极值图论

极值图论

（第一册）

貝拉·波罗巴斯　著
施容華　譯
孔慶新　校

青海省数学学会
青海师院数学系　印

一九八三年十月

译者的话

Béla Bollobás是近年来国际图论界的知名专家，他的《Extremal Graph Theory》（极值图论）一书，内容丰富，理论系统性强，方法上也有许多独到之处，是一本较好的图论专著，本书中译本的出版，想必会引起国内图论研究者的广泛兴趣，特别对研究图论极值问题的学者将会有参考价值。

本书的翻译得到中国科学院系统科学研究所田丰同志、青海省数学学会、青海师院数学系的热情鼓励和大力支持，特表示衷心感谢！

原书排版印刷有不少错误，其中重要者以"译注"形式予以更正，有些则直接改正了过来，并未加以说明，希阅读时注意。

由于译者业务、外语水平有限，译文错误之处在所难免，望读者批评指正。

施容华

孔庆新

1983.8

目　录

第0章　基本概念

出现在本书中的一些概念含有集论或拓扑的味道．虽然我们所研究的构造的大部分是有限的，但所讨论的每个问题离开集论和拓扑学却难以进行．因此我们力图避免修饰性记号而尽力保持定义的通俗性．当然，有时我们也需要将记号稍加拓广．许多读者或许对图论的基本概念不太熟悉，为了使我们之间能有共同语言，还要定义一系列必要的概念．为帮助读者熟悉这些定义，我们也将述及少数的结论．这些结论并非是一目了然的．考虑到读者阅读方便起见，某些概念在它们应用较多的章节里将重新给以阐述．

除非特别声明，每个集都是有限集．一个集 X 的元素的个数以 $|X|$ 表示．如果 $|Y|=r$ 则说 Y 是一个 r－集．若进一步有 $Y\subset X$，则 Y 是 X 的一个 r－子集．集 X 的 r－子集的全体作成的集合用 $X^{(r)}$ 表示，亦即 $X^{(r)}=\{Y: Y\subset X, |Y|^{(*)}=r\}$．一个图 G 就是不相交集的序对 (V, E)，这里 $E\subset V^{(2)}$，$V\neq\phi$．集 V 称作 G 的顶点集，E 是 G 的边(**)集．边 $\{x, y\}$ 定义成顶点 x 与顶点 y 相连接，且以 xy 表之．这时，我们也说顶点 x 与 y 是邻接顶点，顶点 x 与边 xy 相关联．具有共同端点的两条不同的边称作相邻的边．两个图的顶点集之间若是存在保持邻接关系的一一对应，则称此二图是同构的．通常我们对同构图是不加区别的，除非对顶点和边都需要加以标定时才予以区别．为方便计，当 G 和 H 是同构图时我们记作 $G\cong H$，或更简记为 $G=H$．

(*)　原文为 $|X|=r$．—译注．

(**)　也译为线、棱．本书中我们常用的是线、有时也用边．

一个图G的顶点集表作$V(G)$，边集记作$E(G)$，在不致于引起混淆的情况下简记为V和E。此外，如果字母G未加特别说明而出现的话，它就代表任何一个图。我们常用$x\in G$代替$x\in V(G)$来表示x是G的一个顶点。G中顶点的个数称作G的阶，以$|G|$表示。阶为1的图称作平凡图。G中边的数目称作G的边数，记作$e(G)$。用符号G^n表示任一个阶为n的图。类似地，$G(n,m)$表示任一个阶为n、边数为m的图。n阶图的集合是$\mathcal{G}^n$。

如果$V'\subset V$，$E'\subset E$，则说图$G'=(V',E')$是图$G=(V,E)$的一个子图，这时记作$G'\subset G$。若$V'=V$，则说G'是G的一个因子。当$W\subset V$时，则图$(W,E\cap W^{(2)})$称作由W导出的图或生成的子图，记作$G[W]$。如果$H\subset G$，且$H=G[V(H)]$则称H是G的一个导出子图。

与一个顶点$x\in G$邻接的顶点的集合记作$\Gamma(x)$，把$d(x)=|\Gamma(x)|$称作顶点x的度数。倘若对该点在哪个图中的度数不清楚，则把那个图的符号作为相应符号的下标而标明。因而，当H是G的一个导出子图，$x\in H$时，则应有

$$\Gamma_H(x)=\Gamma_G(x)\cap V(H)=\Gamma(x)\cap V(H)\text{ 且 }d_H(x)=|\Gamma_H(x)|$$

当$W\subset V(G)$时我们令$\Gamma(W)=\cup\{\Gamma(x):x\in W\}$。图$G$中顶点的最小度用$\delta(G)$表示，最大度记作$\Delta(G)$。如$\delta(G)=\Delta(G)=k$，即$G$的每个顶点都是$k$度，则称$G$是度数为$k$的正则图或$k$—正则图。3—正则图也称作立方体。

若$E'\subset E(G)$，则$G-E'$表示从G中移去属于E'的边而得出的图，亦即$G-E'=(V(G),E(G)-E')$。类似地，若$W\subset V(G)$，则$G-W$是从G中移去W中的顶点而得到的图。当然，如果一个顶点$x\in W$被移去了，则与x相连接的各条边也就被去掉了，即若$G=(V,E)$，则$G-W=(V-W,E\cap(V-W)^{(2)})$。

当$W=\{x\}$时，我们则用$G-x$代替$G-\{x\}$．与此类似，我们也可以用$G-xy$代替$G-\{xy\}$，$xy\in E$．如$H\subset G$，则用$G-H$代替$G-V(H)$．当$xy\in V^{(2)}-E$时，则由G添加边xy所得的图记作$G+xy=(V,E\cup\{xy\})$．对于顶点的添加我们也有类似的符号。

若$V(G)=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则把$(d(x_i))_1^n$叫做$G$的一个度数序列．通常我们把顶点按一定的顺序排列使其度数序列是单调增加的或单调减少的．显然

$$\sum_1^n d(x_i)=2e(G)$$

因此如果$(d_i)_1^n$是图G的一个度数序列，则

$$\sum_1^n d_i\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2) \qquad (0.1)$$

设x,y是G的不必相异的两个顶点．一个$x-y$的途径W是指点和边的一个交错序列，比如说$x_1,\alpha_1,x_2,\alpha_2,\cdots,x_l,\alpha_l,x_{l+1}$，这里$x_1=x$，$x_{l+1}=y$，而$\alpha_i=x_ix_{i+1}\in E(G)$，$1\leq i\leq l$．通常记作$W=x_1x_2\cdots x_{l+1}$，因为由这种表达式已可清晰地知道序列中的边了．途径W的长是l．W的顶点集是$V(W)=\{x_i:1\leq i\leq l+1\}$，$W$的边集是$E(W)=\{\alpha_i:1\leq i\leq l\}$．若途径中的所有边是互不相同的，则称此途径是一条链；如果所有顶点也是不相同的，则称作一条道路或x_1-x_{l+1}道路．两端点重合的链是一条回路．如果$l\geq 3$，$x_1=x_{l+1}$，除x_1外其余点均不相同，则称这样的途径是一个圈。

圈通常记作$x_1x_2\cdots x_l$（用来代替$x_1x_2\cdots x_lx_1$）．道路P及圈C与图$(V(P),E(P))$，$(V(C),E(C))$是一回事。特别注意，$x_1x_2\cdots x_{l+1}$和$x_{l+1}x_l\cdots x_1$表示同一条道路．故一条$x-y$道路也就是$y-x$道路．类似地，$x_1x_2\cdots x_l$和$x_2x_1\cdots$

$x_l x_1$ 表示同一条圈。形如 $x_1 x_j$（$3 \le j \le l-1$）的一条边是此圈的对角线。我们以 P^l 记长为 l 的道路，以 C^l 记长为 l 的圈。我们称 C^3 为一个三角形，C^4 是一个四边形，C^5 是一个五边形，等等。视圈之长为奇（或偶）数，我们称该圈为奇圈或偶圈）。

如果 $P = x_1 x_2 \cdots x_{l+1}$ 是一条道路，$u = x_i$，$v = x_j$，$1 \le i < j \le l+1$，则 P 上 $u-v$ 的一段也是 $u-v$ 道路 $x_i x_{i+1} \cdots x_{j-1} x_j$。我们用 uPv 表示这一段。若 P 是一条 $x-y$ 道路，Q 是一条 $y-z$ 道路，则 $xPyQz$ 是把这两条道路连在一起而得到的 $x-z$ 途径。类似地我们也能把几段道路串联起来而得到一条途径或一条道路，表之以 $x_1 P_1 x_2 P_2 x_3 \cdots P_l x_{l+1}$，这里 $x_i x_{i+1} \in V(P_i)$，$i = 1, 2, \cdots, l$。

若 $x \in X$，$y \in Y$，则一条 $x-y$ 道路也称作 $X-Y$ 道路与此相仿，$\alpha \in E(G)$ 是 $X-Y$ 的一条边，如果 $\alpha = xy$，$x \in X$，$y \in Y$。$X-Y$ 的边数用 $e(X, Y)$ 表示，如 $X = \{x\}$，通常记作 $e(x, Y)$。

如果一个图中每一对顶点间都有道路相连接，则说此图是连通的。图的最大连通子图是图的一个分支。不含圈的连通图是树，没有圈的图是森林（一个非循环图）。显然，森林是每个分支都是树的图。阶为 n 的树有 $n-1$ 条边，阶为 n 的森林若有 c 个分支则有 $n-c$ 条边。

两个顶点 x 和 y 之间的距离用 $d(x, y)$ 表示，它是 $x-y$ 道路的最小长度。如果不存在 $x-y$ 道路，亦即 x 和 y 属于不同的分支，则令 $d(x, y) = \infty$。图 G 的直径定义作

$$\operatorname{diam} G = \max\{d(x, y) : x, y \in G\}$$

与此有关的一个概念是 G 的半径：$\operatorname{rad} G = \min_x \max_y d(x, y)$。$G$ 的围长是指 G 中圈的最小长度，记作 $g(G)$，G 的周长 ——

$c(G)$，则是G中圈的最大长度。如果G中不含圈，通常则不定义其围长和周长。当然也可令$g(G)=c(G)=\infty$。

这里必须提请读者注意，我们说的最大（maximum）和极大（maximal）有着不同的含义。"极大"是指有序集中的一个极大元素，在不作特别声明时，有序集的序是由包含关系给定的。而"最大"是指具有最大度量的一个元素。因此P是图G的一条极大道路是指没有任何别的道路真正包含着P，而Q是G的一条最大道路是指G中不含其长度大于Q的道路R（亦即对G中每一条道路R均有$e(R)\le e(Q)$）。

图G称为有顶点集V_1、V_2，…，V_r的r—部图，如果$V=V(G)$是V_1、V_2、…，V_r的并，而G的每条边都是连接着属于不同顶点集合中的两点。2—部图常称作双图。我们用$G_r(n_1,n_2,\cdots,n_r)$记任一r—部图，它的第i个集合恰好有n_i个顶点。

一个集X的用c_1，c_2，…，c_k种颜色的k—着色或简称着色是一个函数$c: X\to\{c_1,c_2,\cdots,c_k\}$。我们通常考虑的是图的顶点或边的着色。所谓正常着色是指相邻接的元素有着不同的颜色（也就是说，在点着色中相邻顶点颜色不同，在边着色中相邻边颜色不同）。如果G有一个（正常）k—顶点着色，则说G是k—可着色的。G的色数是$\chi(G)=\min\{\chi: G$是k—可着色的$\}$。当$\chi(G)=r$时，称G是r—色图。易知若G是极小r—色图，则

$$\delta(G)\ge r-1 \qquad (0.2)$$

这是因为，若$x\in G$、$d(x)\le r-2$、则$G-x$的一个（正常）$(r-1)$—着色一定可以扩充为G的一个（正常）$(r-1)$—着色。特别地

若$\chi(G)\ge r$，则存在$H\subset G$、$\delta(H)\ge r-1$ (0.3)

注意，G的顶点的一个（正常）r—着色恰好可以把G看作一个r—部图：第i个顶点集是有第i种颜色的顶点的集合。这就是为什么常常把顶点集当作颜色集的缘由。我们并不去考虑r—部图和r—可着色性的等价性，而平行地使用它们。因为当我们研究一个r—部图时，通常是确定了顶点集的；而一个r—可着色图的同色集则几乎从来没有给出过。

易于看出（见[E16]），每个图G含有一个双图$B=G_2(n_1,n_2)$，它的边数至少是G的边数之半：

$$e(B)\geq\frac{1}{2}e(G) \qquad (0.4)$$

事实上，令B是G的一个极大二分子图。我们可以假定B是由G中的集合V_1、V_2生成的二分子图，这里$V_1\cup V_2=V$。若$x\in V_1$，则x与V_2中邻接的顶点的个数至少和与V_1的邻接顶点的个数一样多。如其不然，则取$V_1-\{x\}$和$V_2\cup\{x\}$作为给出的二分子图的顶点集。故由$d_B(x)\geq\frac{1}{2}d(x)$便得出（0.4）式。

读者如有兴趣的话可以证明：若$e(G)>0$，则存在一个子图$B=G_2(n_1,n_2)\subset G$，使$n_1+n_2=n$，$|n_1-n_2|\leq 1$，$e(B)>\frac{1}{2}e(G)$。特别要指出的是，在（0.4）式中可以要求严格的不等式。显然，对r—部图也可证明类似的结果。这类命题的最弱的一个是：对某$G_r(n_1,n_2,\cdots,n_r)\subset G$，有$e(G_r(n_1,n_2,\cdots,n_r))\geq(1-\frac{1}{r})e(G)$。

在很多情况下，我们发现考虑下列图类是方便的。设$d\geq1$，且令

$$\mathcal{D}_d=\{G:|G|\geq d,\ e(G)\geq d|G|-\binom{d+1}{2}+1\}$$

顺便指出，若$G\in\mathcal{D}_d$，则$|G|>d$。∵$|G|=d$时，有

$$\binom{d}{2}\geq e|G|\geq d^2-\binom{d+1}{2}+1=\binom{d}{2}+1,\ 矛盾。$$

此外，若$G\in\mathcal{D}_d$，则

G含有一子图H，使$\delta(H) \geq d+1$ (0.5)

为看清这一点只要注意到：当$\delta(G) \leq d$，比如说$d(x) \leq d$时，则$G-x \in \mathscr{D}_d$，这时$|G|>d$。重复这个过程，我们必然可得一个最小度数至少是$d+1$的子图；否则，我们将得出一个图$G_0 \in \mathscr{D}_d$，而$|G_0|=d$。

有很多与图有关的构造问题值得研究。一个超图或集系H是指集V和V的子集族Σ。当然$x \in V$是H的一个顶点，$S \subset \Sigma$是超图H的一条边。如果$\Sigma \subset V^{(r)}$，则称H是一个r—图或r—一致超图。

根据定义，一个图是不含环的，环指的是把顶点和自身相连接的边；也不含多重边，即两个不同的顶点不能由多于一条的边相连接。倘若容许多重边出现，则用多重图这个名词。连接顶点x，y的边数称作边xy的重数。有时多重图中也允许有环（当然也可以是多重环），习惯上这种图叫伪图。若$G=(V, E^*)$是一多重图，H是G的基本图，其顶点集是V，两个顶点在H中相邻当且仅当它们在G中是相邻的，也可以把G看作是在H图中把某些边确定为多重边所得的多重图。

一个有向图D是指集$V=V(D)$以及V中不同元素间有序对的集合$\vec{E}=\vec{E}(D)$。当然，称V是顶点集，$\vec{E}$是有向边集。有向边$(x, y) \in \vec{E}$记作$\vec{xy}$。一个定向图是不含有有向边的对称对的有向图，亦即在定向图中，$\vec{xy}$和$\vec{yx}$至多有一个是其边。换言之，定向图$\vec{G}$是把图G中每条边确定方向后得到的图，或说$\vec{G}$是给G定向后而得出的图，或简说为$\vec{G}$是G的一个定向。最后，我们给出无限图的定义：$G=(V, E)$是一个无限图是指V是一个无限集，$E \subset V^{(2)}$，$V \cap E = \phi$。为了强调所讨论的主要对象是图，我们常称其为简单图。而上述的许多概念都立即可以推移到有向图中去。但要注意的是一条x_0—x_k道路对

应于一条x_0-x_k有向道路，即就是在道路$x_0x_1\cdots x_k$中每个x_ix_{i+1}是从x_i到x_{i+1}的有向边．于是$d(x,y)$是有向道路$x-y$的最小长度。

设$G=(V,E)$，$G'=(V',E')$都是图，映射ϕ：$V\to V'$称为G到G'的同态是指从$xy\in E$得出$\phi(x)\phi(y)\in E'$。若ϕ也是一一对应则是G到G'的一个嵌入：显然，ϕ给出了一个G和G'的子图（记作$\phi(G)$）之间的一个同构。

如果G是一个伪图，即其中是允许有环的多重图。若在G中存在连接$x\in G$，$y\in G$（可以$x=y$）的边，G'是从$G-xy$依下述方法得到的图：添加一个新的顶点，使之与x和y邻接，这时称G'是G的初等剖分（也即是为得到G'，用长度为2的一条道路代替一条边）。如果H能够从G经过一系列的初等剖分而得到，则称H是G的一个剖分图或H是一个拓扑G，记作$H=TG$。注意、符号TG与G^n，$G(n,m)$是类似的，因为它表示G的任何一个剖分图．事实上，在本书中我们只是当G不含邻接于不同顶点的度数为2的一个顶点时才用到符号TG．当两个多重图具有同构的剖分图时，称此二多重图是同胚的．显然两个多重图是同胚的当且仅当与之相应的拓扑空间是同胚的（参看第五章第3节）．

假设H是G的连通子图，在图$G-H$中添加一个新的顶点x_H，同时对每一个$y\in G-H$的点，当G含有$y-H$的一条边时，就将x_H和y连接起来．这样得到的图记作G/H并称为G收缩H（到一个顶点）。若$E(H)=xy$，则$G/xy=G/H$称作G的一个初等收缩．如果L能够从G通过一系列的收缩（连通子图）而得出，则称L是G的一个收缩，记作$G>L$．如果L是G的子图的一个收缩，则说L是G的子收缩，记为$G\succ L$．

图$G=(V,E)$的补图是图$\overline{G}=(V,V^{(2)}-E)$．$n$阶完全图

记作 K^n，其 n 个顶点中每两个都相邻。换言之，K^n 是阶为 n，边数为 $\binom{n}{2}$ 的图，即 $K^n=G(n,\binom{n}{2})$。顺便指出 $K^3=C^3$ 是三角形，K^4 是完全四边形，等等。我们选用记号 K^n 而不用较常见的 K_n，是因为我们将用有下标的大写字母（G_k、H_ℓ、K_p 等等）表示特定的图。这样 K_p 可以标记一个给定的完全子图。K^n 的补图是 n 阶的空图或零图：$E^n=\overline{K^n}=G(n,0)$。

$G_r(n_1,n_2,\cdots,n_r)$ 的唯一极大图用 $K_r(n_1,n_2,\cdots,n_r)$ 表示。它有 r 个顶点集，第 i 个顶点集有 n_i 个顶点，属于不同集的任两个顶点间都有边相连。显然

$$e(K_r(n_1,n_2,\cdots,n_r))=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}n_in_j$$

如果 $r=2$，则下标 r 可以省略，n_1、n_2 可以写成上标，例如 $K_2(3,4)=K(3,4)=K^{3,4}$。树 $K^{1,p}$ 是阶为 $p+1$ 的星。G 的完全子图的最大阶数是 G 的团数，用 $cl(G)$ 表示之。

图 G_1 和 G_2 的并记作 $G_1\cup G_2$。若

$$(V(G_1)\cup E(G_1))\cap(V(G_2)\cup E(G_2))=\phi \qquad (0.6)$$

则

$$V(G_1\cup G_2)=V(G_1)\cup V(G_2)$$

$$E(G_1\cup G_2)=E(G_1)\cup E(G_2)$$

倘若（0.6）式不成立，则我们可以对 $V(G_i)\cup E(G_i)$ 的元素添加附标以保证（0.6）成立，然后同前面一样定义并图。有时我们说 $G_1\cup G_2$ 是 G_1 和 G_2 的并以示强调，例如 $K^3\cup K^4$ 就是 $K(3,4)$ 的补图。当 G_1 和 G_2 是某个给定图的子图时，情况比较特殊，这时很自然地定义作

$V(G_1{}^{(*)}\cup G_2)=V(G_1)\cup V(G_2)$，$E(G_1\cup G_2)=E(G_1)\cup E(G_2)$

在正文中出现这种情况时是很显然的。

（*）原文为 G_2。—— 译注。

几个图的并可以类似地定义. 把同一个图拿来 k 个作不相交的并, 其结果用 kG 表示. 因而 $kK^1=kE^1=E^k$.

两个图 G_1 和 G_2 的联 G_1+G_2 是这样一个图: 在 $G_1\cup G_2$ 中将 G_1 的每一个顶点和 G_2 的每一个顶点相连接. 于是 $E^3+E^4=K(3,4)$. 几个图的联可类似定义:

$$E^{n_1}+E^{n_2}+\cdots+E^{n_r}=K_r(n_1,n_2,\cdots,n_r)$$

在许多图的构造中, 把某个参数取作素数是方便的. 为了把这样的构造推广到参数所有的允许值上, 则要用到关于素数分布的若干结论. Bertrand 猜想是, 当 $n>3$ 时, 在 n 和 $2n-2$ 之间一定有素数. 对 $n<3000000$, Bertrand 验证了这一猜想, 而 Tchebychev 于1850年给出了证明 (参见[HW1, P.373]). 此外, 两个邻近的素数之比趋向于1. 事实上, 存在 $0<\eta<1$ 和 $c_\eta>0$ 使对每个 $n\geq 2$ 在 n 和 $n+c_\eta n^\eta$ 之间有素数存在. 这些都已得到证明: Hoheisel [H27] ($\eta=1-3300^{-1}+\varepsilon$), Ingham [I1] ($\eta=\frac{5}{8}+\varepsilon$), Montgomery [M32] ($\eta=\frac{3}{5}+\varepsilon$) 和 Huxley [H27] ($\eta=\frac{7}{12}+\varepsilon$), 这里 $\varepsilon>0$ 是任意的. 我们则只用到当 n 充分大时有

在 $n-\frac{1}{10}n^{3/2}$ 和 n 之间存在素数　　　　(0.7)

设 q 是一个素数幂, 则在 q 阶的域上存在一个有限投影平面 $PG(2,q)$. 我们用基域元素的三元组 (a,b,c) 和 $[a,b,c]$ 分别表示平面上的点与线——每个三元组至少有一个非零元素. 若 $\lambda\neq 0$, 则 (a,b,c) 和 $(\lambda a,\lambda b,\lambda c)$ 表示同一个点; 类似地, $[a,b,c]$ 和 $[\lambda a,\lambda b,\lambda c]$ 表示同一条线. 点 (x,y,z) 在线 $[a,b,c]$ 上当且仅当 $ax+by+cz=0$.

第一章 连通性

一个图所具有的最基本的性质大概可以说是连通性吧。在相当精确的程度上，有各种各样的函数可用来度量连通图的连通性。在第一节我们要引进某些这样的函数并建立起最基本的性质。本章中第一个重要的定理——Menger定理在第二节中论述。Menger的基本定理建立于1937年，它是几乎所有有关连通性问题的证明的基础。

度量一个图G的连通性的最敏感的函数是局部点—连通函数$K(x,y)$和局部线—连通函数$\lambda(x,y)$，它们定义在$V(G)^{(2)}$上，其中第一个函数是顶点的最少数目——去掉它们x和y就不连通了；而第二个函数是线的最少数目——去掉它们x和y也就不连通了。本章的大部篇幅用于研究这些函数的最大值和最小值。我们特别感兴趣的是这些局部连通性的最小值，也就是（点）连通度$K(G)=\min K(x,y)$和线连通度$\lambda(G)=\min\lambda(x,y)$，一个图称为$K$—连通图如果它的连通度至少是$K$；一个图称为$K$—线—连通图，如果它的线连通度至少是$K$。

图的连通性的理论的主要目的是建立K—连通图和K—线连通图各种性质的定理。为不致于过分枯燥，我们在很多场合只对K—连通图进行讨论。如果一个图具有K—连通因子，当然这个图本身也是K—连通的。于是乎我们就去注意这样一类K—连通图——它不含真K—连通因子。此种图称作极小K—连通图。

关于2—连通图、3—连通图的构造已经令人满意地搞清楚了。在§3我们将提供这些结果，这节的主要定理是关于2—连通图和3—连通图的Tutte的特征定理。这一漂亮的定理

近乎于给出了所有3—连通图的一个实用的目录.

毫不奇怪，当$K\geq 4$时，有关最小K—连通图的结构，人们知之还甚少。尽管如此，还是有一些深刻的结果，而其大部分是属于Mader的，这些结果对每个$K\geq 3$都成立。我们在§4将给出这些结果.

我们要指出K—连通图还有另一个自然的子集，对它的成员的了解十分有助于搞清K—连通图的特征. 一个图G称作临界的K—连通图，如果G是K—连通图，而对任何$x\in G$，$G-x$则不再是K—连通图了. 显然，每个K—连通图含有一个临界的K—连通子图. 关于临界K—连通图的结构，现在人们所知道的比极小K—连通图还要少. 关于这些我们在正文中不再加以讨论，而在练习中给出了某些结果.

在§5我们给出关于$\overline{K}(G)=\max K(x.y)$和$\overline{\lambda}(G)=\max\lambda(x,y)$的一些已知的结果. 令人惊异的是，在这一领域内，通常存在于点—连通和线—连通之间的类似关系消失了，与$\overline{K}(G)$有关的问题似乎更难些. 还没有解决的问题是n阶图G，$\overline{K}(G)=K$，它的最大线数是多少？（问题36）. 甚至，当K较大时，其估计式也是很可怜的.

尽管有关极小K—连通图的情形了解较多，然而关于K—连通图的l—连通因子（$l<k$）的问题却知之甚少. 让我们在这里指出§6中所提问题的特殊情况：从一个n阶的K—连通图中至少可以去掉多少条线，且使所得出的图是（$K-1$）—连通图.

1. 基本性质

一个图$G=(V\cdot E)$称作连通的，如果图中任两个点都有边路相连接. 否则则是不连通图. 最大连通子图称为图的分支.

含有顶点$x\in G$的分支记作$C(x)$。倘若需要强调这个分支是图G的一个分支，则用$C(x,G)$代替$C(x)$。显然一个图就是其各不相交的分支的并。图的最小的分支当然是孤立的点和孤立的线。孤立点是度数为0的点；孤立线是连接度数为1的两个点的边。

设V_1，V_2是图G顶点集V的子集，若$V=V_1\cup V_2$，而$S=V_1\cap V_2$是V_1和V_2的真子集，$|S|=K$，在V_1-S中的任何一个顶点均不与V_2-S中的顶点相邻，则我们说(V_1,V_2)是用分割集S得出的一个K—分割，或称S的点分割G。若$X\subset V_1-S$，$Y\subset V_2-S$，则说S分割X，Y。若$X=\{x\}$，$Y=\{y\}$，也说S分割顶点x和y。显然，S是连通图G的一个分割集当且仅当$G-S$是不连通的。

图G的连通度（或点—连通度）$K(G)$是从G中移去某些点后使之成为不连通图或平凡图的点的最少数目。换言之：

$$K(G)=min\{|G|-1,\ K: G\text{有一个}K-\text{分割}\}$$
$$=min\{|G|-1,\ |S|: S\subset V\text{分割}G\}$$

可以类似地定义线—连通度$\lambda(G)$，仅仅把点的移去换成线的移去即可。一个图是K—连通的（或K—线连通的），若有$K(G)\geqslant K$（$\lambda(G)\geqslant\lambda$）。

据连通性定义，1—连通和1—线连通是一致的。显见，每个K—连通图（K—线—连通）至少应有$K+1$个顶点，而K^{K+1}是仅有的阶为$K+1$的K—连通图（K—线—连通图）。此外从定义可得：若G是个任意图，$x\in G$，$e\in E(G)$，则

$$K(G)-1\leqslant K(G-x)\leqslant K(G) \qquad (1)$$
$$\lambda(G)-1\leqslant\lambda(G-e)\leqslant\lambda(G) \qquad (2)$$

容易验证，最小度、线—连通度，点—连通度之间适合下列不等式：