



无网格方法

(下 册)

程玉民 著



科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

无网格方法

(下 册)

程玉民 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书内容是作者课题组十多年来关于无网格方法的研究成果,分为上下两册.上册的主要内容有:无网格方法的研究进展及存在的问题、无网格方法的逼近函数、改进的无单元 Galerkin 方法、插值型无单元 Galerkin 方法、边界无单元法和无网格方法的数学理论等.上册末附有弹塑性力学的插值型无单元 Galerkin 方法的 Matlab 程序.下册的主要内容有:复变量无单元 Galerkin 方法、基于变分原理的复变量无网格方法、改进的复变量无单元 Galerkin 方法和复变量重构核粒子法等.下册末附有弹性大变形问题改进的复变量无单元 Galerkin 方法的 Matlab 程序.

本书可供高等院校和科研单位从事计算力学、计算数学、计算物理及科学和工程计算,特别是无网格方法研究的学者和研究生参考,也可供从事工程计算的技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

无网格方法.下册/程玉民著. —北京:科学出版社,2015.11

ISBN 978-7-03-046173-5

I. ①无… II. ①程… III. ①计算力学 IV. ①O302

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 258151 号

责任编辑:李静科 赵彦超 / 责任校对:邹慧卿

责任印制:张倩 / 封面设计:陈敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新科印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 1 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2016 年 1 月第一次印刷 印张:29 1/4

字数:590 000

定价:158.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

无网格方法是继有限元法之后发展起来的一种重要的数值方法,近二十年来发展很快.无网格方法基于节点建立逼近或插值函数,与基于网格的数值方法如有限元法和边界元法相比,在处理诸如大变形、裂纹扩展等问题时不需要进行网格重构,具有较为明显的优越性.无网格方法是目前科学和工程计算研究的热点之一.

本书内容是作者的课题组十多年来关于无网格方法的研究成果,包括作者与其合作者,以及指导的博士生和硕士生的研究成果.

本书内容丰富,不仅包括无网格方法的逼近函数的形成方法,而且包括求解各种线性和非线性问题的无网格方法和无网格边界积分方程方法,以及无网格方法的数学理论.在着重阐述作者提出的新的逼近函数的形成方法的基础上,重点讲述基于新的逼近函数求解各种问题的无网格方法.

本书分上下两册.上册包含绪论、无网格方法的逼近函数、改进的无单元 Galerkin 方法、插值型无单元 Galerkin 方法、边界无单元法和无网格方法的数学理论等.下册内容为复变量无网格方法.下册的整体安排如下:

第 7 章是基于复变量移动最小二乘法和 Galerkin 弱形式建立的复变量无单元 Galerkin 方法求解势问题、瞬态热传导、弹性力学、弹性动力学、弹塑性力学、黏弹性力学、弹性大变形和弹塑性大变形等问题.另外,基于复变量移动最小二乘插值法和 Galerkin 弱形式建立了势问题的插值型复变量无单元 Galerkin 方法.

第 8 章是基于复变量移动最小二乘法和变分原理建立的复变量无网格方法求解弹性力学和断裂力学问题.另外,基于此复变量无网格方法建立了复变量无网格方法与有限元耦合法.

第 9 章是采用基于共轭基的复变量移动最小二乘法和 Galerkin 弱形式建立的改进的复变量无单元 Galerkin 方法求解势问题、瞬态热传导、对流扩散、弹性力学、弹塑性力学、黏弹性力学、弹性大变形、弹塑性大变形和凝胶非均匀溶胀等问题.

第 10 章是基于复变量重构核粒子法建立逼近函数,根据 Galerkin 弱形式建立求解势问题、瞬态热传导、变系数对流扩散、弹性力学、弹性动力学、弹塑性力学、Kirchhoff 板弯曲和带源参数的热传导反问题的复变量重构核粒子法.另外,基于此复变量重构核粒子法建立了势问题、瞬态热传导和弹性力学等问题的复变量重构核粒子法与有限元耦合法.

本书下册末附有弹性大变形问题改进的复变量无单元 Galerkin 方法的 Matlab

程序,为无网格方法的初学者学习 Matlab 编程之用,也可作为无网格方法的研究者和工程技术人员求解非线性问题提供参考。

本书所包含的内容绝大部分来自作者作为论文作者之一发表的学术论文,其余的很少部分内容来自作者提供研究思路和研究方案,由相关合作者完成的研究成果。

在本书出版之时,作者衷心感谢香港城市大学建筑学与土木工程学系主任 K. M. Liew 教授和澳大利亚昆士兰大学的 S. Kitipornchai 教授多次提供赴港合作研究机会以及进行的科研合作!感谢课题组彭妙娟教授的研究工作对本书的贡献!感谢作者指导的博士后张赞,博士生李九红(合作指导)、李树忱、秦义校、戴保东、程荣军、陈丽、任红萍(合作指导)、高洪芬、王聚丰、孙凤欣和翁云杰,硕士生陈美娟、白福浓、王健菲和邓亚洁,以及彭妙娟教授指导的硕士生刘沛、李冬明、李荣鑫和刘茜等的研究工作对本书的贡献!

下册附录中的弹性大变形问题改进的复变量无单元 Galerkin 方法的 Matlab 程序,是李冬明编写,王聚丰、刘超和邓亚洁整理标注的;邓亚洁帮助计算了 7.2 节和 7.9 节的数值算例;彭妙娟和邓亚洁负责本书的校对工作,特此表示感谢!

感谢我的导师黄艾香教授多年来对我和我的学生研究工作的指导和帮助!感谢黄艾香教授在国家自然科学基金项目方面的合作,以及在项目进行过程中的总体指导!感谢李开泰教授和何银年教授对本书研究工作的指导和帮助!

感谢冯伟教授和马永其副教授的多年合作,以及在每周课题组活动提出的宝贵意见和建议!

感谢钱跃达教授的多年合作以及对本书的大力支持!

感谢我的导师嵇醒教授和黄艾香教授对本书的推荐,使得本书得到国家科学技术学术著作出版基金项目的资助!感谢科学出版社赵彦超在出版基金申请过程中给予的帮助!同时感谢国家科学技术学术著作出版基金项目的各位评审专家!

感谢科学出版社李静科编辑对本书的支持以及为出版所做的辛勤工作!

本书的研究工作得到了国家自然科学基金(项目编号:10571118、10871124、11171208)和上海市教育委员会科研创新项目(重点)(项目编号:09ZZ99)资助,特此表示感谢!

限于作者水平和时间,书中难免有不妥之处,敬请批评指正。

程玉民

2015 年 5 月 8 日

目 录

前言	
第 7 章 复变量无单元 Galerkin 方法	1
7.1 势问题的复变量无单元 Galerkin 方法	1
7.1.1 势问题的复变量无单元 Galerkin 方法	1
7.1.2 算法实施流程	6
7.1.3 数值算例	7
7.2 瞬态热传导问题的复变量无单元 Galerkin 方法	10
7.2.1 瞬态热传导问题的复变量无单元 Galerkin 方法	10
7.2.2 时间积分方案	16
7.2.3 算法实施流程	18
7.2.4 数值算例	19
7.3 弹性力学的复变量无单元 Galerkin 方法	24
7.3.1 弹性力学的复变量无单元 Galerkin 方法	24
7.3.2 算法实施流程	29
7.3.3 数值算例	30
7.4 弹性动力学的复变量无单元 Galerkin 方法	39
7.4.1 弹性动力学的控制方程	39
7.4.2 弹性动力学的复变量无单元 Galerkin 方法	41
7.4.3 隐式时间积分	44
7.4.4 算法实施流程	45
7.4.5 数值算例	46
7.5 弹塑性力学的复变量无单元 Galerkin 方法	54
7.5.1 弹塑性力学的基本方程	54
7.5.2 弹塑性力学的复变量无单元 Galerkin 方法	56
7.5.3 算法实施流程	59
7.5.4 数值算例	62
7.6 黏弹性力学的复变量无单元 Galerkin 方法	70
7.6.1 黏弹性力学的基本方程	70
7.6.2 黏弹性力学的复变量无单元 Galerkin 方法	71
7.6.3 算法实施流程	75

7.6.4	数值算例	76
7.7	弹性大变形问题的复变量无单元 Galerkin 方法	87
7.7.1	弹性大变形问题的基本方程	87
7.7.2	弹性大变形问题的复变量无单元 Galerkin 方法	95
7.7.3	算法实施流程	100
7.7.4	数值算例	101
7.8	弹塑性大变形问题的复变量无单元 Galerkin 方法	108
7.8.1	弹塑性大变形问题的基本方程	108
7.8.2	弹塑性大变形问题的复变量无单元 Galerkin 方法	111
7.8.3	数值算例	115
7.9	插值型复变量无单元 Galerkin 方法	127
7.9.1	势问题的插值型复变量无单元 Galerkin 方法	128
7.9.2	数值算例	131
第 8 章	基于变分原理的复变量无网格方法	140
8.1	弹性力学的复变量无网格方法	140
8.1.1	弹性力学的复变量无网格方法	140
8.1.2	算法实施流程	149
8.1.3	数值算例	150
8.2	断裂力学的扩展的复变量无网格方法	153
8.2.1	扩展的复变量无网格方法的试函数	154
8.2.2	断裂力学的扩展的复变量无网格方法	158
8.2.3	裂纹附近节点的权函数的选取	159
8.2.4	数值算例	162
8.3	复变量无网格方法与有限元耦合法	165
8.3.1	两种数值方法耦合的界面条件	166
8.3.2	Belytschko 提出的无网格方法与有限元耦合法	167
8.3.3	Huerta 提出的无网格方法与有限元耦合法	170
8.3.4	程玉民等提出的无网格方法与有限元耦合法	172
8.3.5	数值算例	177
第 9 章	改进的复变量无单元 Galerkin 方法	182
9.1	势问题的改进的复变量无单元 Galerkin 方法	182
9.1.1	势问题的改进的复变量无单元 Galerkin 方法	183
9.1.2	数值算例	186
9.2	瞬态热传导问题的改进的复变量无单元 Galerkin 方法	194
9.2.1	瞬态热传导问题的改进的复变量无单元 Galerkin 方法	195

9.2.2	数值算例	198
9.3	对流扩散问题的改进的复变量无单元 Galerkin 方法	203
9.3.1	对流扩散问题的基本方程	204
9.3.2	对流扩散问题的改进的复变量无单元 Galerkin 方法	204
9.3.3	时间积分方案	208
9.3.4	算法实施流程	209
9.3.5	数值算例	210
9.4	弹性力学的改进的复变量无单元 Galerkin 方法	215
9.4.1	弹性力学的改进的复变量无单元 Galerkin 方法	216
9.4.2	数值算例	220
9.5	弹塑性力学的改进的复变量无单元 Galerkin 方法	227
9.5.1	弹塑性力学的改进的复变量无单元 Galerkin 方法	227
9.5.2	数值算例	231
9.6	黏弹性力学的改进的复变量无单元 Galerkin 方法	236
9.6.1	黏弹性力学的改进的复变量无单元 Galerkin 方法	237
9.6.2	数值算例	241
9.7	弹性大变形问题的改进的复变量无单元 Galerkin 方法	249
9.7.1	弹性大变形问题的改进的复变量无单元 Galerkin 方法	249
9.7.2	数值算例	255
9.8	弹塑性大变形问题的改进的复变量无单元 Galerkin 方法	259
9.8.1	弹塑性大变形问题的改进的复变量无单元 Galerkin 方法	259
9.8.2	数值算例	265
9.9	凝胶非均匀溶胀问题的改进的复变量无单元 Galerkin 方法	271
9.9.1	聚合物凝胶的平衡理论	273
9.9.2	聚合物凝胶非均匀溶胀问题的 Galerkin 弱形式	276
9.9.3	聚合物凝胶非均匀溶胀的改进的复变量无单元 Galerkin 方法	279
9.9.4	数值算例	282
第 10 章	复变量重构核粒子法	291
10.1	势问题的复变量重构核粒子法	291
10.1.1	势问题的复变量重构核粒子法	292
10.1.2	数值算例	295
10.2	瞬态热传导问题的复变量重构核粒子法	302
10.2.1	瞬态热传导问题的复变量重构核粒子法	302
10.2.2	数值算例	306
10.3	变系数对流扩散问题的复变量重构核粒子法	310

10.3.1	变系数对流扩散问题的基本方程	310
10.3.2	变系数对流扩散问题的复变量重构核粒子法	310
10.3.3	数值算例	313
10.4	弹性力学的复变量重构核粒子法	318
10.4.1	弹性力学的复变量重构核粒子法	318
10.4.2	数值算例	324
10.4.3	几点讨论	327
10.5	弹性动力学的复变量重构核粒子法	329
10.5.1	弹性动力学的复变量重构核粒子法	329
10.5.2	数值算例	334
10.6	弹塑性力学的复变量重构核粒子法	341
10.6.1	弹塑性力学的复变量重构核粒子法	341
10.6.2	数值算例	345
10.6.3	关于计算精度的讨论	350
10.7	Kirchhoff 板弯曲问题的复变量重构核粒子法	352
10.7.1	Kirchhoff 薄板弯曲理论	352
10.7.2	Kirchhoff 薄板弯曲问题的复变量重构核粒子法	359
10.7.3	算法实施流程	364
10.7.4	收敛性和误差分析	365
10.7.5	数值算例	370
10.8	带源参数的热传导反问题的复变量重构核粒子法	379
10.8.1	热传导反问题的基本方程	379
10.8.2	数值算例	384
10.9	复变量重构核粒子法与有限元耦合法	394
10.9.1	场量耦合试函数	395
10.9.2	势问题的复变量重构核粒子法与有限元耦合法	398
10.9.3	瞬态热传导问题的复变量重构核粒子法与有限元耦合法	402
10.9.4	弹性力学的复变量重构核粒子法与有限元耦合法	407
10.9.5	收敛性和误差分析	411
10.9.6	数值算例	417
附录	弹性大变形问题的改进的复变量无单元 Galerkin 方法的 Matlab 程序	432
参考文献		455
索引		459

第 7 章 复变量无单元 Galerkin 方法

相对于标量函数逼近的移动最小二乘法 (Moving least-squares approximation, 简称 MLS)^[1] 而言, 上册第 2 章建立的复变量移动最小二乘法 (Complex variable moving least-squares approximation, 简称 CVMLS) 是关于向量函数的逼近. 复变量移动最小二乘法的优点是采用一维基函数建立二维问题的逼近函数, 这样其试函数中所含的待定系数减少了, 从而使得计算这些待定系数所需要的节点数减少了, 所以基于复变量移动最小二乘法形成的二维问题的无网格方法在整个求解域内可取较少的节点, 从而提高计算效率.

基于上册第 2 章的复变量移动最小二乘法建立逼近函数, 采用 Galerkin 弱形式建立求解方程, 本章建立势问题、瞬态热传导、弹性力学、弹性动力学、弹塑性力学、黏弹性力学、弹性大变形和弹塑性大变形等问题的复变量无单元 Galerkin 方法 (Complex variable element-free Galerkin method, 简称 CVEFG). 另外, 基于上册第 2 章的复变量移动最小二乘插值法建立插值函数, 采用 Galerkin 弱形式建立求解方程, 本章还建立了势问题的插值型复变量无单元 Galerkin 方法 (Interpolating complex variable element-free Galerkin method, 简称 ICVEFG).

数值算例表明, 在相同节点分布时, 复变量无单元 Galerkin 方法比无单元 Galerkin 方法 (Element-free Galerkin method, 简称 EFG)^[1] 具有更高精度; 在相近精度时, 复变量无单元 Galerkin 方法比无单元 Galerkin 方法布置节点少, 从而提高了计算效率.

7.1 势问题的复变量无单元 Galerkin 方法

本节基于复变量移动最小二乘法建立逼近函数, 采用势问题的 Galerkin 弱形式建立求解方程, 采用 Lagrange 乘子法施加本质边界条件, 建立了势问题的复变量无单元 Galerkin 方法.

7.1.1 势问题的复变量无单元 Galerkin 方法

本节以二维 Poisson 方程为例来建立势问题的复变量无单元 Galerkin 方法. Poisson 方程为

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad (7.1.1)$$

边界条件为

$$u(\mathbf{x}) = \bar{u}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (7.1.2)$$

$$q(\mathbf{x}) = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = \bar{q}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_q, \quad (7.1.3)$$

其中 Ω 为问题所在的域, Γ 为 Ω 的边界, 且有 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$, $\Gamma_u \cap \Gamma_q = \emptyset$; $u(\mathbf{x})$ 为场点位势, $b(\mathbf{x})$ 为给定的源函数; \bar{u} 为本质边界 Γ_u 上的已知位势, \bar{q} 为自然边界 Γ_q 上的已知位势梯度, \mathbf{n} 为边界 Γ 的外法线方向.

利用 Lagrange 乘子法施加本质边界条件时, 式 (7.1.1)–式 (7.1.3) 的等效积分弱形式为

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}u)^T \cdot (\mathbf{L}u) d\Omega - \int_{\Omega} \delta u \cdot b d\Omega - \int_{\Gamma_q} \delta u \cdot \bar{q} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta \lambda \cdot (u - \bar{u}) d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \lambda \cdot \delta u d\Gamma = 0, \quad (7.1.4)$$

其中

$$\mathbf{L}(\cdot) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} (\cdot). \quad (7.1.5)$$

将求解域离散为 M 个节点 z_I , $I = 1, 2, \dots, M$. 域内任意场点 $z = x_1 + ix_2$ 的位势 $u(z)$ 可以近似地用影响域覆盖点 z 的节点 $z_I (I = 1, 2, \dots, n)$ 的位势 $u(z_I)$ 来逼近. 因为 $u(z)$ 和 $u(z_I)$ 都为标量, 由复变量移动最小二乘法的逼近函数表达式 (2.2.167), 域内任意场点 $z = x_1 + ix_2$ 的位势可表示为

$$u(z) = \text{Re}[\Phi(z)\mathbf{u}] = \sum_{I=1}^n \text{Re}[\Phi_I(z)]u(z_I) = \tilde{\Phi}(z)\mathbf{u}, \quad (7.1.6)$$

其中 n 为影响域覆盖场点 z 的节点数,

$$\Phi(z) = (\Phi_1(z), \Phi_2(z), \dots, \Phi_n(z)) = \mathbf{p}^T(z)\mathbf{A}^{-1}(z)\mathbf{B}(z); \quad (7.1.7)$$

$\mathbf{p}^T(z) = (p_i)$ 为基函数, 线性基和二次基分别为

$$\mathbf{p}^T = (p_1, p_2) = (1, z), \quad (7.1.8)$$

$$\mathbf{p}^T = (p_1, p_2, p_3) = (1, z, z^2); \quad (7.1.9)$$

其他矩阵和向量为

$$\mathbf{A}(z) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(z) \mathbf{P}, \quad (7.1.10)$$

$$\mathbf{B}(z) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(z), \quad (7.1.11)$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1(z_1) & p_2(z_1) & \cdots & p_m(z_1) \\ p_1(z_2) & p_2(z_2) & \cdots & p_m(z_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(z_n) & p_2(z_n) & \cdots & p_m(z_n) \end{bmatrix}, \quad (7.1.12)$$

$$W(z) = \begin{bmatrix} w(z - z_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w(z - z_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w(z - z_n) \end{bmatrix}, \quad (7.1.13)$$

$$\tilde{\Phi}(z) = (\tilde{\Phi}_1(z), \tilde{\Phi}_2(z), \cdots, \tilde{\Phi}_n(z)), \quad (7.1.14)$$

$$\tilde{\Phi}_I(z) = \operatorname{Re}[\Phi_I(z)], \quad (7.1.15)$$

$$\mathbf{u} = (u(z_1), u(z_2), \cdots, u(z_n))^T, \quad (7.1.16)$$

m 为基函数 p_i 的个数, $w(z - z_I)$ 为点 z_I 处的权函数.

由式 (7.1.5) 和式 (7.1.6) 可得

$$Lu(z) = L \left[\sum_{I=1}^n \operatorname{Re}[\Phi_I(z)] u(z_I) \right] = \sum_{I=1}^n \left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{array} \right] \operatorname{Re}[\Phi_I(z)] u(z_I) = \mathbf{B}(z) \mathbf{u}, \quad (7.1.17)$$

其中

$$\mathbf{B}(z) = (\mathbf{B}_1(z), \mathbf{B}_2(z), \cdots, \mathbf{B}_n(z)), \quad (7.1.18)$$

$$\mathbf{B}_I(z) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}[\Phi_{I,1}(z)] \\ \operatorname{Re}[\Phi_{I,2}(z)] \end{bmatrix}. \quad (7.1.19)$$

注意本节以下公式中的 $\mathbf{B}(z)$ 的表达式均为式 (7.1.18).

设 $\lambda(z)$ 是边界 Γ_u 上任意点的 Lagrange 乘子, 为了获得离散系统方程, λ 同样需要用边界 Γ_u 上节点 z_I 的 Lagrange 乘子 λ_I 插值得到. 本节使用 Lagrange 插值, 即有

$$\lambda(z) = \sum_{I=1}^k N_I(s) \lambda_I = \mathbf{N} \boldsymbol{\lambda}, \quad z \in \Gamma_u, \quad (7.1.20)$$

其中

$$\mathbf{N} = (N_1, N_2, \cdots, N_k), \quad (7.1.21)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k), \quad (7.1.22)$$

k 是边界 Γ_u 上用于插值的节点数; $N_I(s)$ 是插值函数, 本节采用分段线性插值, 如对 $s \in (s_I, s_{I+1})$, 有

$$N_I(s) = \frac{s - s_{I+1}}{s_I - s_{I+1}}, \quad (7.1.23)$$

$$N_{I+1}(s) = \frac{s - s_I}{s_{I+1} - s_I}, \quad (7.1.24)$$

s 表示沿边界 Γ_u 的弧长.

由式 (7.1.23) 和式 (7.1.24) 得

$$\delta\lambda(z) = \sum_{I=1}^k N_I(s)\delta\lambda_I = \delta\lambda^T \cdot \mathbf{N}^T. \quad (7.1.25)$$

将式 (7.1.6)、(7.1.17)、(7.1.20) 和式 (7.1.25) 代入式 (7.1.4) 得到

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta[\mathbf{B}(z)\mathbf{u}]^T \cdot [\mathbf{B}(z)\mathbf{u}]d\Omega - \int_{\Omega} \delta[\tilde{\Phi}(z)\mathbf{u}] \cdot b d\Omega - \int_{\Gamma_q} \delta[\tilde{\Phi}(z)\mathbf{u}] \cdot \bar{q}d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_u} (\delta\lambda^T \cdot \mathbf{N}^T)[\tilde{\Phi}(z)\mathbf{u} - \bar{u}]d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}\lambda\delta[\tilde{\Phi}(z)\mathbf{u}]d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (7.1.26)$$

这里 \mathbf{u} 与式 (7.1.16) 形式相同, 且 $n = M$.

以下分别对式 (7.1.26) 的各项积分进行讨论.

式 (7.1.26) 的第一项积分

$$\int_{\Omega} \delta[\mathbf{B}(z)\mathbf{u}]^T \cdot [\mathbf{B}(z)\mathbf{u}]d\Omega = \delta\mathbf{u}^T \cdot \left[\int_{\Omega} \mathbf{B}^T(z)\mathbf{B}(z)d\Omega \right] \cdot \mathbf{u} = \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}, \quad (7.1.27)$$

其中

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T(z)\mathbf{B}(z)d\Omega, \quad (7.1.28)$$

$\mathbf{K} = [K_{IJ}]$ 为 $M \times M$ 矩阵,

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{B}_J d\Omega. \quad (7.1.29)$$

式 (7.1.26) 的第二项积分

$$\int_{\Omega} \delta[\tilde{\Phi}(z)\mathbf{u}] \cdot b d\Omega = \delta\mathbf{u}^T \cdot \int_{\Omega} \tilde{\Phi}^T b d\Omega = \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F}^{(1)}, \quad (7.1.30)$$

其中 $\mathbf{F}^{(1)}$ 为给定源函数产生的列向量,

$$\mathbf{F}^{(1)} = (f^{(1)}(z_1), f^{(1)}(z_2), \dots, f^{(1)}(z_M))^T, \quad (7.1.31)$$

$$f^{(1)}(z_I) = \int_{\Omega} \tilde{\Phi}_I(z) b d\Omega. \quad (7.1.32)$$

式 (7.1.26) 的第三项积分

$$\int_{\Gamma_q} \delta[\tilde{\Phi}(z)\mathbf{u}] \cdot \bar{q} d\Gamma = \delta\mathbf{u}^T \cdot \int_{\Gamma_q} \tilde{\Phi}^T \bar{q} d\Gamma = \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F}^{(2)}, \quad (7.1.33)$$

其中 $\mathbf{F}^{(2)}$ 为给定位势梯度 \bar{q} 产生的列向量,

$$\mathbf{F}^{(2)} = (f^{(2)}(z_1), f^{(2)}(z_2), \dots, f^{(2)}(z_M))^T, \quad (7.1.34)$$

$$f^{(2)}(z_I) = \int_{\Gamma_q} \tilde{\Phi}_I(z) \bar{q} d\Gamma. \quad (7.1.35)$$

式 (7.1.26) 的第四项积分

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_u} (\delta\boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{N}^T)[\tilde{\Phi}(z)\mathbf{u} - \bar{u}] d\Gamma &= \delta\boldsymbol{\lambda}^T \cdot \left[\int_{\Gamma_u} \mathbf{N}^T \tilde{\Phi}(z) d\Gamma \right] \cdot \mathbf{u} - \delta\boldsymbol{\lambda}^T \cdot \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}^T \bar{u} d\Gamma \\ &= \delta\boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{u} - \delta\boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (7.1.36)$$

其中

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_k)^T, \quad (7.1.37)$$

$$r_I = \int_{\Gamma_u} N_I \bar{u} d\Gamma, \quad (7.1.38)$$

$$\mathbf{G} = \int_{\Gamma_u} \tilde{\Phi}^T(z) \mathbf{N} d\Gamma, \quad (7.1.39)$$

$\mathbf{G} = [G_{IJ}]$ 是 $M \times k$ 矩阵,

$$G_{IJ} = \int_{\Gamma_u} \tilde{\Phi}_I N_J d\Gamma. \quad (7.1.40)$$

式 (7.1.26) 的第五项积分

$$\int_{\Gamma_u} (\mathbf{N}\boldsymbol{\lambda}) \cdot \delta[\tilde{\Phi}(z)\mathbf{u}] d\Gamma = \delta\mathbf{u}^T \cdot \left[\int_{\Gamma_u} \tilde{\Phi}^T(z) \mathbf{N} d\Gamma \right] \cdot \boldsymbol{\lambda} = \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\lambda}. \quad (7.1.41)$$

将式 (7.1.27)、(7.1.30)、(7.1.33)、(7.1.36) 和式 (7.1.41) 代入式 (7.1.26), 经整理得到

$$\delta\mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{G}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{F}) + \delta\boldsymbol{\lambda}^T \cdot (\mathbf{G}^T\mathbf{u} - \mathbf{r}) = 0, \quad (7.1.42)$$

其中

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(1)} + \mathbf{F}^{(2)}. \quad (7.1.43)$$

由 $\delta\mathbf{u}^T$ 和 $\delta\boldsymbol{\lambda}^T$ 的任意性, 可得最终的线性方程组为

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{G}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (7.1.44)$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{u} - \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (7.1.45)$$

式 (7.1.44) 和式 (7.1.45) 可用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}. \quad (7.1.46)$$

以上即为势问题的复变量无单元 Galerkin 方法.

7.1.2 算法实施流程

利用复变量无单元 Galerkin 方法求解问题, 首先需要在求解域内布置节点, 这些节点的权函数影响域必须覆盖整个求解域. 矩阵元素采用 Gauss 积分进行计算. 为了进行数值积分, 需布置背景积分网格, 背景积分网格只是为数值积分所用. 为了方便采用 Gauss 积分公式进行数值积分, 通常都将背景积分网格布置成规则网格.

需要强调的是, 这里的规则网格与节点及其影响域无关, 只是为了进行数值积分, 与有限元法中的网格有本质区别. 有限元法中的网格除了要进行数值积分外, 更重要的是在单元上构造形函数, 因此其数值解与网格有着密切关系, 有时会因为网格剖分不合适而得不到解或者降低解的精度. 而无网格方法中的背景积分网格与形函数无关, 网格可大可小, 形状也没有严格限制, 只要方便数值积分即可.

对于上述建立的势问题的复变量无单元 Galerkin 方法, 其数值实现流程如下:

- (1) 输入已知参数, 包括问题域的几何属性和材料常数.
- (2) 对于给定的二维势问题, 确定坐标系, 在求解域 Ω 及其边界 Γ 上布置 M 个节点 $z_I, I = 1, 2, \dots, M$, 并对其进行规则编号, 建立节点信息.
- (3) 形成用于数值积分的背景积分网格.
- (4) 建立 Γ_u 和 Γ_q 边界积分网格信息.
- (5) 根据域内和边界背景网格生成 Gauss 积分点并计算相应 Gauss 积分点信息 (包括 Gauss 积分点的坐标、积分权系数和相应的 Jacobi 行列式 $|J|$).
- (6) 形成矩阵 \mathbf{K} 和荷载列向量 \mathbf{F} 的第一项 $\mathbf{F}^{(1)}$.

A. 对每一个背景积分网格进行循环:

- a) 对背景网格内的 Gauss 积分点进行循环;
- b) 若 Gauss 积分点在 Ω 内, 则进行步骤 c) \rightarrow 步骤 f), 否则直接进行步骤 f);
- c) 确定影响域覆盖当前 Gauss 积分点 z_Q 的节点;
- d) 分别计算影响域覆盖 Gauss 积分点 z_Q 的所有节点 z_I 处的形函数 $\Phi_I(z_Q)$ 及其导数 $\Phi_{I,j}(z_Q)$ 的值;
- e) 根据式 (7.1.28) 和式 (7.1.32) 分别计算当前 Gauss 积分点 z_Q 对矩

阵 K 和列向量 $F^{(1)}$ 元素的贡献;

f) 结束 Gauss 积分点的循环.

B. 结束背景积分网格的循环.

(7) 边界 Γ_u 上积分: 过程与步骤 (6) 类似, 分别根据式 (7.1.39) 和式 (7.1.37) 计算矩阵 G 和列向量 r .

(8) 边界 Γ_q 上积分: 过程与步骤 (6) 类似, 根据式 (7.1.35) 计算荷载列向量 F 的第二项 $F^{(2)}$.

(9) 将步骤 (6) 计算所得的列向量 $F^{(1)}$ 与步骤 (8) 计算所得的列向量 $F^{(2)}$ 相加, 得到最后的列向量 F .

(10) 求解代数方程组 (7.1.46), 得到 M 个节点势函数的数值解 u .

(11) 输出节点位势.

7.1.3 数值算例

下面利用本节建立的势问题的复变量无单元 Galerkin 方法, 分别对基于 Laplace 方程和 Poisson 方程的势问题进行数值求解.

1. 矩形域上的 Laplace 方程

设有一个矩形域上的稳态温度场, 其控制方程为

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} = 0, \quad x_1 \in [0, 5], x_2 \in [0, 10]; \quad (7.1.47)$$

边界条件为

$$T(x_1, 0) = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq 5, \quad (7.1.48)$$

$$T(0, x_2) = 0, \quad 0 \leq x_2 \leq 10, \quad (7.1.49)$$

$$T(x_1, 10) = 100 \sin(\pi x_1 / 10), \quad 0 \leq x_1 \leq 5, \quad (7.1.50)$$

$$\frac{\partial T(5, x_2)}{\partial x_2} = 0, \quad 0 \leq x_2 \leq 10. \quad (7.1.51)$$

该温度场问题的解析解为

$$T(x_1, x_2) = \frac{100 \sin(\pi x_1 / 10) \operatorname{sh}(\pi x_2 / 10)}{\operatorname{sh} \pi}. \quad (7.1.52)$$

利用本节建立的势问题的复变量无单元 Galerkin 方法进行计算. 如图 7.1.1 所示, 在矩形域 Ω 内均匀布置了 9×17 个节点. 采用线性基函数来构造形函数, 权函数为三次样条函数, 权函数影响域比例参数 d_{\max} 取为 2.0.

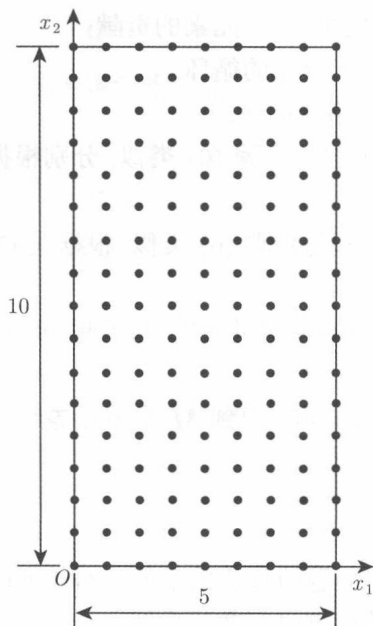


图 7.1.1 节点分布

为了验证本节方法的有效性,给出了矩形域内 $x_1 = 2.5$ 处温度的解析解和本节复变量无单元 Galerkin 方法所得的数值解,如图 7.1.2 所示.可以看出,用本节方法所得的数值解与解析解吻合很好.

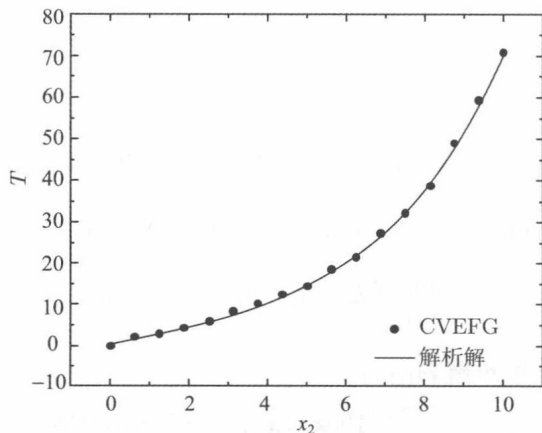


图 7.1.2 $x_1 = 2.5$ 处温度的数值解

另外,在相同节点分布情况下,对采用复变量无单元 Galerkin 方法和无单元 Galerkin 方法得到的 $x_2 = 5.0$ 处节点温度数值解的相对误差进行了比较,如表 7.1.1 所示.可以看出,本节建立的复变量无单元 Galerkin 方法比无单元 Galerkin 方法具