



王能超 | 著

Liu Hui Shuxue "Geyuanshu"
—— Qixiao de Liu Hui Waitui

刘徽数学“割圆术”
—— 奇效的刘徽外推

华中科技大学出版社
<http://www.hustp.com>





刘徽数学“割圆术” ——有效的刘徽外推



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

刘徽数学“割圆术”:奇效的刘徽外推/王能超著. —武汉:华中科技大学出版社,2016.4

ISBN 978-7-5680-1580-6

I. ①刘… II. ①王… III. ①圆-普及读物 IV. ①O123.3-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 046758 号

刘徽数学“割圆术”——奇效的刘徽外推

王能超 著

Liu Hui Shuxue “Geyuanshu”——Qixiao de Liu Hui Waitui

策划编辑:姜新祺

责任编辑:姜新祺

封面设计:刘 卉

责任校对:何 欢

责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)81321913

录 排:华中科技大学惠友文印中心

印 刷:湖北新华印务有限公司

开 本:880mm×1230mm 1/32

印 张:5.75 插页:2

字 数:107千字

版 次:2016年4月第1版第1次印刷

定 价:28.00元



本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

内 容 提 要

刘徽是中国古代最伟大的数学家，是“古代数学之神”。他为中国古代算经《九章算术》所作的注《九章算术注》，奠定了中国古代数学体系的理论基础，其中关于圆面积的论述——割圆术，是一篇经典而寓意深邃的千古奇文。

本书对“割圆术”进行了深入的研究，阐述了它所透射出的深邃的数学思想和玄妙的科学方法，论证了祖冲之求圆周率的算法源于“割圆术”，破解了数学史上这桩千年疑案，并以科学、严谨的论述向世人宣示：刘徽提出的“割圆术”是衔接高等数学的金桥，它的技术是会通科学计算的古道，它的思想是攀登未来数学的天梯。尤其是其中的数学外推技术，其改善精度的效果极其显著，这在数据加工处理成为现代数学研究主旋律的数字化时代，其应用给人以无限遐想。

本书文笔优美，风格清峻，气势磅礴，着眼于“会通古今，熔铸中外”，既介绍“国粹”知识，又探讨治学方法和数学方法论，同时也对数学史上某些热点疑难问题进行评说，能为广大读者所接受：中学生能增长知识，大学生能启迪思维，相信数学工作者也会引起共鸣。

阅读本书的感受是奇妙的，读者不妨一试。



李大潜先生的评说

刘徽是我国历史上一位值得大书特书的数学家，他在对《九章算术》的注述中关于圆面积的论述——割圆术，是一经典而意义深远的数学文献。祖冲之关于圆周率 π 的杰出成果在国际上遥遥领先一千多年，其算法虽失传，但在其二百年前的刘徽在割圆术中已明确提出了算法的一般原则和技巧，并作了具体的计算，其贡献应远远在祖冲之之上。但世人只知有“祖”不知有“刘”，显然有失偏颇。本书突出了刘徽的功绩，反映了历史的本来面目，是值得称道之一点。

割圆术篇幅不长，只 1800 字左右，但真正读过的人不多，深入钻研者尤少。本书作者用逐段解释的方法对割圆术的内容作一介绍，简明扼要，向世人解释了这一历史上的优秀文化遗产，重现了这一数学瑰宝的风采，是很有意义的工作，是值得称道之二。

值得称道之三是作者并未就事论事地进行注释，而是从现代数学的观点充分地阐明割圆术中所蕴含的丰富而深刻的数学思想，并据此对一些公认的疑点进行破译，



颇有创造性。特别对割圆术中关于加速技术的解释,并联系到费根包姆常数,很有新意,但又非常贴合原著的精神,应视为本书最为精彩的篇章。阅读此处,不由为刘徽的远见卓识而赞叹,并为作者独具匠心的破译之功而折服。

综观全书,文字清晰、优美,有很强的启发性及可读性。这是一部十分优秀的科学普及作品,深信广大读者将会为之受益。

中国科学院院士 李大潜
复旦大学数学系教授

2001年3月28日



林群先生的评说

此书深刻地挖掘和分析了刘徽在割圆术上的开创性的贡献,非常有趣地指出他的割圆术与近代的外推系数只差 $1/105$ 。计算结果表明只要用 96 与 192 边形的结果相组合,便可得到普通方法要用 3072 边形才能达到的精度。这在当时是惊人的结果!

我认为王教授的发现是数学史上的重大事件。此外,此书写得生动活泼,包含了其他鼓舞人心的历史,对任何人都会受益。因此,我毫无保留地给予崇高的评价。

中国科学院院士

中科院数学与系统科学研究院研究员

2001 年 8 月 20 日



张景中先生的评说

本书深入浅出地对刘徽的“割圆术”这一千古奇文进行阐述和研究。一方面研究了数学史上的疑问,另一方面向读者介绍了数学的思想与方法。古今中外纵横畅叙,文笔优美,气势磅礴,是不可多得优秀科普作品。

中国科学院院士
中科院成都计算机应用研究所研究员

2002年5月18日



杨叔子先生的评说

王能超教授的著作，向读者通俗易懂地介绍了我国古代数学史上经典文献“割圆术”，并非常精彩地阐述了它对现代科技乃至未来科学的启迪意义，尤其富有创造性的是，基于对“割圆术”深邃思想的理解，探究了我国南北朝数学家祖冲之获得千年称雄世界的圆周率结果的算法这一千古疑案，显示了作者独具匠心。

通观全书，本书具有如下特点：

一是探讨了我国古代科技文献中所蕴含的宝贵财富。这是现有科普作品中鲜见的，它对于弘扬中国传统文化，继承中华优秀传统文化具有重要意义。

二是作者旁征博引，谈古论今，熔铸中外，既谈学术，谈治学，谈方法，也说历史，说教训，作者对中华优秀传统文化的热爱溢于言表，这有利于激发读者的爱国主义感情。这种感情也是科普作品中应该有而很少见的。

三是本书不仅限于介绍知识，同时还具有重要的学术价值。可以说本书是用通俗的语言撰写的一部学术专著。在科普作品中渗透学术，这是科普作品难得的层次。



四是本书语言优美、引人入胜,结语部分更是揭示了“割圆术”中具有的高层次的数学美,把它解释为一首扣人心弦的数学诗,充分显示了作者的人文功底。这有利于激发读者提高自己的人文素质。

总之,本书是一本非常优秀的科普作品,相信会得到读者喜爱。

中国科学院院士

华中科技大学教授

杨叔子

2001年3月28日



陈传森先生的评说

我们从中学到大学的数学教育,都是言必谈古希腊的阿基米德,他在公元前 2 世纪计算了单位圆的内接 96 边形的周长,得到 $\pi=3.14$ 。诸多中国数学史书虽也提到刘徽求得 $\pi=3.14$,但更强调祖冲之(429—500)计算出高精度的圆周率。祖冲之的原作早已失传,在《隋书》中仅有几行文字表述,不知道他是如何计算的。虽然国际上认可祖冲之的功绩,并在月球上命名有“祖冲之山”,但 Klein 的《古今数学思想》一书的“序”称:“我忽略了几种文化,例如中国的文化,因为他们的工作对数学思想的主流没有重大的影响。”这是一种偏见,令人气愤,可又无可奈何!

近年拜读了王能超教授的著作《千古绝技“割圆术”——刘徽的大智慧》(华中科技大学出版社,2003),我感到了极大的震惊。原来中国古代最伟大的数学家刘徽(225—295)为《九章算术》作注(263 年),其中一个重要的注《割圆术》中,计算了 96 边形的面积得到 $\pi=3.14$,然后进一步用外推法得到了 $\pi=3.1416$ 。这 1800 字《割圆

术》被幸运地保存下来了，完整地记录了他的深刻思想方法。这使我肃然起敬，中华先辈们在近 1800 年前竟创造了如此光辉灿烂的思想。

但是，在刘徽的《割圆术》中所述“以十二觚之幂为率消息”是什么意思？这成了千古之谜，后人一直迷惑不解，因此不能理解刘徽的思想。中国人自己都不懂，外国人更知道了。王能超教授经多年研究破译了这个 10 字谜，给出了合理的解释：误排，重印中出现了误排，此后以讹传讹。原文应是“以十二觚之幂率为消息”。这里“幂率”是面积差分比。以十二觚之幂率 $r=3.95$ 为“消息”，可推出 $\pi \approx 3.1416$ 。这样刘徽的系统思想方法就清晰了。王能超教授是我国知名计算数学家，不是数学史家，他克服了古汉语及古代文献的重重困难，潜心研究多年，破解了这桩千古奇案，是中华数学史乃至中华文化史上之重大事件，功不可没。

刘徽算法是世界上最早的外推方法，它比英国气象学家 Richardson(1910 年)早了 16 个世纪，并且比值 $r=3.95$ 是用数值计算直接得到的！

我们看到，刘徽的数学思想是系统而严谨的，是中国古代数学史上最辉煌的成就，它远远地超越了整个时代。国人应深入研究《九章算术注》中刘徽所阐述的整体思想（而不是部分思想），也应该“将一个辉煌的中国古代数学惊讶地展现在世界面前”。这是我们实现中国梦的一部分。王能超教授的新作《刘徽数学“割圆术”——奇效的



刘徽外推》是这种研究的可喜开端。

我觉得我们的中学和大学数学教材应该告诉青年人,中华数学曾经达到了世界的顶峰!国人不仅应为之骄傲,更应举起前人的火炬点亮未来!

在20世纪80年代(1978年)受苏联数学家 Marchuk-Shaidurov 研究差分外推的启发,林群、吕涛和笔者等一批学者率先研究有限元外推法,并作出了重要创新。可惜那时我们不知道刘徽的外推思想。

与 Richardson 外推不同,刘徽的外推法无需先证明误差的渐近表示式!即使今天,对曲边区域(非均匀网格)上椭圆问题的数值解,证明整体表示式几乎不可能!但是刘徽的外推思想可将证明局部化,这是何等重要啊!这种思想还可以用于试验数据和大数据的挖掘。

现代科学计算的一个重要思想是预报+校正。近年笔者和石钟慈等提出外推多网格法(J Comput Math, 2011(29), 684—697),将外推预报思想用于大规模科学计算,对矩形区域上的模型问题在PC机上求解400万未知数方程组仅费时10秒,在中等并行机上用8个处理器求解1亿阶问题仅费时2分钟,解非线性问题的效率很高。这是外推法的新应用。我们谨以此工作纪念刘徽外推法1800周年。

湖南师范大学数学与计算机学院教授

陈传霖

2014年10月25日于岳麓山下



前言 牛顿数学的尴尬

数学在中国古代统称为算术。成书于汉代的《九章算术》建立了中国古代数学体系的框架,提出了若干概念、判断和命题。公元 263 年以前,魏晋刘徽作《九章算术注》,将《九章算术》中提出的概念加以定义,对其中的判断和命题给出逻辑证明,并将有关知识系统化,从而完成了一个完整的数学理论体系。我们称这一数学体系为刘徽数学。

刘徽数学是中华传统数学中一座“珠穆朗玛峰”,对后世中华数学的发展影响巨大。从世界数学史的角度看,以刘徽数学为代表的中华传统数学可以同欧几里得、阿基米德为代表的古希腊数学相媲美。

在刘徽数学中,全文 1800 字的“割圆术”特别引人注目。这是刘徽数学中一颗璀璨的明珠。本书以无可非议的论据证明,刘徽在割圆术中所达到的学术高度,是被西方尊为“古代数学之神”的阿基米德所望尘莫及的。刘徽是名副其实的“东方数学之神”。

刘徽的割圆术中蕴含有极限思想,因此西方学者称刘徽是“中国的牛顿”。这种提法幼稚可笑,牛顿比刘徽



晚了 1400 多年，怎么能说“爷爷像孙辈”呢？

不过，牛顿数学与刘徽数学确实有不解之缘！

微积分方法本质上是逼近法。美籍华人学者项武义曾经生动地比喻说，俗说程咬金三斧头，微积分方法其实只有一斧头，那就是逼近法。

数学家们最为关心的是，怎样刻画逼近的精度？如果逼近过程收敛速度缓慢，该怎样提速呢？

所谓外推技术是一类加权平均技术，它将两个优劣不同的数据适当加权平均，以获取更高精度的结果。

这种外推技术能否改善精度，关键在于能否选择到合适的权系数。

1910 年提出的 Richardson 外推，基于所谓余项展开式选取权系数。然而运用微积分方法建立余项展开式往往是极其困难的。在 20 世纪 80 年代初，以林群、陈传森等为代表的一批中国学者，在有限元外推方面作出了举世瞩目的学术成就。

然而人们难以撼动“余项展开式是外推方法的瓶颈”这个严峻的事实。

逼近法的微积分竟然无法完满解决自身的逼近加速问题，这是牛顿数学的尴尬！

我们深入钻研“割圆术”后发现，早在 1700 多年前，刘徽早已熟练地掌握了外推技术。刘徽外推纯粹是用数据加工实现的，方法极为简便。我们运用刘徽外推轻易



地破解了祖冲之的“缀术”这个千古疑案，还做了一个有趣的数值实验：

众所周知，混沌学中有个 Feigenbaum 常数，计算高精度的 Feigenbaum 常数，即使用超级计算机，也要耗费成年累月的机时。而我们借助于几个粗糙的数据（它们是容易获得的），运用刘徽外推技术进行数据加工，结果发现，几次简单的计算即可显著地改善精度。

效果是神奇的：人工手算竟胜过了超级计算机。

大概七八年前，作者参加浙江湖州一次学术会议，期间幸遇林群先生。林先生对刘徽外推技术给予了充分的肯定。他交给作者一份有限元外推的学术论文，建议作者运用刘徽外推做个比较。由于作者对实际工程计算不太熟悉，这事被搁置了下来。

直到去年8月，作者在长沙拜访了湖南师范大学的陈传森教授。陈先生对大规模工程计算，特别是有限元外推有很深的造诣。作者恳请陈先生将刘徽外推与 Richardson 外推两者加以比较。前不久陈先生亲自来武汉，兴奋地告知作者，相比 Richardson 外推，刘徽外推有无可比拟的优越性。

最后对本书的身世作点说明。

20 世纪的 90 年代，作者以《千古绝技“割圆术”》为题在《数学的实践与认识》上连续发表了两篇学术论文（参看附录）。此后华中科技大学出版社以《千古绝技“割圆



术”》为正书名接连出版了两本著作,其中一本荣获全国优秀科普作品奖。本书是这一系列工作的延续。为了突出刘徽数学的巨大威力,为了彰显刘徽数学未来发展的无限潜力,拟将本书以《刘徽数学“割圆术”》为题单册出版,以期得到广大读者与学术界同行更多的关注与批评。

王能超

2014.10.24