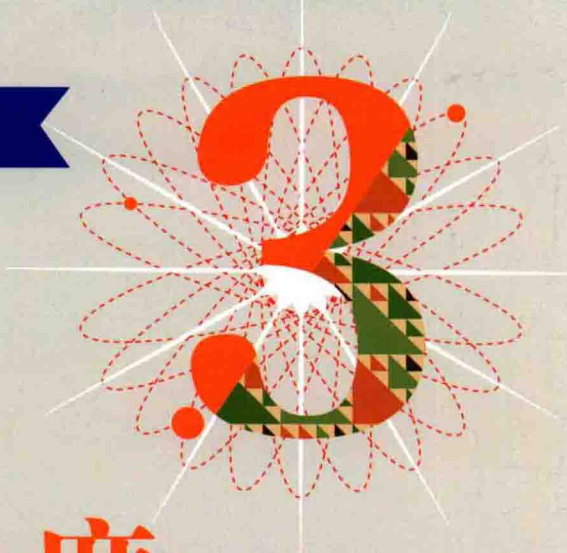
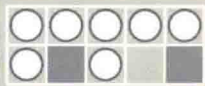
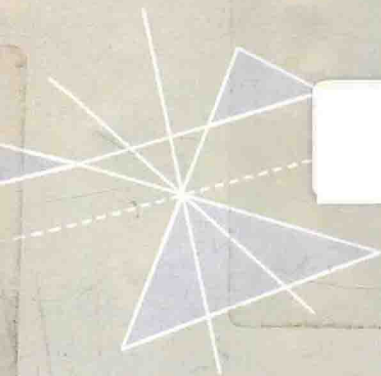


学生数学思维方法丛书



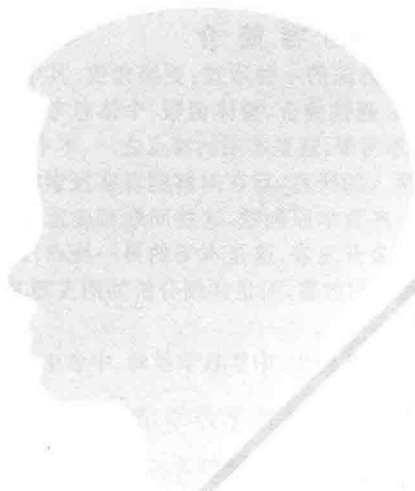
更换角度

冯跃峰 著



中国科学技术大学出版社

中学生数学思维方法丛书



3 更换角度

冯跃峰 著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书介绍了数学思维方法的一种形式:更换角度.其中许多内容都是本书首次提出的.比如,通性叠合、整体函数、个体思考、子集思考、间距思考、逆转程序、差异思考等,这是本书的特点之一.本书首次对“更换角度”进行比较完整而深入的研究,旨在对解题者在探索解题方法方面有所帮助.书中选用了一些数学原创题,这些问题难度适中而又生动有趣,有些问题还是第一次公开发表,这是本书的另一特点.此外,书中对每一个问题,并不是直接给出解答,而是详细分析如何发现其解法,这是本书的又一特点.

本书适合高等院校数学系师生、中学数学教师、中学生和数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

更换角度/冯跃峰著.—合肥:中国科学技术大学出版社,2016.4
(中学生数学思维方法丛书)

ISBN 978-7-312-03874-7

I.更… II.冯… III.中学数学课—教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 023091 号

- 出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
<http://press.ustc.edu.cn>
<http://shop109383220.taobao.com>
- 印刷 安徽省瑞隆印务有限公司
- 发行 中国科学技术大学出版社
- 经销 全国新华书店
- 开本 880 mm×1230 mm 1/32
- 印张 10.125
- 字数 264 千
- 版次 2016 年 4 月第 1 版
- 印次 2016 年 4 月第 1 次印刷
- 定价 28.00 元

序

问题是数学的心脏,学数学离不开解题.我国著名数学家华罗庚教授曾说过:如果你读一本数学书,却不做书中的习题,那就犹如入宝山而空手归.因此,如何解题,也就成为了一个千古话题.

国外曾流传着这样一则有趣的故事,说的是当时数学在欧几里得的推动下,逐渐成为人们生活中的一个时髦话题(这与当今社会截然相反),以至于托勒密一世也想赶这一时髦,学点数学.虽然托勒密一世见多识广,但在学数学上却很吃力.一天,他向欧几里得请教数学问题,听了半天,还是云里雾里不知所云,便忍不住向欧几里得要求道:“你能不能把问题讲得简单点呢?”欧几里得笑着回答:“很抱歉,数学无王者之路.”欧几里得的意思是说,要想学好数学,就必须扎扎实实打好基础,没有捷径可走.后来人们常用这一故事讥讽那些凡事都想投机取巧之人.但从另一个角度想,托勒密一世的要求也未必过分,难道数学就只能“神来之笔”,不能让其思路来得更自然一些吗?

记得我少年时期上学,每逢学期初发新书的那个时刻是最令我兴奋的,书一到手,总是迫不及待地看看书中有哪些新的内容,一方面是受好奇心的驱使,另一方面也是想测试一下自己,看能不能不用老师教也能读懂书中的内容.但每每都是失望而终:尽管书中介绍的知识都弄明白了,书中的例题也读懂了,但一做书中的练习题,却还



是不会。为此，我曾非常苦恼，却又万思不得其解。后来上了大学，更是对课堂中老师那些“神来之笔”惊叹不已，严密的逻辑推理常常令我折服。但我未能理解的是，为什么会想到这么做呢？

20世纪中叶，美国数学教育家 G. Polya 的数学名著《怎样解题》风靡全球，该书使我受益匪浅。这并不是说，我从书中学到了“怎样解题”，而是它引发了我对数学思维方法的思考。

实际上，数学解题是一项系统工程，有许许多多的因素影响它的成败。本质的因素有知识、方法（指狭义的方法，即解决问题所使用的具体方法）、能力（指基本能力，即计算能力、推理能力、抽象能力、概括能力等）、经验等，由此构成解题基础；非本质的因素有兴趣、爱好、态度、习惯、情绪、意志、体质等，由此构成解题的主观状态；此外，还受时空、环境、工具的约束，这些构成了解题的客观条件。但是，具有扎实的解题基础，且有较好的客观条件，主观上也做了相应的努力，解题也不一定能获得成功。这是因为，数学中真正标准的、可以程序化的问题（像解一元二次方程）是很少的。解题中，要想把问题中的条件与结论沟通起来，光有雄厚的知识、灵活的方法和成功的解题经验是不够的。为了判断利用什么知识，选用什么方法，就必须对问题进行解剖、识别，对各种信息进行筛选、加工和组装，以创造利用知识、方法和经验的条件。这种复杂的、创造性的分析过程就是数学思维过程。这一过程能否顺利进行，取决于思维方法是否正确。因此，正确的思维方法亦是影响解题成败的重要因素之一。

经验不止一次地告诉我们：知识不足还可以补充，方法不够也可以积累，但若不善思考，即使再有知识和方法，不懂得如何运用它们解决问题，也是枉然。与此相反，掌握了正确的思维方法，知识就不再是孤立的，方法也不再是呆板的，它们都建立了有血有肉的联系，组成了生机勃勃的知识方法体系，数学思维活动也就充满了活力，得到了更完美的发挥与体现。

G. Polya 曾指出,解题的价值不是答案本身,而在于弄清“是怎样想到这个解法的”,“是什么促使你这样想、这样做的”.这实际上都属于数学思维方法的范畴.所谓数学思维方法,就是在基本数学观念系统作用下进行思维活动的心理过程.简单地说,数学思维方法就是找出已有的数学知识和新遇的数学问题之间联系的一种分析、探索方法.在一般情况下,问题与知识的联系并非是显然的,即使有时能在问题中看到某些知识的“影子”,但毕竟不是知识的原形,或是披上了“外衣”,或是减少了条件,或是改变了结构,从而没有现成的知识、方法可用,这就是我在学生时代“为什么知识都明白了,例题也看懂了,还是不会做习题”的原因.为了利用有关的知识和方法解题,就必须创造一定的“条件”,这种创造条件的认识、探索过程,就是数学思维方法作用的过程.

但是,在当前数学解题教学中,由于“高考”指挥棒的影响,教师往往只注重学生对知识方法掌握的熟练程度,不少教师片面地强调基本知识和解决问题的具体方法的重要性,忽视思维方法方面的训练,造成学生解决一般问题的困难.为了克服这一困难,各种各样的、非本质的、庞杂零乱的具体解题技巧统统被视为规律,成为教师谆谆告诫的教学重点,学生解题也就试图通过记忆、模仿来补偿思维能力的不足,利用胡猜乱碰代替有根据、有目的的探索.这不仅不能提高学生的解题能力,而且对于系统数学知识的学习,对于数学思维结构的健康发展都是不利的.

数学思维方法通常又表现为一种解题的思维模式.例如, G. Polya就在《怎样解题》中列出了一张著名的解题表.容许我们大胆断言,任何一种解题模式均不可能囊括人们在解题过程中表现出来的各种思维特征,诸如观察、识别、猜想、尝试、回忆、比较、直觉、顿悟、联想、类比、归纳、演绎、想象、反例、一般化、特殊化等.这些思维特征充满解题过程中的各个环节,要想用一个模式来概括,那就像用



数以千计的思维元件来构造一个复杂而庞大的解题机器.这在理论上也许是可行的,但在实际应用中却很不方便,难以被人们接受.更何况数学问题形形色色,任何一个模式都未必能适用所有的数学问题.因此,究竟如何解题,其核心内容还是学会如何思考.有鉴于此,笔者想到写这样一套关于数学思维方法的丛书.

本丛书也不可能穷尽所有的数学思维方法,只是选用一些典型的思维方法为代表做些介绍.这些方法,或是作者原创发现,或是作者从一个全新的角度对其进行了较为深入的分析与阐述.

囿于水平,书中观点可能片面武断,错误难免,敬请读者不吝指正.

冯跃峰

2015年1月

目 录

序	(i)
1 整体思考	(001)
1.1 整体估计	(001)
1.2 通性叠合	(021)
1.3 整体性质	(042)
1.4 整体函数	(064)
习题 1	(075)
习题 1 解答	(081)
2 局部思考	(111)
2.1 个体思考	(111)
2.2 子集思考	(130)
2.3 间距思考	(149)
习题 2	(167)
习题 2 解答	(172)
3 反面思考	(192)
3.1 考察条件的反面	(192)
3.2 考察目标的反面	(201)
3.3 反面剔除	(217)
习题 3	(222)
习题 3 解答	(223)



4 逆向思考	(230)
4.1 逆推	(230)
4.2 逆命题	(245)
4.3 逆转程序	(255)
习题 4	(259)
习题 4 解答	(261)
5 差异思考	(271)
5.1 数值差异	(271)
5.2 元素差异	(276)
5.3 结构差异	(281)
习题 5	(298)
习题 5 解答	(301)



1

整体思考

研究问题的前提,是对研究对象进行观察,而观察的前提,则是选择一定的观察角度.在数学解题中,由题给条件的引导,自然会生成一个观察相关对象的角度,但有时候,从这个角度考虑问题,很难使问题获解.此时,我们需要更换角度,从另一个角度重新审视我们面临的问题,由此发现问题隐含的特点,使问题获解.

本章介绍更换角度的一种方式:整体思考.所谓整体思考,就是从全局的角度观察事物,将题中所有对象视为一个整体,从总体上把握问题的特征.

常见的整体思考方式有:整体估计、通性叠合、整体性质、整体函数等.



1.1

整体估计

假定我们需要研究某个对象的取值或变化范围,我们可将其放入若干个同类对象中,从整体上估计这若干个对象的取值或变化范围,由此得到所需要的结论.

其中,与所研究对象同类的若干对象有时候是题中已经给定的一些对象,而有时候却需要我们去构造与所研究对象同类的若干对象.

例 1 手表上的时针和分针从某次重合开始到下一次重合为止，共经历了多长时间？

分析与解 这是一个相当简单的问题，列方程就可解决。但它有一个非常漂亮的无需动笔就可得出答案而且不超过小学生知识水平的解法。其基本想法是：如果仅考察一个这样的时间段（时针和分针从某次重合开始到下一次重合），则难以计算其经历的时间是多长；若考察多个这样的时间段，从整体上计算这些时间段的总体时间，则问题便迎刃而解。

多少个这样的时间段凑成的整体才易于计算总体时间呢？这显然是 12 个小时后，此时时针与分针又重合在一起，其间分针比时针多跑 11 圈。

又分针每追上时针一次则多跑一圈，从而分针共追上时针 11 次，于是每次经历的时间是 $\frac{12}{11}$ 小时。

尽管上述解答非常简单，但其技巧性还是很强的，关键是要自行构造若干个“同类对象”。

例 2 用 100 种颜色对 100×100 方格棋盘的每个单位小方格染色，使每一个格染其中一种颜色，且每种颜色染 100 个格。试证：棋盘中存在一行或一列，其中至少含有 10 种不同颜色的方格。（2006 年北欧数学奥林匹克试题）

分析与证明 基本想法是采用整体估计，因为每行每列都有一个颜色种数，可将各行各列的颜色种数相加，然后证明这 200 个数的和不少于 2 000 即可。

设第 i 行颜色种数为 R_i ，第 j 列颜色种数为 C_j ($1 \leq i, j \leq 100$)，令

$$S = (R_1 + R_2 + \cdots + R_{100}) + (C_1 + C_2 + \cdots + C_{100}).$$

现在考虑如何利用条件“每种颜色染 100 个格”。为此，考察任意

一种颜色 i , 需要考虑 i 色在哪些格中出现.

对 $i = 1, 2, \dots, 100$, 记颜色 i 在 r_i 个行中出现, 在 c_i 个列中出现.

对给定的 i , 颜色 i 只出现在 r_i 个行中, 又只出现在 c_i 个列中, 从而颜色 i 只出现在 r_i 个行与 c_i 个列交叉的 $r_i c_i$ 个格中(其他行和列全是无色格, 见图 1.1), 于是

$$r_i c_i \geq 100 \quad (i = 1, 2, \dots, 100).$$

图 1.1

现在建立 S 与 $r_i c_i$ 的联系. 注意 S 的定义, 可知 S 是各颜色出现的行次数与列次数的总和, 于是

$$S = (r_1 + r_2 + \dots + r_{100}) + (c_1 + c_2 + \dots + c_{100}).$$

由于

$$r_i + c_i \geq 2 \sqrt{r_i c_i} \geq 2 \sqrt{100} = 20,$$

所以 $S \geq 100 \cdot 20 = 2000$, 即

$$(R_1 + R_2 + \dots + R_{100}) + (C_1 + C_2 + \dots + C_{100}) \geq 2000.$$

从而在 $R_1, R_2, \dots, R_{100}, C_1, C_2, \dots, C_{100}$ 中, 至少有一个不小于 10, 命题获证.

例 3 上下放着两个同心圆盘, 每个圆盘都被划分为 n 个全等的扇形. 上面一个圆盘的每个扇形内分别填上实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 下面一个圆盘的各个扇形分别填上实数 b_1, b_2, \dots, b_n , 且满足 $a_1 + a_2$

$+ \dots + a_n > 0, b_1 + b_2 + \dots + b_n > 0$. 求证: 可以旋转扇形到适当的位置, 使得上下重合的两个扇形所填的数的积的和为正.

分析与证明 解题目标是要证明有那样的“适当位置”, 从个体上看, 一下难以发现哪个位置才是合适位置, 但我们可从整体上考虑所有可能的位置. 每一个位置都对应一个“和”, 从总体上估计这些和即可. 于是, 令

$$S_1 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n,$$

$$S_2 = a_1 b_2 + a_2 b_3 + \dots + a_n b_1,$$

$\dots,$

$$S_n = a_1 b_n + a_2 b_1 + \dots + a_n b_{n-1},$$

则

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + \dots + S_n = a_1 \sum_{i=1}^n b_i + a_2 \sum_{i=1}^n b_i + \dots + a_n \sum_{i=1}^n b_i \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i > 0, \end{aligned}$$

所以至少有一个 $S_i > 0$, 命题获证.

例 4 将一张纸的一面划分为 3 个区域, 分别染上 3 种不同的颜色, 每个区域染一种颜色, 然后将纸的另一面任意划分为 3 个区域. 求证: 可以将这一面的 3 个区域分别染上这 3 种颜色, 每个区域染一种颜色, 使得这张纸上至少有三分之一的部分两面染的颜色相同. (2007 年拉脱维亚数学奥林匹克决赛第三轮试题)

分析与证明 虽然我们不能判断另一面如何染色才能合乎要求, 但可以从整体的角度考虑另一面所有可能的染色方式, 证明其中有一种染色方式合乎要求. 这只需对每一种染色方法, 计算两面同色的区域面积, 证明其中有一种染色方式, 使“两面同色的区域面积” S_i (第 i 种染色方式中“两面同色的区域面积”) 不少于整个纸面积的三分之一.

由于各个区域的划分并不确定,从而很难从个体上计算每个染色方式中“两面同色的区域面积” S_i 是多少.但从整体上,我们可以计算所有染色方式中“两面同色的区域面积”的总和 $S = S_1 + S_2 + \dots + S_t$ (假设共有 t 种染色方式).

先考虑共有多少种不同的染色方法.设已经染上颜色的一面的3个区域分别为 A, B, C ,另一面的3个区域分别为 a, b, c .考察区域 a 的染色,有3种方法, b 染与 a 不同的颜色,有2种方法,余下 c 只有一种染色方法,从而另一面的3个区域有6种染色方法.

设第 i 种染色方式中“两面同色的区域面积”为 S_i ($i = 1, 2, \dots, 6$),令

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_6.$$

利用整体估计,我们只需证明

$$S \geq 6 \cdot \frac{1}{3} S_{\text{纸}} = 2S_{\text{纸}}.$$

用 $aA, aB, aC, bA, bB, bC, cA, cB, cC$ 分别表示两字母所代表的区域的重叠区域,考察重叠区域 aA 面积 S_{aA} 对 S 的贡献,假定 aA 两面颜色相同时共在 k 种染色方式中出现,则 S_{aA} 对 S 的贡献为 kS_{aA} .

设 aA 两面颜色相同,此时区域 a 应染与区域 A 相同的颜色,只有一种染色方法,而 b 染与 a 不同的颜色,有2种方法,余下 c 只有1种染色方法,从而 a, A 同色的染色方法有2种,这表明,区域 aA 两面同色的情形在所有染色方法中出现2次.

同样可知,其他重叠区域两面同色的情形在所有染色方法中出现2次.

于是,所有染色方法中,各重叠区域两面同色的面积和为

$$\begin{aligned} S &= 2(S_{aA} + S_{aB} + S_{aC} + S_{bA} + S_{bB} + S_{bC} + S_{cA} + S_{cB} + S_{cC}) \\ &= 2S_{\text{纸}}, \end{aligned}$$

即

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_6 = 2S_{\text{纸}},$$

所以,由平均值原理,至少有一种染色方法,使得两面颜色相同的重叠部分的面积

$$S_i \geq \frac{1}{6} \cdot 2S_{\text{纸}} = \frac{1}{3}S_{\text{纸}}.$$

综上所述,命题获证.

例 5 在 6×6 方格表中,已按某种方式填入了数 $1, 2, \dots, 36$, 每个方格填一个数. 证明:可以删去一行和一列,使剩下的 25 个数的和为偶数. (1992 年圣彼得堡数学竞赛试题)

分析与证明 因为 $S = 1 + 2 + \cdots + 36$ 为偶数,从而应使删去的数的和为偶数.

设第 i 行数的和为 a_i , 第 j 列数的和为 b_j , 而第 i 行与第 j 列交叉位置上的数为 x_{ij} . 我们只需证明:存在 i, j , 使 $a_i + b_j - x_{ij}$ 为偶数.

一个充分条件是 a_i, b_j, x_{ij} 都为偶数,以此为标准进行分类讨论.

(1) 若 a_1, a_2, \dots, a_6 及 b_1, b_2, \dots, b_6 都是偶数,那么,任取一个偶数 x_{ij} , 则 $a_i + b_j - x_{ij}$ 为偶数,去掉第 i 行与第 j 列即可.

(2) 若 a_1, a_2, \dots, a_6 及 b_1, b_2, \dots, b_6 中存在奇数,不妨设 a_1 为奇数,我们可以考虑去掉第一行.

那么,去掉哪一列呢? 假定去掉第 j 列,则要求 $a_1 + b_j - x_{1j}$ 为偶数,也就是使 $y_j = b_j - x_{1j}$ 为奇数.

是否存在合乎条件的 j 呢? 注意到 j 可取 $1, 2, 3, 4, 5, 6$, 可利用整体估计,考虑和

$$\sum_{j=1}^6 y_j = S - a_1.$$

因为 a_1 为奇数, S 为偶数,所以 $\sum_{j=1}^6 y_j = S - a_1$ 为奇数,从而必

定有一个 j , 使 y_j 为奇数, 即 $a_1 + b_j - x_{1j}$ 为偶数. 于是, 去掉第 1 行与第 j 列即可.

综上所述, 命题获证.

另证 设棋盘中第 i 行、第 j 列的数为 x_{ij} , 第 i 行各数的和为 a_i ($1 \leq i \leq 6$), 第 j 列各数的和为 b_j ($1 \leq j \leq 6$).

因为 $S = 1 + 2 + \dots + 36$ 为偶数, 从而应使删去的数的和为偶数. 我们先去掉第一行, 有以下情况:

(1) 若 a_1 为奇数, 由于 S 为偶数, 从而剩下 5×6 棋盘 M' 中各数的和为奇数. 由于 M' 有偶数列, 不能每列的和都为奇数 (否则和为偶数), 从而 M' 中必定有一列的和为奇数, 去掉这一列, 剩下各数的和为偶数, 结论成立.

(2) 若 a_1 为偶数, 由于 S 为偶数, 从而剩下 5×6 棋盘 M' 中各数的和为偶数, 这时需要去掉一个和为偶数的列, 但这样的列未必存在: 因为 M' 有偶数列, 有可能每列的和都为奇数.

对比(1)和(2), 发现: 如果去掉的是“和为奇数”的行, 则结论成立; 由对称性, 当存在“和为奇数”的列时, 结论也成立.

当所有行、列的和都为偶数时, 假定去掉第 i 行、第 j 列, 由于剩下的数为 $S - a_i - b_j + x_{ij}$, 而 S 为偶数, 于是只需 $a_i + b_j - x_{ij}$ 为偶数. 又 a_i, b_j 都是偶数, 从而只需 x_{ij} 为偶数, 取 $x_{ij} = 2$ 即可, 也就是说, 去掉“2”所在的行和列即可.

注 后面这个证明可以将原问题推广到 $n \times n$ 的方格表.

例 6 在一张无限大的棋盘上, 每个方格都填有一个实数. 给定两个平面图形, 每个图形都由有限个方格组成. 图形可沿格线平移整数格. 已知: 第一个图形 P 所在的任何位置盖住的数的和都为正. 求证: 对于第二个图形 Q , 必存在适当的位置, 使 Q 盖住的数的和也为正.

分析与证明 此题难度并不大, 但一些国际数学奥林匹克(IMO)金牌选手也没能解出它, 关键原因在于没有想到整体处理的方法.

解目标是找到图形 Q 的某个位置 Q_i , 使

$$S(Q_i) > 0,$$

其中 $S(X)$ 表示图形 X 覆盖的格中各数的和.

采用整体估计: 找若干个位置 Q_1, Q_2, \dots, Q_n , 其中 n 待定, 使

$$S(Q_1) + S(Q_2) + \dots + S(Q_n) > 0,$$

可用的条件有 $S(P_j) > 0$, 由此想到: 将 $Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n$ 的格重新组合, 构成若干个 $P_j (j=1, 2, \dots, m)$, 其中 m 待定, 使

$$Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_m.$$

设图形 P 有 m 个格 p_1, p_2, \dots, p_m , 图形 Q 有 n 个格 q_1, q_2, \dots, q_n . 平移图形 P , 使格 p_1 与格 q_1 重合, 记这时图形 P 的格 p_1, p_2, \dots, p_m 盖住的 m 个格依次为 $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1m}$.

再平移图形 P , 使格 p_1 与格 q_2 重合, 记这时图形 P 的格 p_1, p_2, \dots, p_m 盖住的 m 个格依次为 $A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2m}$.

如此下去, 最后使格 p_1 与格 q_n 重合, 记这时图形 P 的格 p_1, p_2, \dots, p_m 盖住的 m 个格依次为 $A_{n1}, A_{n2}, \dots, A_{nm}$.

考察格 $A_{11}, A_{21}, \dots, A_{n1}$, 它们都是第一个图形的格 p_1 在平移过程中盖住的格. 而 p_1 依次与 q_1, q_2, \dots, q_n 重合, 从而 $A_{11}, A_{21}, \dots, A_{n1}$ 构成图形 Q 的某个位置, 即格 p_1 的轨迹构成图形 Q 的某个位置.

同理, 由图形平移方法, 知 $A_{12}, A_{22}, \dots, A_{n2}; A_{13}, A_{23}, \dots, A_{n3}; \dots; A_{1m}, A_{2m}, \dots, A_{nm}$ 都分别构成图形 Q 的某个位置 (格 p_i 的轨迹), 于是

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (A_{i1} + A_{i2} + \dots + A_{in}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m A_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n (A_{1j} + A_{2j} + \dots + A_{mj}) > 0. \end{aligned}$$

所以, 必存在一个位置, 使 Q 盖住的数的和为正, 命题获证.