矩阵论

千题习题详解

方保镕　编著

清华大学出版社

矩阵论

千题习题详解

方保镕　编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书涵盖了清华大学出版社《矩阵论》(第2版)一书中共约1300道习题和自测题的详细解答. 部分习题给出了多种解法并作了一些评注. 这些习题大致可分为两种类型：基础题型用以巩固所学的知识，加深对基本概念的理解，相对比较简单；综合题型是训练读者灵活运用前面所学知识的能力，有一定的难度.

本书内容全面，题量大，解答详尽，适合学习矩阵论课程的研究生以及参加博士入学矩阵论课程考试的人员阅读，对于从事矩阵论教学工作的教师也有一定的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论千题习题详解/方保镕编著. --北京：清华大学出版社，2015
ISBN 978-7-302-39274-3

Ⅰ.①矩…　Ⅱ.①方…　Ⅲ.①矩阵论－高等学校－题解　Ⅳ.①O151.21-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第024511号

责任编辑：石　磊　赵从棉
封面设计：傅瑞学
责任校对：赵丽敏
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：清华大学印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：20.25　　**字　　数**：493千字
版　　次：2015年11月第1版　　**印　　次**：2015年11月第1次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：45.00元

产品编号：052120-01

FOREWORD 前言

矩阵论是高等院校和研究院(所)面向理工科研究生开设的一门数学基础课，其理论与方法在科学和工程各个领域都有着广泛的应用．因此，学习和掌握矩阵的基本理论与方法，对于理工科研究生来说是必不可少的．而要学好它，做习题又是必不可少的环节．华罗庚先生在其《高等数学引论》的序言中精辟地论述到：习题的目的其一是熟悉和巩固学习了的东西；其二是启发大家灵活运用，独立思考；其三是融会贯通．实际上，一本书的习题往往是该书的精华所在，借助习题的印证，才能对书中的原理和方法彻底地吸收与理解．

鉴于此，清华大学出版社第 2 版的《矩阵论》对第 1 版《矩阵论》各章中的习题作了适当的扩充，从原来的 600 多题增加到 1300 余题(含小题)，无论从覆盖面还是深广度方面都有了很大的提升．本书涵盖了清华大学出版社第 2 版《矩阵论》一书中的全部习题和自测题的详细解答，部分习题给出了多种解法并作了一些评注．这些习题大致可分为两种类型：基础题型用以巩固所学的知识，加深对基本概念的理解，相对比较简单；综合题型是训练读者灵活运用前面所学知识的能力，有一定的难度．

本书对于学习矩阵论课程的研究生以及参加博士入学矩阵论课程考试的有关人员有很好的辅导作用，对于从事矩阵论教学工作的教师也有一定的参考价值．编写本书的主旨，当然不是"越俎代庖"，不可将书中的解答看作"标准答案"，它们并不一定是最好的解题方法，它们应作为读者在经过自己的独立思考之后对照的"参考答案"．若再进而能够起到抛砖引玉的作用，启发出更精彩的解答，将是作者莫大的欣慰．

限于作者水平，在编写中难免有错误和不当之处，恳请读者指正．

编者

2015 年 3 月

CONTENTS

目录

第1章 矩阵的几何理论

习　题　1(1)

1. 有没有一个向量的线性空间，有没有两个向量的线性空间，有没有 m 个向量的线性空间？

解　除了由一个零向量构成的集合$\{\boldsymbol{\theta}\}$可以构成线性空间外，没有两个和有限(m)个向量构成的线性空间，因为数乘不封闭($k\boldsymbol{\alpha}$ 有无限多个，$k\in\mathbb{P}$ 数域).

2. 在几何空间$\mathbb{R}^3$中，按通常的向量加法和数乘的运算，下列集合是否是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间？

(1) 过原点的平面 H 上的所有向量集合；

(2) 位于第一象限，以原点为始点的向量集合；

(3) 位于第一、三象限，以原点为始点的向量集合；

(4) x 轴上的向量集合；

(5) 平面 H 上，不平行于某向量的集合.

解　(1)是；(2)不是，因为没有负向量；(3)不是，因为存在两向量的和向量处在第二或第四象限，即加法不封闭；(4)是；(5)不是，因为存在两个不平行某向量的和却平行于某向量，即加法不封闭.

3. 按通常的数的加法和数乘，下列数集是否构成有理数域$\mathbb{Q}$上的线性空间？是否构成实数域$\mathbb{R}$上的线性空间？

(1)整数集$\mathbb{Z}$；(2)有理数集$\mathbb{Q}$；(3)实数集$\mathbb{R}$；(4)复数集$\mathbb{C}$；(5)单个数的集合$\{0\}$；(6)n个数的集合 $N=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

解　(1)不是，因为当 $k\in\mathbb{Q}$ 或$\mathbb{R}$ 时，数乘 $k\boldsymbol{\alpha}$ 不封闭；(2)有理域上是，实数域上不是，因为当 $k\in\mathbb{R}$ 时，数乘 $k\boldsymbol{\alpha}$ 不封闭；(3)是；(4)是；(5)是；(6)不是，因为加法与数乘均不封闭.

4. 齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_1+2x_2+x_3+3x_4=0\end{cases}$$

的全部解是否构成线性空间？

解　是，因为全部解即为通解集合，它由基础解系列向量乘以相应常数组成，显然对解的加法与数乘运算满足两个封闭性和八条公理.

5. 在 n 维向量空间 P^n 中,下列 n 维向量的集合 V,是否构成数域 P 上的线性空间?

(1) $V=\{(a,b,a,b,\cdots,a,b)\mid a,b\in P\}$;

(2) $V=\left\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\;\middle|\;\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1\right\}$.

解 (1)是线性空间;(2)不是线性空间(加法不封闭;或因无零向量).

6. 检验以下集合对于矩阵的加法和实数与矩阵的乘法,是否构成实数域上的线性空间?

(1) n 阶实数矩阵 $\mathbf{A}$ 的实系数多项式的全体;

(2) n 阶实对称(或上三角)矩阵的全体;

(3) 形如$\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & b\end{bmatrix}$的二阶方阵的全体.

解 (1) 设 $\mathbf{A}$ 的实系数多项式 $f(\mathbf{A})$的全体为

$$\{f(\mathbf{A})=a_0\boldsymbol{I}+a_1\mathbf{A}+\cdots+a_m\mathbf{A}^m\mid a_i\in\mathbb{R},\quad m\ \text{为正整数}\}$$

显然,它满足两个封闭性和八条公理,故是线性空间.

(2)与(3)也都是线性空间.

7. 设 $V=\{x\mid x=c_1\sin t+c_2\sin 2t+\cdots+c_n\sin nt,c_i\in\mathbb{R},0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$,$V$ 中元素对于通常三角多项式的加法和数乘运算,是否构成实数域上的线性空间?并证明$\{\sin t,\sin 2t,\cdots,\sin nt\}$是 V 的一组基,试提出确定 c_i的方法.

解 是线性空间.不难验证 $\sin t,\sin 2t,\cdots,\sin nt$ 是线性无关的,且任一个形如题中的三角多项式都可由它们唯一地线性表示,所以它们是 V 中的一个组基.由高等数学中傅里叶(Fourier)系数知 $c_i=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}t\sin it\,\mathrm{d}t$.

8. 设 V 是有序实数对的集合:$V=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$,规定如下的加法与数乘运算:

(1) $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$与 $k\circ(a,b)=(ka,b)$;

(2) $(a,b)\oplus(c,d)=(a,b)$与 $k\circ(a,b)=(ka,kb)$;

(3) $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$与 $k\circ(a,b)=(k^2a,k^2b)$;

(4) $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d+ac)$与 $k\circ(a,b)=\left(ka,kb+\dfrac{k(k-1)}{2}a^2\right)$.

那么,V 关于运算$\oplus$,$\circ$是否构成$\mathbb{R}$上的线性空间?

解 (1) 不是,因为性质(6)不成立:设 $r=1,s=2,\boldsymbol{\alpha}=(3,4)$,则$(r+s)\circ(3,4)=(9,4)$,而 $r\circ(3,4)\oplus s\circ(3,4)=(3,4)\oplus(6,4)=(9,8)$,所以$(r+s)\circ\boldsymbol{\alpha}\neq r\circ\boldsymbol{\alpha}\oplus s\circ\boldsymbol{\alpha}$.

(2) 不是,因为性质(1)不成立:设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2),\boldsymbol{\beta}=(3,4)$,则 $\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}=(1,2)\oplus(3,4)=(1,2)$,$\boldsymbol{\beta}\oplus\boldsymbol{\alpha}=(3,4)\oplus(1,2)=(3,4)$,所以 $\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{\beta}\oplus\boldsymbol{\alpha}$.

(3) 不是,因为性质(5)不成立:设 $r=1,s=2,\boldsymbol{\alpha}=(3,4)$,则$(r+s)\circ\boldsymbol{\alpha}=3\circ(3,4)=(27,36)$,而

$$r\circ\boldsymbol{\alpha}\oplus s\circ\boldsymbol{\alpha}=1\circ(3,4)\oplus 2\circ(3,4)=(3,4)\oplus(12,16)=(15,20)$$

于是$(r+s)\circ\boldsymbol{\alpha}\neq r\circ\boldsymbol{\alpha}\oplus s\circ\boldsymbol{\alpha}$.

(4) 是.

*__9__. 证明:线性空间定义中,加法的交换率 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$ 不是独立的,即它可由其余 7 条公理推出.

证明　若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,则

$$\begin{aligned}2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})&=2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}=(1+1)\boldsymbol{\alpha}+(1+1)\boldsymbol{\beta}=(1\boldsymbol{\alpha}+1\boldsymbol{\alpha})+(1\boldsymbol{\beta}+1\boldsymbol{\beta})\\&=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha})+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

另一方面,$2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(1+1)(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(1\boldsymbol{\alpha}+1\boldsymbol{\beta})+1(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$

$$=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\beta}$$

因此

$$\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\beta}$$

从而有

$$(-\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}+(-\boldsymbol{\beta})=(-\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\beta}+(-\boldsymbol{\beta})$$

于是得 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$.

10. 求线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=0\\3x_1-x_2-3x_3+4x_4=0\\x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0\end{cases}$$

的解空间 V 的维数与基.

解　先求齐次方程组的基础解系.

$$\boldsymbol{\xi}_1=(3,3,2,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\xi}_2=(-3,7,0,4)^{\mathrm{T}}$$

即为解空间 V 的一组基,所以 $\dim V=2$.

11. 证明:$x^2+x,x^2-x,x+1$ 是线性空间 $P[x]_2$ 的基底,并求出 $2x^2+7x+3$ 在此基下的坐标.

解　考察齐次式

$$k_1(x^2+x)+k_2(x^2-x)+k_3(x+1)=0$$

即

$$(k_1+k_2)x^2+(k_1-k_2+k_3)x+k_3=0$$

得线性方程组

$$\begin{cases}k_1+k_2=0\\k_1-k_2+k_3=0\\k_3=0\end{cases}$$

由于系数行列式不等于零,那么只有 $k_1=k_2=k_3=0$ 时,上述齐次式才成立,所以 x^2+x,$x^2-x,x+1$ 线性无关,且任二次多项式 ax^2+bx+c 都可唯一地用它们来表示(因为相应的非齐次方程组有唯一解),故为基.

令

$$2x^2+7x+3=(k_1+k_2)x^2+(k_1-k_2+k_3)x+k_3$$

得　$k_1=3,k_2=-1,k_3=3$,即坐标为$(3,-1,3)$.

12. 在$\mathbb{R}^4$中有两组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0),\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,0)$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1,0),\qquad \boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,0,1)$$

与

$$\boldsymbol{\beta}_1=(2,1,-1,1),\quad \boldsymbol{\beta}_2=(0,3,1,0)$$
$$\boldsymbol{\beta}_3=(5,3,2,1),\qquad \boldsymbol{\beta}_4=(6,6,1,3)$$

(1) 求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵；

(2) 求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标；

(3) 求对两组基有相同坐标的非零向量.

解 (1) 因$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{C}$,所以

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}$$

(2) 显然,向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的坐标为 $\boldsymbol{X}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)^{\mathrm{T}}$,设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标为 $\boldsymbol{Y}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)^{\mathrm{T}}$,则

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}^{-1}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\\\xi_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\\\xi_4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{4}{9}&\frac{1}{3}&-1&-\frac{11}{9}\\\frac{1}{27}&\frac{4}{9}&-\frac{1}{3}&-\frac{23}{27}\\\frac{1}{3}&0&0&-\frac{2}{3}\\-\frac{7}{27}&-\frac{1}{9}&\frac{1}{3}&\frac{26}{27}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\\\xi_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{BX}$$

(3) 如果 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$,则有 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BX}$,即得齐次方程组$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,求得非零解为

$$\boldsymbol{X}=k(-1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}},\quad k\in\mathbb{R}\text{,即为所求}$$

13. 求下列线性空间的维数与一组基：

(1) 第 6 题(2)中的空间；

(2) 教材例 1.1.5 中的空间$\mathbb{R}^+$；

(3) 实数域$\mathbb{R}$ 上由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的实系数多项式的全体组成的空间,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\omega^2\end{bmatrix},\qquad \omega=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\qquad \omega^2=\bar{\omega},\qquad \omega^3=1$$

解 (1) 对 $k=1,2,\cdots,n;l=k,k+1,\cdots,n$,令 $\boldsymbol{F}_{kl}=(a_{ij})_{n\times n}$,其中 $a_{kl}=1$,其余的 $a_{ij}=0$,则$\{\boldsymbol{F}_{kl}\}$为上三角矩阵空间的一组基,维数为$\frac{1}{2}n(n+1)$.

(2) $\mathbb{R}^+$ 中任意非零元素都可作$\mathbb{R}^+$的基,$\dim\mathbb{R}^+=1$.

(3) $\boldsymbol{I},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2$ 为所述线性空间的一组基,其维数为 3.

14. 设线性空间 V^4 的基(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 和基(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_4\\ \boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_4\end{cases}$$

(1) 求由基(Ⅰ)变到基(Ⅱ)的过渡矩阵;

(2) 求向量 $\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_4$ 在基(Ⅰ)下的坐标;

(3) 判断是否存在非零元素 $\boldsymbol{\alpha}\in V^4$,使得 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基(Ⅰ)和基(Ⅱ)下的坐标相同.

解　(1) 由已知关系式求得

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=4\boldsymbol{\alpha}_1+8\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_4\\ \boldsymbol{\beta}_2=-2\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4\\ \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3\end{cases}$$

于是,由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}4&-2&1&0\\8&-4&2&1\\1&0&0&2\\-2&1&0&0\end{bmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}$ 在基(Ⅱ)下的坐标为$(2,-1,1,1)^{\mathrm{T}}$,再由坐标变换公式计算 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基(Ⅰ)下的坐标为

$$\boldsymbol{C}(2,-1,1,1)^{\mathrm{T}}=(11,23,4,-5)^{\mathrm{T}}$$

(3) 不难计算得 $\det(1\cdot\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C})=0$,所以 1 是 $\boldsymbol{C}$ 的特征值. 不妨取过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的对应于特征值 1 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\eta}$,则有 $\boldsymbol{C\eta}=1\cdot\boldsymbol{\eta}$,那么 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\boldsymbol{\eta}\neq\boldsymbol{0}$,再由坐标变换公式知,$\boldsymbol{\alpha}$ 在基(Ⅰ)下的坐标为 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{C\eta}=\boldsymbol{\eta}$,即存在非零 $\boldsymbol{\alpha}\in V^4$,使得 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基(Ⅰ)和基(Ⅱ)下有相同的坐标.

15. 在$\mathbb{R}^{2\times2}$中,求由基(Ⅰ):

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0&1\\2&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}-2&1\\1&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}$$

到基(Ⅱ):

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}-1&-1\\0&1\end{bmatrix}$$

的过渡矩阵.

解　不难看出,由简单基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$改变为基(Ⅰ)和基(Ⅱ)的过渡矩阵分别为

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}_2=\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

则有

$$(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{C}_2=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4,)\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2$$

故由基(Ⅰ)改变到基(Ⅱ)的过渡矩阵为

$$C = C_1^{-1}C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

16. 设 $P[x]_3$ 的两基为

（Ⅰ）：$f_1(x)=1$，　　$f_2(x)=1+x$，

$f_3(x)=1+x+x^2$，　　$f_4(x)=1+x+x^2+x^3$；

（Ⅱ）：$g_1(x)=1+x^2+x^3$，　　$g_2(x)=x+x^2+x^3$，

$g_3(x)=1+x+x^2$，　　$g_4(x)=1+x+x^3$.

(1) 求由基（Ⅰ）到基（Ⅱ）的过渡矩阵；

(2) 求 $P[x]_3$ 中在基（Ⅰ）和基（Ⅱ）下有相同坐标的全体多项式.

解　(1) 由简单基 $1,x,x^2,x^3$ 改变到基（Ⅰ）和基（Ⅱ）的过渡矩阵为

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix},\quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故由基（Ⅰ）改变为基（Ⅱ）的过渡矩阵为

$$C = C_1^{-1}C_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 设 $f(x)\in P[x]_3$ 在基（Ⅰ）和基（Ⅱ）下的坐标分别为 $\boldsymbol{\alpha}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)^{\mathrm{T}}$，则有 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{C\beta}$ 且 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$，即有 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$，该齐次方程组的通解为 $\boldsymbol{\beta}=k(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$k\in\mathbb{R}$. 于是，在基（Ⅰ）和基（Ⅱ）下有相同坐标的全体多项式为

$$f(x)=(g_1(x),g_2(x),g_3(x),g_4(x))\boldsymbol{\beta}=kg_3(x)=k+kx+kx^2$$

17. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解，其通解表达式为

$$\boldsymbol{\xi}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意数. 试证：向量组 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 所有解的极大线性无关组，但是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的所有解集合不构成线性空间.

证明　首先按照定义证明 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 所有解的极大无关组.

事实上，令

$$\lambda_0\boldsymbol{\xi}+\lambda_1(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+\lambda_{n-r}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_{n-r})=\boldsymbol{0}$$

即

$$(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r})\boldsymbol{\xi}+\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r}=\boldsymbol{0} \quad ①$$

$$(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r})\boldsymbol{A\xi}+\lambda_1\boldsymbol{A\alpha}_1+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{A\alpha}_{n-r}=\boldsymbol{0}$$

由于 $\boldsymbol{A\alpha}_i=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{b}$，可得

$$(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

再由 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，有

$$\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r}=0 \qquad ②$$

将②式代入①式得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r}=\mathbf{0}$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 线性无关，故有 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-r}=0$，代入②式可得 $\lambda_0=0$，从而说明 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 线性无关.

另一方面，设 $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}&=\boldsymbol{\xi}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r}\\&=(1-k_1-\cdots-k_{n-r})\boldsymbol{\xi}+k_1(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_{n-r})\end{aligned}$$

这表明 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 线性表示，因此 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 解集合的极大无关组.

由于 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解之和、解的常数倍都不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解，这说明 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解集合对加法与数乘不封闭，所以它不构成线性空间.

本题结论说明，一个无限多个向量的集合可以有极大无关组，但此集合并不一定构成线性空间. 线性空间的基一定是极大线性无关组，但一个极大线性无关组(即使是无限多个向量集合中的极大线性无关组)并不一定是基. 换言之，极大线性无关组与基的概念并不等价.

18. 证明线性空间的替换定理：设 $J=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 与 $K=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$ 是 n 维线性空间 V 的两个向量组，其中 J 线性无关. 如果每个 $\boldsymbol{\alpha}_j\in J$ 都可由 K 线性表示，则 $s\leqslant t$，且可将 K 中的某 s 个向量换成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，使得新的向量组生成的子空间与 K 生成的子空间相同.

证明　设 $\boldsymbol{\alpha}_i=a_{1i}\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+a_{ti}\boldsymbol{\beta}_t,1\leqslant i\leqslant s$，则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\boldsymbol{A} \qquad (\text{即 } \boldsymbol{J}=\boldsymbol{KA})$$

其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{t\times s}\in P^{t\times s}$，由于 J 线性无关，故 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解，即 $\boldsymbol{KA}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解，因此 $s\leqslant t$.

进一步，考虑集合 $L=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$. 在 L 中按顺序删除前 s 个与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的 $\boldsymbol{\beta}_j$ 即可使得新的向量组生成的子空间与 K 生成的子空间相同.

19. 证明有限维线性空间的任意两个基所含向量的个数相同.

证明　由于两个基可以互相线性表示，故本题结论由上题可得.

20. 求出教材中例 1.1.5 所述线性空间 $\mathbb{R}^+$ 的一个基与维数.

解　首先注意到 $\mathbb{R}^+$ 中的单位元为 1，任取 $r\in\mathbb{R}^+$，且 $r\neq 0$，设 $k\circ a=1$，那么 $a^k=1$，于是 $k=0$. 再任取 $s\in\mathbb{R}^+$，设 $s=l\circ r=r^l$，可得 $l=\log_r s$. 这表明 $\mathbb{R}^+$ 中任何一个非零数都可以作为 $\mathbb{R}^+$ 的基，从而其维数为 1.

21. 求下列线性空间的基及维数.

(1) $V_1=\{\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)\,|\,2x_1-x_2=0\}$；

(2) $V_2=\{\boldsymbol{X}\,|\,\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA},\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{3\times 3}\}$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$；

(3) $V_3=\{\boldsymbol{A}_{n\times n}\,|\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}\}$.

解　(1) $\forall\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)\in V_1$ 且 $2x_1-x_2=0$，则有

$$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,2x_1,x_3)=x_1(1,2,0)+x_3(0,0,1)$$

这表明 V_1 中任意 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1)$ 线性表示，且易见 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 V_1 的一组基，$\dim=2$.

(2) 令 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}$，由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$ 得

$$\begin{bmatrix} x_1+x_4 & x_2+x_5 & x_3+x_6 \\ x_4+x_7 & x_5+x_8 & x_6+x_9 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 & x_1+x_2 & x_2+x_3 \\ x_4 & x_4+x_5 & x_5+x_6 \\ x_7 & x_7+x_8 & x_8+x_9 \end{bmatrix}$$

由其对应关系得 $x_4=x_7=x_8=0$，$x_1=x_5=x_9$，$x_2=x_6$ 及 x_3 是任意的，令 $x_1=x_5=x_9=a$，$x_2=x_6=b$，$x_3=c$ 就有

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$=a\boldsymbol{A}_1+b\boldsymbol{A}_2+c\boldsymbol{A}_3$$

易知 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，$\boldsymbol{A}_3$ 是线性无关的，故 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，$\boldsymbol{A}_3$ 是 V_1 的一组基，$\dim V_2=3$.

(3) 由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，知 $a_{ii}=0$，$a_{ij}=-a_{ji}(i=1,2,\cdots,n;j=2,\cdots,n)$，$\boldsymbol{A}$ 可表为如下矩阵的组合式：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$
$$=a_{12}\boldsymbol{G}_{12}+a_{13}\boldsymbol{G}_{13}+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{G}_{1n}+a_{23}\boldsymbol{G}_{23}+\cdots+a_{n-1n}\boldsymbol{G}_{n-1n}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{ij}=\boldsymbol{E}_{ij}-\boldsymbol{E}_{ji}$，$i<j$，$\boldsymbol{E}_{ij}$ 表示该矩阵中第 i 行第 j 列元素为 1，其他元素皆为 0 的矩阵.

易知 $\boldsymbol{G}_{12}$，$\boldsymbol{G}_{13}$，$\cdots$，$\boldsymbol{G}_{n-1n}$ 是线性无关的，故它们是 V_3 的一组基，基向量个数为 $(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$，因而 $\dim V_3=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

22. 设 $V=\{\boldsymbol{\alpha}=(x,y)\mid x,y\in\mathbb{C}\}$.

(1) V 在通常向量加法和数乘下，在复数域上是多少维空间？

(2) V 在通常向量加法和数乘下，在实数域上是多少维空间？

解 (1) 设 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1)$，它们是线性无关的，对 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$，有 $\boldsymbol{\alpha}=(x,y)=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，其中组合系数 $x,y\in\mathbb{C}$，故 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是 V 的基，故 $\dim V=2$.

(2) 在实数域上，对 $\forall\boldsymbol{\alpha}=(x,y)\in V$，在用某一组基向量线性表示时，其组合系数必须在实数域范围内选取，因此要将 $x,y\in\mathbb{C}$ 表示为

$$x=a+b\mathrm{i},\qquad y=c+d\mathrm{i},\qquad \mathrm{i}=\sqrt{-1},\quad a,b,c,d\in\mathbb{R}$$

则有

$$\boldsymbol{\alpha}=(x,y)=(a+b\mathrm{i},c+d\mathrm{i})=a(1,0)+b(\mathrm{i},0)+c(0,1)+d(0,\mathrm{i})$$

令

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0),\quad \boldsymbol{\beta}_2=(\mathrm{i},0),\quad \boldsymbol{\beta}_3=(0,1),\quad \boldsymbol{\beta}_4=(0,\mathrm{i})$$

易知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 是线性无关的，且有

$$\forall\boldsymbol{\alpha}=a\boldsymbol{\beta}_1+b\boldsymbol{\beta}_2+c\boldsymbol{\beta}_3+d\boldsymbol{\beta}_4$$

从而求得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 是 V 的一组基，$\dim V=4$.

评注　本题说明同一个线性空间 V，讨论的数域不同，这个线性空间的维数可能不同.

23. 设 $P[x]_{n+1}$ 是次数不大于 n 的实系数多项式空间，

$$W=\{f(x)\mid f(1)=0,f(x)\in P[x]_{n+1}\}$$

证明 W 是一个线性空间，并求一组基及维数.

证明　设 $f_1(x),f_2(x)\in W,f_1(1)=f_2(1)=0$

$$[f_1+f_2](1)=f_1(1)+f_2(1)=0$$

$$[kf](1)=k[f(1)]=k\cdot 0=0$$

则知 $f_1+f_2\in W,kf\in W$，故 W 是 $P[x]_{n+1}$ 的子空间. 令 $g_i(x)=x^i-1,i=1,2,\cdots,n$，有 $g_i(1)=0$，下证 $g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x)$ 是线性无关的.

事实上，考察

$$k_1g_1(x)+k_2g_2(x)+\cdots+k_ng_n(x)=0$$

即

$$k_1(x-1)+k_2(x^2-1)+\cdots+k_n(x^n-1)=0$$

$$k_1x+k_2x^2+\cdots+k_nx^n-(k_1+k_2+\cdots+k_n)=0$$

解得　$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，故 $g_1(x),\cdots,g_n(x)$ 线性无关.

又设

$$\forall f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in W$$

由 $f(1)=0$ 有 $a_0+a_1+\cdots+a_n=0$，则

$$\begin{aligned}f(x)&=a_1(x-1)+a_2(x^2-1)+\cdots+a_n(x^n-1)+a_0+a_1+\cdots+a_n\\&=a_1g_1(x)+a_2g_2(x)+\cdots+a_ng_n(x)\end{aligned}$$

故 $g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x)$ 是 W 的基，$\dim W=n$

24. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性空间中 4 个线性无关向量，求

$$W=L[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1]$$

的基及维数.

解　设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$，有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=3$，由此得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性相关，而由对应关系可知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是极大无关组，也是 W 的一组基，$\dim W=3$.

25. $\mathbb{R}^4$中，设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,-4,-5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-3,6,7)^{\mathrm{T}}$.

(1) 设$W=L[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，求$W$的一组基及维数；

(2) $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，求$N(\boldsymbol{A})$的基及维数(其中$N(\boldsymbol{A})$称为矩阵$\boldsymbol{A}$的零空间，即为齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解空间)；

(3) 记$R(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{y}=\boldsymbol{AX},\forall\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^4\}=\{\boldsymbol{y}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4\}=L[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$(即$R(\boldsymbol{A})$为$\boldsymbol{A}$的像空间)

求$R(\boldsymbol{A})$的基及维数.

解 (1) 设

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\2&1&1&-3\\2&2&-4&6\\3&3&-5&7\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$$

知$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=3$，由$\boldsymbol{B}$矩阵中前3列向量线性无关知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$的极大无关组，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$W$的一组基，$\dim W=3$.

(2) 先求$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解空间$N(\boldsymbol{A})$. 由上面矩阵$\boldsymbol{B}$知$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解为$x_1=0,x_2=k,x_3=2k,x_4=k$，即$\boldsymbol{X}=k(0,1,2,1)^{\mathrm{T}}$，故$\boldsymbol{\alpha}=(0,1,2,1)^{\mathrm{T}}$是$N(\boldsymbol{A})$的基，$\dim N(\boldsymbol{A})=1$.

(3) 因$R(\boldsymbol{A})=L[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，由上面$\boldsymbol{B}$知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$R(\boldsymbol{A})$的基，$\dim R(\boldsymbol{A})=3$.

26. 在n维向量空间$\mathbb{R}^n$中，问分量满足下列条件的全体向量能否构成子空间？

(1) $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$；

(2) $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$.

解 (1) 设$\mathbb{R}^n$的子集合为$\mathbb{L}$，对任意$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{L}$，有

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad \sum_{t=i}^{n}a_i=0$$

对任意$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{L}$，$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n),\quad \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i=0$$

又 $k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,\cdots,ka_n)$，$\sum_{i=1}^{n}ka_i=k\sum_{i=1}^{n}a_i=0$，所以$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{L}$，$k\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{L}$，因此$\mathbb{L}$是$V$的子空间.

(2) 对任意$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{L}$，$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=1,\quad \sum_{i=1}^{n}b_i=1$$

故
$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n),\quad \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i=2$$

于是可知$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\notin\mathbb{L}$，因此$\mathbb{L}$不是$V$的子空间.

27. 假定$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\mathbb{R}^3$的一组基，试求由

$$\boldsymbol{\alpha}'_1=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\alpha}'_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\alpha}'_3=4\boldsymbol{\alpha}_1+13\boldsymbol{\alpha}_2$$

生成的子空间$\mathrm{Span}(\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\boldsymbol{\alpha}'_3)$的基.

解　$\mathrm{Span}(\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\boldsymbol{\alpha}'_3)$的基为$\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\boldsymbol{\alpha}'_3$的一个最大无关组，$\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\boldsymbol{\alpha}'_3$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标依次为

$$(1,-2,3)^{\mathrm{T}},\qquad (2,3,2)^{\mathrm{T}},\qquad (4,13,0)^{\mathrm{T}}$$

该列向量组的一个最大无关组为$(1,-2,3)^{\mathrm{T}},(2,3,2)^{\mathrm{T}}$. 因此，$\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\boldsymbol{\alpha}'_3$的一个最大无关组为$\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2$，即$\mathrm{Span}(\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\boldsymbol{\alpha}'_3)$的一个基为$\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2$.

28. 判断下列子集是否构成子空间？

(1) 给定矩阵$\boldsymbol{P}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\mathbb{R}^{n\times n}$的子集：

$$V_1=\{\boldsymbol{A}\mid \boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PA},\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}\}$$

(2) $\mathbb{R}^{2\times 2}$的子集：

$$V_1=\{\boldsymbol{A}\mid \det\boldsymbol{A}=0,\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\};V_2=\{\boldsymbol{A}\mid \boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\}$$

解　(1) 因为$\boldsymbol{0}_{n\times n}\in V_1$，所以$V_1$非空. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in V_1$，则有$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PA},\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{PB}$. 又因为$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{AP}+\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$，$(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}=k(\boldsymbol{AP})=k(\boldsymbol{PA})=\boldsymbol{P}(k\boldsymbol{A})(k\in\mathbb{R})$，所以$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\in V_1,k\boldsymbol{A}\in V_1$，故$V_1$是$\mathbb{R}^{n\times n}$的子空间.

(2) 取$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，则$\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{B}=0$，从而$\boldsymbol{A}\in V_1,\boldsymbol{B}\in V_1$，但$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\neq 0$，所以$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\notin V_1$，故$V_1$不是子空间.

又$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，从而$\boldsymbol{A}\in V_2$，$2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}$，$(2\boldsymbol{A})^2=\begin{bmatrix}4&0\\0&0\end{bmatrix}\neq 2\boldsymbol{A}$，所以$2\boldsymbol{A}\notin V_2$，故$V_2$也不是子空间.

29. 试证：在$\mathbb{R}^4$中，由$(1,1,0,0),(1,0,1,1)$生成的子空间与由$(2,-1,3,3),(0,1,-1,-1)$生成的子空间相同.

证明　因为

$$(2,-1,3,3)=(-1)(1,1,0,0)+3(1,0,1,1)$$
$$(0,1,-1,-1)=(1,1,0,0)+(-1)(1,0,0,1)$$

即生成的子空间有相同的基，所以它们生成的子空间相同.

30. 已知$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&3\\0&2\end{bmatrix}$及$\mathbb{R}^{2\times 2}$的子空间{见28题(1)}

$$V_1=\{\boldsymbol{A}\mid \boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PA},\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\}$$

(1) 求V_1的基与维数；

(2) 写出V_1中的矩阵的一般形式.

解　(1) 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\in V_1$，则由$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PA}$可得齐次方程组

$$\begin{cases}-3x_3=0\\3x_1+x_2-3x_4=0\\-x_3=0\\3x_3=0\end{cases}$$

求得基础解系为$(1,-3,0,0)^{\mathrm{T}},(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，从而$V_1$的基为