新编·奥林匹克
初中数学竞赛讲座

海南出版社

奥林匹克初中物理竞赛讲座　4.50元
奥林匹克初中化学竞赛讲座　4.50元
奥林匹克初中数学竞赛讲座　4.50元

本套书邮购地址：长沙市南阳街60号　邮编:410005
海南少儿读物出版发行公司长沙经营部　电话:4452053

奥林匹克初中数学竞赛讲座
主　编：欧阳维诚
责任编辑：贺晓兴
*
海南出版社出版　新华书店经销
（海口市花园新村20号）　长沙环境保护学校印刷厂印刷
*
开本:787×1092毫米　1/32　印张:6　字数:12万字
1996年12月印刷　印数:40000—55000册
ISBN7—80590—173—2/G·117
定价:4.50元

前　言

数学竞赛正以它特有的魅力吸引着千千万万的青少年朋友，我国从 1987 年起正式组队参加国际数学奥林匹克竞赛，每年都获得了优异成绩，为祖国争得了荣誉。数学竞赛为中学生提供了课外很好的组织和深化知识的可能性，湖南省在组织数学竞赛方面作出了可喜的成绩，这使湖南省在历年全国数学竞赛中都取得了优良成绩，并选拔出不少优秀选手参加国际数学奥林匹克竞赛。

数学是一门逻辑思维很强的学科，要想取得优异成绩，必须从小抓起，初中阶段的训练尤其重要。为解各地读者渴求之需，我们特聘请湖南教育出版社编审、中国数学奥林匹克高级教练欧阳维诚先生编写了这本《奥林匹克初中数学竞赛辅导讲座》。作者长期从事数学的教育、研究和出版工作，从 1979 年起就担任湖南省数学竞赛教练。在数学领域里，曾编著《初等数学解题方法研究》，与人合著《平面几何证题的思路和方法》、《数学奥林匹克的理论、方法、技巧》等书，并主编《数学竞赛》，现已出版 20 余期。本书根据作者多年培训之经验，紧扣教材，联系实际，讲解由浅入深，分析精辟透彻，将初中数学知识巧思妙解于讲座中。全书除介绍初中代数、几何等常规问题外，还论述了如何用初中数学知识求解形式或类型为中学数学教材中没有出现过的非常规问题，以及根据数学竞赛试题的特点而专设的解题策略。因此，本书无疑是有志于在数学竞赛中大显身手的初中生的理想辅导读物，对于拓宽视野，培养学习数学的兴趣，丰富解题技巧，提高解题能力是极为有益的。

程承斌

目　　录

第一讲　整　数

整数的性质及其运算法则是宏伟壮丽的数学大厦的基石，初中学生在小学算术中就已经初步接触到了整数的一些知识，例如质数与合数，奇数与偶数，约数和倍数等等。即使是这些简单的知识中，就足以推出大量的优美的结论和高度的技巧，因此，它是各级各类数学竞赛命题的热点。在这一讲中，我们只限于用问题来说明某些数学思想，而基本上不涉及专门的数论知识。本讲中的字母如无特别说明，一般都指正整数，因为正整数与负整数只差一个符号，在大多情况下只讨论正整数就可以了。

一、整除性

我们知道，两个整数和和、差、积都是整数，但两个整数的商却不一定是整数，整除的问题将导出许多有趣的结论。

1. 带余除法

我们知道，如果 b 是一个大于 0 的整数，a 是任意一个整数，用 b 去除 a，得到一个商数 q 和余数 r。即

$$a=pb+r(0\leqslant r<b) \qquad (1-1)$$

例如，$37=7\times5+2$，　　$-23=(-6)\times4+1$。

(1－1)式称为带余除式。q 叫做 a 除以 b 的不完全商，r 叫做 a 除以 b 的余数，并且使(1－1)式成立的 q 与 r 是唯一的。

特别地，当 $r=0$ 时，(1)式转化为 $a=qb$，这时，称 a 能被 b 整除或者说 b 整除 a，并用符号 $b|a$ 表示。

a 叫做 b 的倍数，b 叫做 a 的约数或因数。

例1 若 n 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是 b 的倍数，$m_1, m_2, \cdots, m_n$ 是任意的 n 个整数，证明 $m_1a_1+\cdots m_na_n$ 也是 b 的倍数。

证明　因为 $a_1=q_1b, a_2=q_2b, \cdots, a_n=q_nb$，

$$m_1a_1+m_2a_2+\cdots+m_na_n$$
$$=m_1q_1b+m_2q_2b+\cdots m_nq_nb$$
$$=(m_1q_1+m_2q_2+\cdots+m_nq_n)b$$

因 $m_1q_1+m_2q_2+\cdots+m_nq_n$ 仍为一整数，设为 q，则

$$m_1a_1+m_2a_2+\cdots+m_na_n=qb$$

这就证明了：$b|m_1a_1+m_2a_2+\cdots m_na_n$。

例2 证明：n 个连续整数之积一定是 n 的倍数。

证明　我们不难想到 n 个连续整数中，一定有一个而且也只有一个是 n 的倍数。事实上，设这 n 个连续整数是

$$a, a+1, a+2\cdots, a+(n-1)$$

将这 n 个数的每一个都除以 n，设所得的余数分别为：

$$r_0, r_1, r_2\cdots, r_{n-1}$$

如果这 n 个余数中有一个为 0，例如 $r_i=0$，就决心味着 $n|a_i$，那么，n 也必然整除 a_i 与其它 $n-1$ 个数的乘积，如果 n 个余数都不为 0，则这 n 个余数只有取 $1, 2\cdots, n-1$ 这 $n-1$ 个数值，至少有两个要相等，不妨设 $r_i=r_j=r$，那么：

$$a_i=q_in+r,\quad a_j=q_jn+r$$

假定 $a_i>a_j$，则 $q_i>q_j$，将上两式相减即得

$$a_i-a_j=(q_i-q_j)n\geqslant n$$

但是 n 个连续整数中任何两个数之差的绝对值都小于 n，上式是不能成立的。这个矛盾证明了 n 个连续整数用 n 去除时有两个余数相等的情况是不可能出现的。从而证明了本命题。

例3 证明：对任意的自然数 n，都有 $133|11^{n+2}+12^{2n+1}$

证明　$11^{n+2}+12^{2n+1}=121\cdot 11^n+12\cdot 144^n$

$=121\cdot 11^n+12\cdot 11^n-12\cdot 11^n+12\cdot 144^n$

$=133\cdot 11^n+12(144^n-11^n)$

$=133\cdot 11^n+12\cdot 133\cdot(144^{n-1}+144^{n-2}\cdot 11+\cdots\cdots)$

上式两项都能被 133 整除，所以对任意自然数 n，都有

$$133\mid 11^{n+2}+12^{2n+1}。$$

例 4　对任意的自然数 n，$5\mid n^5-n$。

证明　$n^5-n=n(n^4-1)$

$=n(n^2-1)(n^2+1)$

$=(n-1)n(n+1)(n^2+4+5)$

$=5(n-1)n(n+1)+(n-1)n(n+1)(n^2-4)$

$=5(n-1)n(n+1)+(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$

上式的两项中，第一项是 5 的倍数，第二项是 5 个连续整数的积，也是 5 的倍数，所以 n^5-n 也是 5 的倍数。

例 4　用记号 $\overline{a_1a_2\cdots a_n}$ 表示一个各位数码依次为 $a_1,a_2\cdots,a_n$ 的 n 位正整数。

已知 99 能整除正整数 $\overline{62ab427a}$，数字 a 和 b 不知道，试求出 a 与 b。

解　令 $n=\overline{62ab427}$，由题意知，n 能被 9 和 11 整除。

能被 9 整除的数其各位数字的和是 9 的倍数；能被 11 整除的数其奇数位上的数字之和与偶数位上的数字之和的差是 11 的倍数。因此，根据题意，可列出两个方程：

$6+2+a+b+4+2+7=9x$

$(6+a+4+7)-(2+b+2)=11y$

或者：

$$a+b=9x-21 \tag{1}$$

$$a-b=11y-13 \tag{2}$$

注意到 a 与 b 都是数码，所以 $0\leqslant a\leqslant 9$，$0\leqslant b\leqslant 9$，因此有 $0\leqslant a+b\leqslant 18$，$-9\leqslant a-b\leqslant 9$。由(1)和(2)可得 $x=3$ 或 4；$y=1$ 或 2。相应的 $a+b=6$ 或 15，$a-b=-2$ 或 9。将 $a+b$ 与 $a-b$ 的值两两搭配，可得 4 个方程组：

$(A)\begin{cases}a+b=6\\a-b=-2;\end{cases}$　　$(B)\begin{cases}a+b=6\\a-b=9\end{cases}$

$(C)\begin{cases}a+b=15\\a-b=-2;\end{cases}$　　$(D)\begin{cases}a+b=15\\a-b=-2\end{cases}$

(B)、(C)、(D)三个方程组都没有满足条件 $0\leqslant a\leqslant 9$，$0\leqslant b\leqslant 9$ 的整数解，由(A)解得 $a=2$，$b=4$。

2. 质数与合数

全体正整数可以分成三类：

(1)质数　一个大于 1 的正整数，如果它的因数只有 1 和它本身两个，则称为质数，也称为素数。如 2，3，5，7……

(2)合数　一个自然数包含有大于 1 而小于其自身的因素者，称为合数。如 4，6……。

(3)单位数　1 这个数既不是质数，也不是合数，单独作为一类，称为单位数。

在小学算术中学习分数的时候，我们已经学会了用不断试除的方法把一个合数分解为质因数的乘积。因为合数 a 的最小质因数一定不大于 $\sqrt{a}$，所以要判断一个数是不是质数或者要把一个自然数分解成质因数的乘积，只要逐步用不大于 $\sqrt{a}$ 的全部质数去试除就行了。例如，要判断 211 是不是质数，因为有 $14<\sqrt{211}<15$，小于 15 的质数有 2，3，5，7，11，13，通过试除知道这 6 个素数都不能整除 211，故知 211 为一质数。

任何一个大于 1 的正整数 n 都可以分解成质因数的乘积，

即

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k} \qquad (1-2)$$

这里的 $p_1, p_2, \cdots p_k$ 都是质数，并且 $p_1<p_2<\cdots<p_k$，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_k$ 为正整数。(1－2)称为正整数 n 的标准分解式。

从 n 的标准分解式可知，n 的每一个因数 m 都可以写成

$$m=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}$$

这里的 $\beta i_(i=1,2,\cdots k)$ 可以取从 0 到 α_i 的所有整数值 $0,1,2,\cdots \alpha_1-1$，α_i+1 个值。因此，如果用 $d(n)$ 表示 n 的不同因数的个数，由于 β_1 可取从 0 到 α_1 的 α_1+1 个值，β_2 可取从 0 到 α_k 的 α_k+1 个值。因此

$$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1) \qquad (1-3)$$

例 5　证明　质数有无限多个。

证明：用反证法。假设质数只有有限个，不妨设为 $p_1, p_2, \cdots p_n$ 这 n 个，考虑数

$$a=p_1p_2\cdots p_n+1$$

若 a 本身就是质数，它必然是 $p_1, p_2, \cdots p_n$ 以外的质数，与只有 n 个不同质数的假设矛盾。如果 α 是合数，则 a 有大于 1 而小于 a 的质因数，设最小的质因数为 p，若 p 是 $p_1, p_2\cdots p_k$ 中的某一个，则 $p\mid p_1p_2\cdots p_k$，$p\mid 1$，得到矛盾。所以 p 必是 $p_1, p_2, \cdots p_k$ 以外的质数，也与只有 n 个不同质数的假设矛盾。因此，反设不能成立，质数的个数无限。

例 6　试求出不大于 200 且恰有 15 个约数的正整数。

解　设所求的正整数为 n，则 $d(n)=15$，因为 15 只有两种不同的分解式

$$15=15=3\times5$$

所以　$d(n)=15=(14+1)$

或　$d(n)=3\times5=(2+1)(4+1)$

这意味着，n 的标准分解式只能有两种可能的形式：

$n=p^{14}$或 $n=p_1^2p_2^4$（不考虑 p_1、p_2 的大小顺序）

若 $n=p_1^{14}$，则因 $p^{14}\geqslant 2^{14}>200$，不合题意。

若 $n=p_1^2p_2^4$，则

当 $p_1=2$，$p_2=3$ 时，有 $2^2\cdot 3^4=324>200$；

当 $p_1=3$，$p_2=2$ 时，有 $3^2\cdot 2^4=144<200$；

当 p_1 或 p_2 中有一个大于 3 时，都有 $n=p_1^2p_2^4>200$。

故所求的正整数只有 $n=144$。

例 7 设 a、b、c、d 都是自然数，并且 $a^2+b^2=c^2+d^2$，证明 $a+b+c+d$ 必为合数。

证 因为 $a^2+b^2=c^2+d^2$

$a^2+b^2+c^2+d^2=2(c^2+d^2)$

$(a+b+c+d)^2=2(c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd)$

上式的右边为一偶数，左边也必为偶数，因为偶数的平方仍为偶数，奇数的平方仍为奇数，$a+b+c+d$ 为一偶数，它有因数 2，又由于 a、b、c、d 都是自然数，$a+b+c+d\geqslant 4$，故 2 是 $a+b+c+d$ 的一个大于 1 又不等于其本身的因数，因此，$a+b+c+d$ 为一合数。

例 8 将 8 个数 14，30，33，75，143，169，4445，4953 分成两组，每组 4 个数，使一组中 4 个数的乘积等于另一组中 4 个数的乘积，应该怎样分组？

解 先将 8 个数分解成质因数的乘积：

$14=2\cdot 7$　　　　$30=2\cdot 3\cdot 5$

$143=11\cdot 13$　　　　$169=13^2$

$33=3\cdot 11$　　　　$75=3\cdot 5^2$

$4445=5\cdot 7\cdot 127$　　　　$4953=3\cdot 13\cdot 127$

8 个数的乘积是：

$A=2^2\cdot3^4\cdot5^4\cdot7^2\cdot11^2\cdot13^4\cdot127^2$

由于所有的指数都是偶数，分成两组使两组的乘积相等是有可能的。每组 4 个数的乘积是

$A=2\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13^2\cdot127$

现在通过观察，将 8 个数两两搭配：

因 14 和 30 各有一个因数 2，它们应分在不同的组，不妨设 14 归入甲组，30 归入乙组。因 14 有因数 7，另一有因数 7 的 4445 必归入乙组。4445 有因数 127，知另一含因数 127 的数 4953 应归于甲组，乙组中的 30 和 4445 各有一个因数 5，故另一个含有因数 5^2 的 75 应归入甲组。这时，甲组中的 4953 和 75 都有因数 3，另一含有因数 3 的 33 应归入乙组。因 33 有因数 11，另一有因数 11 的 143 应归入甲组。甲组中已有 4 个数，最后一个数 169 理应归入乙组。故得分组方法：

甲组：14，4953，75，143；　乙组：30，4445，33，169。

3. 最大公因数和最小公倍数

设 a 和 b 是两个不全为 0 的整数，若整数 c 同时能整除 a 和 b，即 $c|a$，$c|b$，则称 c 是 a 和 b 的公因数，a 和 b 的所有公因数中的最大者称为 a 与 b 的最大公因数，记作 $(a,b)=c$。

如果 $(a,b)=1$，则称 a 与 b 互质或互素。

若 a 和 b 是两个都不为 0 的整数，如果整 m 既是 a 的倍数又是 b 的倍数，则称 m 是 a 与 b 的公倍数。a 与 b 所有的公倍数中最小的正数称为 a 与 b 的最小公倍数，记作 $[a,b]=m$。

求两个数 a 与 b 的最大公因数和最小公倍数的方法，通常是用试除法将 a 与 b 分解成质因数的乘积：

$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$

$b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}$

在上两式中为了方便，允许某些指数为 0，那么

$$(a,b)=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$$

$$[a,b]=p_1^{\delta_1}p_2^{\delta_2}\cdots p_k^{\delta_k}$$

这里的 r_i 取 $\alpha_i\beta_i$ 中较小的一个，δ_i 则取 $\alpha_i\beta_i$ 中较大的一个。例如：

$$68600=2^2\cdot 3^0\cdot 5^2\cdot 7^3,\quad 18900=2^2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7$$

所以 $(68600,18900)=2^2\cdot 3^0\cdot 5^2\cdot 7=700$

$[68600,18900]=2^3\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^3=1852200$

对于不容易分解的数，可用辗转相除法求两个数的最大公因数，例如

$$(2445,652)=(652,489)=(489.163)=163$$

这个式子是这样得出的：先用 2445，652 中较小的 652 去除 2445，得商 3，余数 489；再用余数 489 去除 652，得商 1，余数 163；再用第二次的余数 163 去除 489，这样一直做下去到余数为 0 为止，如果最后一步用作除数的（前一步的余数）数为 c，则 c 就是 a 与 b 的最大公因数，因为 163 除 489 的余数为 0，所以 $163=(2445,652)$。

例 9　设 a,b 是两个不为零的整数，证明

$[a,b](a,b)=ab$

证　设 $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$　　$b=p_1^{\beta_1}p_1^{\beta_1}\cdots p_1^{\beta_1}$

则 $ab=p_1^{\alpha_1+\beta_1}p_1^{\alpha_2+\beta_2}\cdots p_k^{\alpha_k+\beta_k}$。

$(a,b)=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$

$[a,b]=p^{\delta_2}p^{\delta_2}\cdots p_k^{\delta_k}$

因为 r_i 是 α_i,β_i 中较小的一个，δ_i 是 $\alpha_i\beta_i$ 较大的一个，若 $r_i=\alpha_i$，则 $\delta_i=\alpha_i$。若 $r_i=\beta_i$，则 $\delta_-\alpha_i$。不论那种情况，都有 $r_i+\delta_i=\alpha_i++\beta_i$，所以 $(a,b)[a,b]=ab$。

例 10 试证：对任意的自然数 n，分数 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 都是最简分数（即不能再约分）。

证明：要证 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 是最简分数，就是要证 $21n+4$ 和 $14n+3$ 没有大于 1 的公因数，即要证 $(21n+4,14n+3)=1$。因为

$$(21n+4,14n+3)=(7n+1,14n+3)=(7n+1,1)=1$$

所以 $21n+4$ 与 $14n+3$ 互质，$\frac{21n+4}{14n+3}$ 是最简分数。

例 11 设两个正整数之和为 667，其最小公倍数是其最大公因数的 120 倍，求此二数。

解 设这两个数为 x,y，它们的最大公因数 $(x,y)=u$，则 $x=mu,y=nu$，于是根据公式（1－4）与题设，有

$$x+y=mu+nu=(m+n)u=667$$

$$\begin{aligned}xy&=(x,y)[x,y]=u(120u)=120^2\\&=(mu)(nu)=mnu^2\end{aligned}$$

于是得方程组

$$\begin{cases}(m+n)u=667\\mn=120\end{cases}$$

u 是 667 的因数，因 $667=1\times23\times29$。

当 $u=1$，m,n 是方程 $t^2-667t+120=0$ 的二根，这个方程无整数解。

当 $u=23$，m,n 是方程 $t^2-29t+120=0$ 的二根，解得 $m=5,n=24$。

当 $u=29$，m,n 是方程 $t^2-23t+120=0$ 的二根，解得 $m=8,n=15$。

所以本题有两解：

$x_1=5\times23=115$；　　$y_1=24\times23=552$；

$x_2=8\times29=232$；　　$y_2=15\times29=435$。

例12　证明：用30除一个质数的余数必为质数。

证明　设质数 p 用30除的余数为 r，则有

$$p=30q+r(0\leqslant r\leqslant 29)$$

若 r 不是质数，则 r 有大于1的质因数，因 $5^2=25<29<6^2$，故 r 的最小因数只能是2，3，5，它们都是30的因数；设为 m，则因 $m|30$，$m|r$，推出 $m|p$，与 p 为质数矛盾。故 r 必为质数。

4. 平方数

一个正整数 x 如果是另一个整数 y 的平方，即 $x=y^2$，则称 x 的平方数，平方数有一些特殊的性质，这些性质常常被用来作为数学竞赛命题的材料。

平方数个位数字只能是0，1，4，5，6，9中的一个；

奇数的平方为奇数，偶数的平方为偶数；

偶数的平方必是8的倍数或8的倍数加4（总是4的倍数）；

奇数的平方必是8的倍数加1（当然也是4的倍数加1）。

平方数与平方数之积为平方数，平方数与非平方数之积为非平方数。

平方数如有某一质因数 a，则 a^2 也必为其因数，换句话说，平方数的标准分解式是 $n=p_1^{2a_1}p_2^{2a_2}p\cdots p_k^{2a_k}$。

这些性质都很明显，我们在此不作证明，将它留给读者。

例13　是否有这样的整数 x，它使得 x^2+x+3 是121的倍数？

解　假定有这样的 x 存在，使

$$x^2+x+3=121k$$

此处 x 和 k 是整数，实际上有关于 x 的二次方程

$$x^2+x+(3-121k)=0$$

为了使方程的解为整数，它的判别式应为一平方数，即

$$\triangle=1^2-4(3-121k)=11(4k\times 11-1)=n^2$$

此处的 n 为整数。由于质数 11 是 n^2 的一个因数，则 11^2 也是 n^2 的因数，即 11 是 $4k\cdot 11-1$ 的因数，这显然是不可能的。这就证明的不存在整数 x，使 x^2+x+3 是 121 的倍数。

例 14 若二次整系数方程 $ax^2+bx+c=0$ 的系数均为奇数，则它没有有理数根。

解　二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有整数解的充要条件是它的判别式 $\triangle=b^2-4ac$ 为一个完全平方数，今 a,b,c 均为奇数，故可设 $a=2m+1,b=2n+1,c=2l+1$ 则

$$\begin{aligned}\triangle&=(2n+1)^2-4(2m+1)(2l+1)\\&=8\left[\frac{n(n+1)}{2}-2ml-m-l-1\right]+5=8k+5\end{aligned}$$

可见△既不是偶数的平方，也不可能是奇数的平方，所以 $ax^2+bx+c=0$ 无有理数解。

例 15　证明　不存在三位数 $\overline{abc}$，对于它使 $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ 之和为一平方数。

证明　因为 $\overline{abc}=100a+10b+c$，$\overline{bca}=100b+10c+a$，$\overline{cab}=100c+10a+b$，于有是

$$\begin{aligned}\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}&=100(a+b+c)+10(a+b+c)+(a+b+c)\\&=(a+b+c)(100+10+1)\\&=3\cdot 37(a+b+c)\end{aligned}$$

若 $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ 为平方数，因其有质因数 37，因 $(3,37)=1$，在 $a+b+c$ 中必有一个因数 37，但 a、b、c 都是数码，$a+b+c\leqslant 9+9+9=27$，不可能包含因数 37，故 $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ 不能为平方数。

例 16　设 a,b,c 是不为 1 的互质整数，并且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$，证明 $a+b$、$a-c$ 和 $b-c$ 都是完全平方数。

证明　三个整数 a,b,c 互质是从两个整数互质的概念推广而来的，即 a,b,c 三个数没有大于 1 的公因数，记作 $(a,b,c)=1$，因为 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ 两边同乘以 ab，则得 $a+b=\frac{ab}{c}$，因 $\frac{ab}{c}$ 为整数，而且 $(a,b,c)=1$，必定 $c=qr$，使 $q|a$，$r|b$（q,r 中的一个可以为 1），即 $a=qm$，$b=rn$，$c=qr$。由 $(a,b,c)=1$ 可知 $(m,r)=1$（若不然，则 $(m,r)=d>1$，且 $d|a$，$d|b$，$d|c$，于是 $(a,b,c)=d>1$ 矛盾），于是

$$a+b=mq+rn=\frac{mnqr}{qr}=mn \qquad (*)$$

即　$m(n-q)=rn$ 因 $(m,r)=1$，推出 $m|n$。

类似地，由 $(n,q)=1$ 得 $n|m$，从而有 $m=n$，代入（$*$）式，得 $m(q+r)=m^2$ 于是得 $q+r=m$。因此

$$a+b=mq+mr=m(q+r)=m^2$$

$$a-c=mq-qr=q(m-r)=q^2$$

$$b-c=mr-qr=r(m-q)r^2$$

二、不定方程

我国古代数学家张丘建曾经写过一本《张丘建算经》，书中有许多有趣的数学问题，其中有一道题是：

“鸡翁一，值钱五，鸡母一，值钱三；鸡雏三，值钱一。百钱买百鸡，问鸡翁、母、雏各几何？”

如果我们用 x,y,z 分别代表购买的公鸡、母鸡、小鸡的数目，根据题意，可得到方程组 $\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 \end{cases}$

消去 z，再化简就得到方程

$$7x+4y=100$$

这个方程中含有两个未知数，且未知数的值必须取非负整数，像这种未知数的个数多于方程的个数，且未知数的取值受到某些限制（如要求是整数等）的方程称为不定方程，上面的方程称为二元一次不定方程。二元一次不定方程的一般形式是

$$ax+by=c \tag{1-5}$$

其中 a、b、c 为整数，且 $ab\neq 0$，$(a,b)=1$。

不过 $(a,b)=1$ 这个条件是不必要的，因为如果 a 与 b 有最大公因数 $d>1$，则由 $d|a$，$d|b$，若 d 不能整除 c，方程(1－5)必然没有整数解，就不必继续讨论了，如果 $d|c$，可在方程两边除以 d，便得到一个新方程

$$a'x+b'y=c'$$

这时必有 $(a',b')=1$。至于条件 $ab\neq 0$ 则是必要的，否则就成为普通的一元一次方程了。

在 $(a,b)=1$ 时，方程(1－5)总是有解的，下面我们用具体的例子来说明二元一次不定方程的解法。

例 17 解上述的“百钱买百鸡”问题。

解法一 $7x+4y=100$

$$y=\frac{100-7x}{4}=25-2x+\frac{x}{4}$$

设 $\frac{x}{4}=t$，则因 t 是整数，于是又得二元一次不定方程

$$x=4t$$

令 $t=0,1,2,3,4\cdots$，得 $x=0,4,8,12,16\cdots\cdots$。

这个方程有无穷多组解，但因 x，y 都必须为非负整数，当 $t\geqslant 4$ 时，$x\geqslant 16$，$7x>100$，$y=\frac{100-7x}{4}$ 将成为负数，故 t 只能取前 4 个值：$t=0,1,2,3$；从而 $x=0,4,8,12$，代入原方程求得 $y=25,18,11,4$。再根据 $x+y+z=100$，求得相应的 $z=75,78,81$，