角形, 因此, 内对角线至少有 $n-3$ 条. 而图 1.7 给出了恰有 $n-3$ 条内对角线的 n 边形.

推论 3 存在这样的 n 边形, 它被其 $n-3$ 条内对角线划分成 $n-3$ 个三角形的方法是唯一的.

阅读下面的例, 就会明白推论 3 的非凡意义.

例 1.1 试求将凸 $n+1$ 边形用不相交对角线划分为三角形的方法数.

解 设方法数为 C_n . 先看一些资料(图 1.8 ~ 1.10).

图 1.8 表明: $C_3 = 2$.

图 1.9 表明: $C_4 = 5$.

图 1.10 表明: $C_5 = 14$.

这样归纳、观察的结果, 可以看出对角线的某些规律, 但“看”不出构造一般公式的具体思路. 因此, 仅靠观察是不够的, 需要靠推理论证.^[10]

考虑凸 $n+1$ 边形 R , 受图 1.6 的启

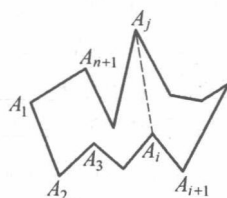


图 1.6

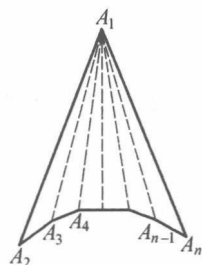


图 1.7

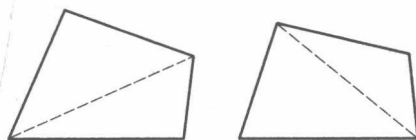


图 1.8

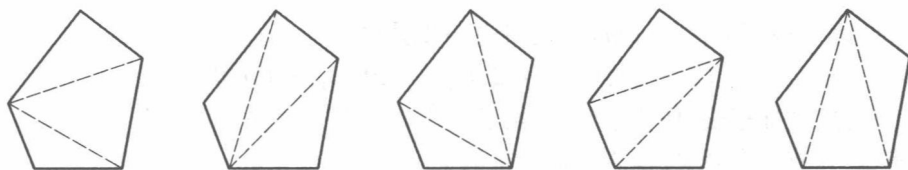


图 1.9

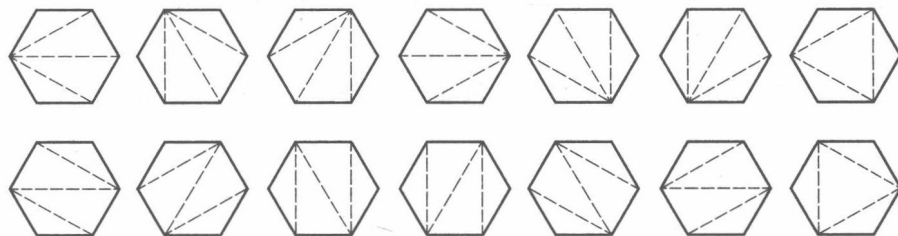


图 1.10

发,选定一个底 a_r (图 1.6 是选定一个顶点 A_i), 对将 R 分为三角形的每种方法, a_r 为某 $\triangle T$ 的一边, 而 $\triangle T$ 把 R 的其他部分分为一个凸 $k+1$ 边形 R_1 和一个凸 $n-k+1$ 边形 R_2 ($k=1, 2, \dots, n-1$) (图 1.11). 再进一步将 R_1 和 R_2 用内部不相交对角线划分为三角形: 分别有 C_k 种和 C_{n-k} 种方法, 因而, 对固定的 T , 共有 $C_k C_{n-k}$ 种方法, 因此

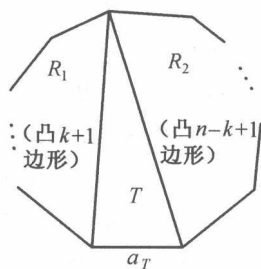


图 1.11

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k} \quad (1.1)$$

这是一个卡塔兰 (Catalan) 数的递归方程. 直解或用母函数方法^[11] 可求得

$$C_n = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1} \quad (1.2)$$

由此可算出

$$C_1 = \frac{1}{1} C_{2-2}^{1-1} = 1 \text{ (实际上看作一种规定)}$$

$$C_2 = \frac{1}{2} C_{4-2}^{2-1} = \frac{1}{2} C_2^1 = 1 \text{ (三角形只有一种分法)}$$

$$C_3 = \frac{1}{3} C_{6-2}^{3-1} = \frac{1}{3} \times \frac{4 \times 3}{2!} = 2 \text{ (凸四边形有两种分法)}$$

$$C_4 = \frac{1}{4} C_{8-2}^{4-1} = 5$$

$$C_5 = \frac{1}{5} C_{10-2}^{5-1} = 14$$

全都与观测资料是一致的. 还可进一步算出

$$C_6 = 42, C_7 = 132, C_8 = 429, C_9 = 1430$$

可见, 增加很快. 作为卡塔兰数, 它有丰富的背景. 另外, 由于公式 (1.2) 十分简捷, 且有组合意义, 能否有简单证法?

由推论 3 和例 1.1 中的多边形, 是两个极端: 前者只有一种分法, 后者有 $\frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}$ 种划分法, 我们猜想, 其他 n 边形划分成三角形的方法 f_n 会满足

$$1 < f_n < C_n$$

对不同的多边形 (分类可见本书第 4 章), 能否求出 f_n 的表达式?

1.2 平面闭折线基本定理

1.2.1 边的折性:单折边与双折边

任意一条闭折线,除了像图 1.3 的迷宫之外,就是像图 1.12 那样的“乱麻”一团.看上去,似无任何规律可言,但如果仔细观察,也有可能发现点什么,比如,我们着重看图 1.12 中的闭折线,它有 37 条边,37 个顶点,有一些自交点,因此,它不是多边形.再仔细看,比如边 AB, BC, CD 作为线段,除长短外,似乎没有什么不同,但作为“边”,好像又有点不同.什么不同呢?凝视许久,我们会发现:同邻边的关系不同, AB 两邻边折向同侧,而 BC 和 CD 的两邻边分别折向异侧.再看其他,也大致如此.更细致的研究, BC 和 CD ,它们又有不同.从而形成:

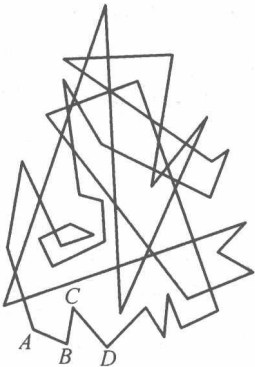


图 1.12

定义 1.6 当沿着折线一条边经顶点 A 走向邻边时,如果向左(右)拐,就称 A 为 AB 的左(右)折点(图 1.13(a));称一端为左折点、一端为右折点的边为单折边(图 1.13(b)),两端均为左折点(或均为右折点)的边为双折边(图 1.13(c)).其中,两端均为左折点者称为左旋边,均为右折点者称为右旋边.

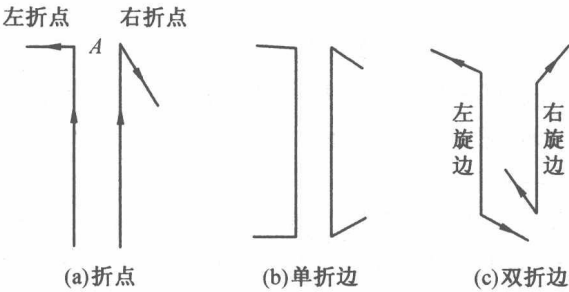


图 1.13

名称表明了图形的特点:单折边表示两邻边折向它的同一侧(单侧),双折边则说明两邻边折向异侧(双侧);当两邻边加力时,左旋边会向左(逆时针)旋转,而右旋边则向右(顺时针)旋转.