HIT

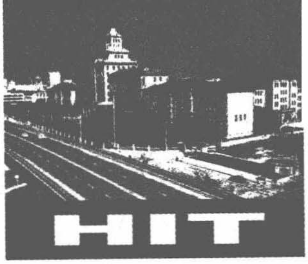
数学·统计学系列

General Broken Line Geometry

一般折线几何学

杨之 著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



数学·统计学系列

一般折线几何学

General Broken Line Geometry

●杨之 著

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书详细介绍了一般折线几何学的基础内容及性质，同时介绍了一般折线几何学在生活中的应用.

本书适合数学爱好者参考研读。

图书在版编目(CIP)数据

一般折线几何学/杨之著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.8

ISBN 978-7-5603-5506-1

Ⅰ.①一… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①几何学 Ⅳ.①O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 161679 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 杨万鑫 刘春雷

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传　真 0451-86414749

网　址 http://hitpress.hit.edu.cn

印　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开　本 787mm×1092mm 1/16 印张 23.25 字数 402 千字

版　次 2015 年 8 月第 1 版 2015 年 8 月第 1 次印刷

书　号 ISBN 978-7-5603-5506-1

定　价 48.00 元

◎ 目录

第 0 章 绪论

大约是1951年8月,我国知名数学教育家傅种孙教授,在北京市中学教员讲习会上,作了一个题为《从五角星谈起》的讲演[1],讲稿发表在《中国数学杂志》1952年2-3期上. 讲演开了星形折线研究的先河. 但在尔后30多年中,没有相继的研究工作.

20世纪80年代与90年代相交之际,该讲稿引起了杨世明对“平面几何”学科的深入反思:在平面上,折线形何止万千,可号称“研究平面图形性质”的学科的“平面几何学”,却只研究了三角形、几类特殊四边形、凸多边形、正多边形,加上曲线形的圆,也不过寥寥数种;99%,甚至99.99%的折线形无人光顾. 这促使他决心打破“正五”和“星形”的局限,提出“一般平面折线”的研究课题. 而1989 ~ 1990年期间“折线基本性质”的发现,更使他感觉到这个课题的重要性. 1990年,一篇名为“折线基本性质初探”[2]的论文,寄往湖北《中学数学》编辑部,1991年2月,在该刊发表. 同年8月,在“全国首届初等数学研究学术交流会”上所做的大会报告“初等数学问题”[3]中,他再次提出这一课题,从而拉开了我国“一般折线”研究的序幕. 另外,促使他提出这一研究课题的,还有一个重要的学术“环境”因素,那就是在国内外数学竞赛的命题中,在数学杂志上,不断有冲破传统几何题材的“越轨事件”发生,形成一种“山雨欲来”之势.

课题提出来了，在短短几年的时间里，就有很多的工作出现，而所用方法，仍是传统的“综合几何法”，说明这种方法在处理新材料、新内容时，并没有失效，从而使我们对于“因坐标法（即解析几何方法）之发明，综合法就失去价值”的说法产生了怀疑. 而R·A·约翰逊的《近代欧氏几何学》[4] 和A·科克肖特与F·B·沃尔特斯合著的《圆锥曲线的几何性质》[5] 的翻译出版，更加强了我们的这种认识. 前书的编者介绍说：“很多优美定理的证明，用的是初等几何方法.”“它是初等几何自然的继续，由一批可用类似于经典平面几何方法导出的命题组成，具有新奇的吸引力与内在的美.” 后一本书的“译者序” 说：“本书却用综合法，从图形到图形，以平面几何知识为主，立体几何知识为辅，轻车快马，直截了当，导出圆锥曲线的大批几何性质，包括许多通常资料中没有见过的性质.” 你看，坐标法来了，综合法还健在，即没有退出数学历史舞台.

因此，在研究对象作为欧氏（平面）几何拓展的“一般折线”，在方法上也主要是拓展应用欧氏的综合法. 但是：

第一，由于这种拓展不是小幅度的类推（像由三角形到四边形那样），而是一种大跨度的由三角形、四边形到一般闭折线的拓展，因此，方法上的拓展也是大跨度的.

第二，对象的变化必然引发研究内容的变化，从而也必然导致方法的变化. 如“一般闭折线” 的研究，往往令人关注它的整体结构、拓扑变形、分类和计数等问题的解决，因此会导致拓扑方法、组合计数方法、数论方法和某些代数方法（如数列方法）的运用. 研究它同圆锥曲线的关系，它的等周问题，往往涉及函数、方程、不等式，而着重从闭折线顶点系进行研究，则难以离开坐标法. 总而言之，闭折线的研究，将依照角度和内容的不同，选择适当的方法，不拘一格.

至于研究的目标，总体上看来，可提出如下几点[6]：

(1) 严格界定基本概念，规范相关名词术语，为尔后的研究创造必要的条件.

(2) 阐述、发掘一般闭折线的基本（特征）性质，作为推证其他性质的基础.

(3) 审视传统“平面几何” 研究的图形的性质，对能推广的进行适当的推广；同时，致力于发现一般闭折线的全新的性质.

(4) 进行分类问题的探索，研究各类型闭折线的特征性质，并着重深入地挖掘一些特殊闭折线，如四边闭折线，星形折线，回形折线，半正多边形，圆内接、外切与双圆闭折线等.

进而我们指出，由于“一般闭折线研究” 课题的提出，深受文献[1] 的启迪. 而该文的内容是：

§1. 五角星中之点线布置；§2. 五角星中之角；§3. 五角星中之线段；

§4. 五角星中之三角形；§5. n 角星之内外角和；§6. n 角星之有无、多少、枝数、瓣数、边幅、角幅；§7. n 角星之作图；§8. 1 之 n 次方根；§9. 二项式 $x^n - y^n$ 析因法；§10. 十进法中之 n 位循环小数；§11. R 进位法中之 n 位循环小数；§12. n 个东西的循环排列.

易见，§1 ~ §4 着重于正五角星自身结构与组合拓扑性质的研究，§5 ~ §7 类推到正 n 角星，§8 ~ §12 则广泛联想，一举"消灭"了代数、算术、排列组合中十分棘手的若干问题. 所用的思想方法是十分"厉害"的. 这主要是以"谈起"标志的广泛联想，大胆运用类比、推广、观察、猜想等合情推理方法，向新的领域进军. 后来，数学家华罗庚在三个"谈起"(《从杨辉三角谈起》《从孙子的"神奇妙算"谈起》《从祖冲之的圆周率谈起》）中，进一步开发和弘扬了这种方法，并引出《从刘徽割圆谈起》《从单位根谈起》《从$\sqrt{2}$谈起》《从勾股定理谈起》《从除法谈起》等小册子或文章，足见《从五角星谈起》一文，其思想方法影响之深远. 而我们所提出的"一般折线"的研究课题，着重于从边的特性出发，探讨其整体结构(组合拓扑性质、复杂性程度、分类与计数问题等）特征，而忽视从顶点特性出发，对闭折线诸"心"及"度量性质"的探索，对研究有所误导，直到20世纪90年代中期，以熊曾润教授为首的"赣南学派"的出色工作和系列发现[7,8]，才使局面有所改观. 我们将比较系统地介绍他们的相关工作.

最后，我们还要指出，关于题材和方法的选择，将遵照如下 6 条准则：平面折线与空间折线，着重研究前者，兼顾后者；闭折线与开折线，着重研究闭折线；素(独支）折线与合(多支）折线，着重前者，兼顾后者(如研究星形时，就需兼顾二者)；组合拓扑性质与度量性质，二者并重；从边与从顶点出发进行研究二者并重；综合法、向量法、坐标法，适当选择.

平面折线的基本性质

第1章

1.1　基本概念及初步分类

1.1.1　基本概念

定义 1.1　平面上若干条线段首尾顺次相接(每条线段最多同另外两条相接,每个相接的点最多有两条线段),构成的图形,称为平面折线(简称折线). 线段称为折线的边,线段的端点称为顶点. 同一边上的顶点称为相邻顶点,同一顶点关联的边称为邻边.

说明:(1) 在图 1.1 中,(a),(b),(c) 不符合定义,不是我们所说的折线. (d),(e),(f) 符合定义. 但(d) 有两边各只有一条邻边,(e) 可以一笔画出,而(f) 要两笔才行.

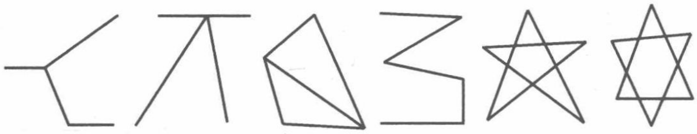

(a)　(b)　(c)　(d)　(e)　(f)

图 1.1

(2) 在定义中，我们没有规定"任何三点不共线""任何两线段不共线"，即承认如图 1.2 所示的图形，也是折线. 但应当规定，对顶点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，任何相邻三顶点 A_i, A_{i+1}, A_{i+2}（$i = 1,2,\cdots,n, A_{n+1} = A_1, A_{n+2} = A_2$）不共线，即任何角不等于平角.

图 1.2

(3) 此折线定义是很广泛的，不仅包含了传统平面几何中研究的凹多边形、凸多边形、星形，还包含很多其他类型的折线形.

定义 1.2　如果折线每个顶点都关联两条边，就称之为闭折线，否则（即有两个顶点只关联一条边）就称之为开折线. n 边闭折线常记作 Z_n.

图 1.1 中，(e)，(f) 是闭折线，(d) 是开折线. 由定义直接推出：

定理 1.1　一条折线为闭折线的充要条件是其每边都有两邻边.

定义 1.3　如果折线能连续地一笔画出，就称为单支折线或素折线，否则（即需多笔画出的）就称为多支折线或合折线. 图 1.1 中的(d)，(e) 都是素折线，而(f) 是二支折线或合折线.

定理 1.2　n 边闭折线（无论素合）有 $n(n \geqslant 3)$ 个顶点.

1.1.2　初步分类

定义 1.4　边不自相交的折线称为简单折线；独支简单闭折线叫作多边形.

定理 1.3　多边形将平面划分为两个各自连通的部分，一个有限部分和一个无限部分.

定义 1.5　多边形划分平面所得的有限部分称为内部，无限部分称为外部. 有的多边形十分复杂，如图 1.3 所示的"迷宫"多边形，这时判断其内外部往往很困难. 有一个简单的方法是：在这区域里任取一点 P，过 P 任作一条射线，如穿过奇数条边，P 所在区域就是内部，否则就是外部（简单说成"奇内偶外判定法"）. 这样，对于平面折线，可初步分类如下所示：

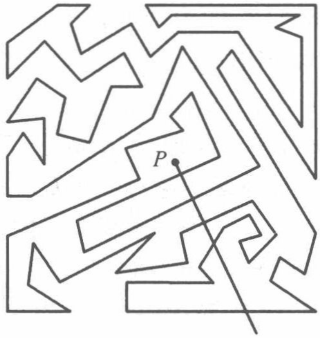


图 1.3

- 平面折线
  - 开折线
  - 闭折线
    - 多支闭折线（合折线）
    - 独支闭折线（素折线）
      - 非简单闭折线（有自交点）
      - 简单闭折线（多边形）
        - 凹多边形
        - 凸多边形

1.1.3　多边形

关于多边形，我们有[9]：

定理 1.4　多边形至少有一条对角线在内部.

证明　在多边形内部任取一点 P，那么在这点至少可以“看到”（即此点与那个点连线全在内部）多边形三个顶点（图 1.4），在这些“看到”的点中，选出三个离 P 最近的点，记作 Q,R,S，那么，在这三点中，至少有两个点不共边，比如为 Q 和 S，那么 QS 就是全在多边形内部的对角线. 因为，否则，即 QS 有一部分在形外，那么，在 $\triangle PQS$ 内必有多边形顶点 T，从而 $PT < PQ$，这与“Q,R,S 是三个离 P 最近的点”相矛盾. 证毕.

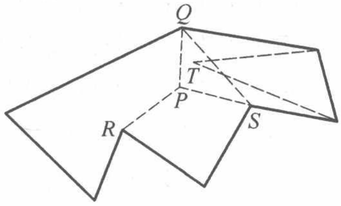


图 1.4

进而，有：

定理 1.5　n 边形内部可以用在内部作对角线方式，划分为以其顶点为顶点的 $n-2$ 个三角形.

证明　我们用数学归纳法. 如图 1.5，当 $n=4$ 时，如为凸四边形，可任取一条对角线；如为凹四边形，设 D 为凹顶点，则对角线 BD 全在形内，于是四边形 $ABCD$ 被对角线分成了 $4-2=2$ 个三角形. 结论成立.

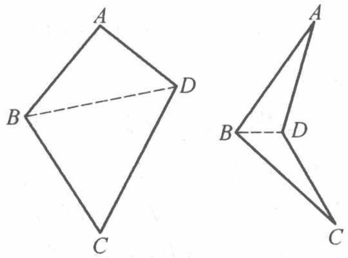


图 1.5

设命题结论对任何 $k \leqslant n$ 成立. 考虑 $n+1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$，由定理 1.4 知，它至少有一条对角线在形内，不妨设为 A_iA_j $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$（图 1.6），那么 $n+1$ 边形被分划成两个多边形：$n+i-j+2$ 边形 $A_1A_2\cdots A_iA_j\cdots A_{n+1}$ 和 $j-i+1$ 边形 $A_iA_{i+1}\cdots A_j$. 按归纳假设（由于 $n+i-j+2 \leqslant n, j-i+1 \leqslant n$）知前者可分为 $(n+i-j+2)-2=n+i-j$ 个三角形. 后者可分为 $(j-i+1)-2=j-i-1$ 个三角形.

因此，$n+1$ 边形被分成了 $(n+i-j)+(j-i-1)=(n+1)-2$ 个三角

形. 可见,结论对 $n+1$ 正确. 命题得证.

推论 1　n 边形内角和为 $(n-2)180°$.

推论 2　n 边形至少有 $n-3$ 条对角线在形内.

这是因为,按定理 1.5,n 边形已经被其内对角线划分成了 $n-2$ 个三角形,因此,内对角线至少有 $n-3$ 条. 而图 1.7 给出了恰有 $n-3$ 条内对角线的 n 边形.

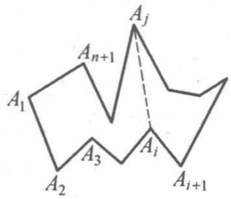


图 1.6

推论 3　存在这样的 n 边形,它被其 $n-3$ 条内对角线划分成 $n-3$ 个三角形的方法是唯一的.

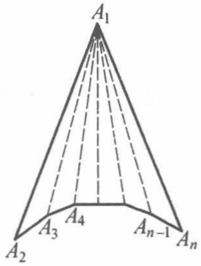


图 1.7

阅读下面的例,就会明白推论 3 的非凡意义.

例 1.1　试求将凸 $n+1$ 边形用不相交对角线划分为三角形的方法数.

解　设方法数为 C_n. 先看一些资料(图 1.8 ~ 1.10).

图 1.8 表明:$C_3=2$.

图 1.9 表明:$C_4=5$.

图 1.10 表明:$C_5=14$.

这样归纳、观察的结果,可以看出对角线的某些规律,但"看"不出构造一般公式的具体思路. 因此,仅靠观察是不够的,需要靠推理论证. [10]

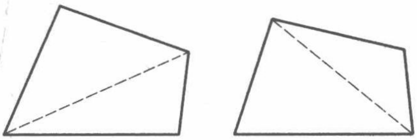


图 1.8

考虑凸 $n+1$ 边形 R,受图 1.6 的启

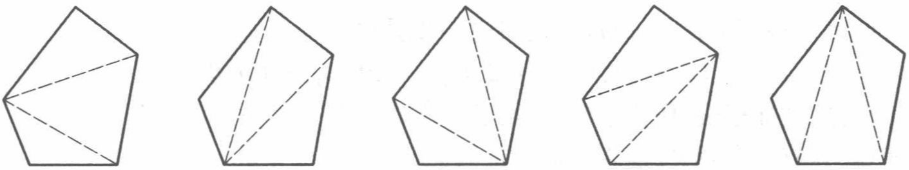


图 1.9

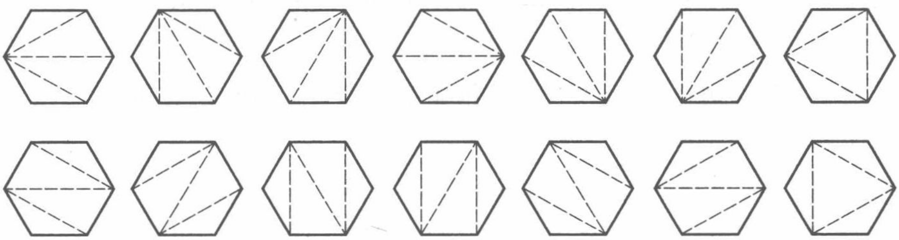


图 1.10

发，选定一个底 a_r（图1.6是选定一个顶点 A_i），对将 R 分为三角形的每种方法，a_r 为某 $\triangle T$ 的一边，而 $\triangle T$ 把 R 的其他部分分为一个凸 $k+1$ 边形 R_1 和一个凸 $n-k+1$ 边形 R_2（$k=1,2,\cdots,n-1$）（图1.11）. 再进一步将 R_1 和 R_2 用内部不相交对角线划分为三角形：分别有 C_k 种和 C_{n-k} 种方法，因而，对固定的 T，共有 C_kC_{n-k} 种方法，因此

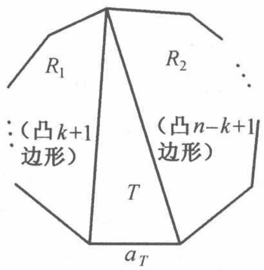


图 1.11

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_kC_{n-k} \tag{1.1}$$

这是一个卡塔兰（Catalan）数的递归方程. 直解或用母函数方法[11]可求得

$$C_n = \frac{1}{n}\mathrm{C}_{2n-2}^{n-1} \tag{1.2}$$

由此可算出

$$C_1 = \frac{1}{1}\mathrm{C}_{2-2}^{1-1} = 1\ （实际上看作一种规定）$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\mathrm{C}_{4-2}^{2-1} = \frac{1}{2}\mathrm{C}_2^1 = 1（三角形只有一种分法）$$

$$C_3 = \frac{1}{3}\mathrm{C}_{6-2}^{3-1} = \frac{1}{3}\times\frac{4\times 3}{2!} = 2\ （凸四边形有两种分法）$$

$$C_4 = \frac{1}{4}\mathrm{C}_{8-2}^{4-1} = 5$$

$$C_5 = \frac{1}{5}\mathrm{C}_{10-2}^{5-1} = 14$$

全都与观测资料是一致的. 还可进一步算出

$$C_6 = 42, C_7 = 132, C_8 = 429, C_9 = 1\ 430$$

可见，增加很快. 作为卡塔兰数，它有丰富的背景. 另外，由于公式(1.2)十分简捷，且有组合意义，能否有简单证法？

由推论3和例1.1中的多边形，是两个极端：前者只有一种分法，后者有 $\frac{1}{n}\mathrm{C}_{2n-2}^{n-1}$ 种划分法，我们猜想，其他 n 边形划分成三角形的方法 f_n 会满足

$$1 < f_n < C_n$$

对不同的多边形（分类可见本书第4章），能否求出 f_n 的表达式？

1.2 平面闭折线基本定理

1.2.1 边的折性:单折边与双折边

任意一条闭折线,除了像图 1.3 的迷宫之外,就是像图 1.12 那样的"乱麻"一团. 看上去,似无任何规律可言,但如果仔细观察,也有可能会发现点什么,比如,我们着重看图 1.12 中的闭折线,它有 37 条边,37 个顶点,有一些自交点,因此,它不是多边形. 再仔细看,比如边 AB,BC,CD 作为线段,除长短外,似乎没有什么不同,但作为"边",好像又有点不同. 什么不同呢?凝视许久,我们会发现:同邻边的关系不同,AB 两邻边折向同侧,而 BC 和 CD 的两邻边分别折向异侧. 再看其他,也大致如此. 更细致的研究,BC 和 CD,它们又有不同. 从而形成:

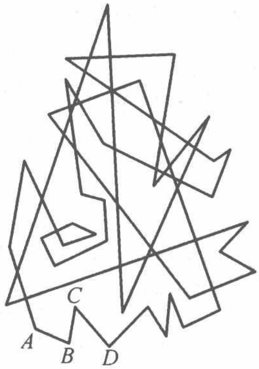


图 1.12

定义 1.6 当沿着折线一条边经顶点 A 走向邻边时,如果向左(右) 拐,就称 A 为 AB 的左(右) 折点(图 1.13(a));称一端为左折点、一端为右折点的边为单折边(图 1.13(b)),两端均为左折点(或均为右折点) 的边为双折边(图 1.13(c)). 其中,两端均为左折点者称为左旋边,均为右折点者称为右旋边.

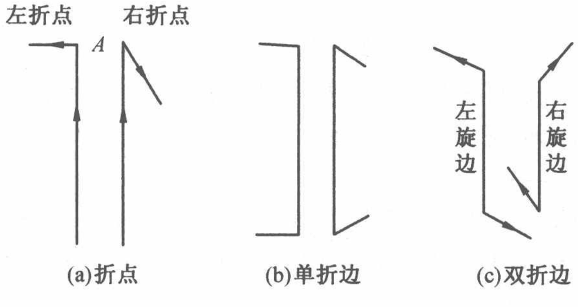


图 1.13

名称表明了图形的特点:单折边表示两邻边折向它的同一侧(单侧),双折边则说明两邻边折向异侧(双侧);当两邻边加力时,左旋边会向左(逆时针) 旋转,而右旋边则向右(顺时针) 旋转.