化归与归纳·类比·联想

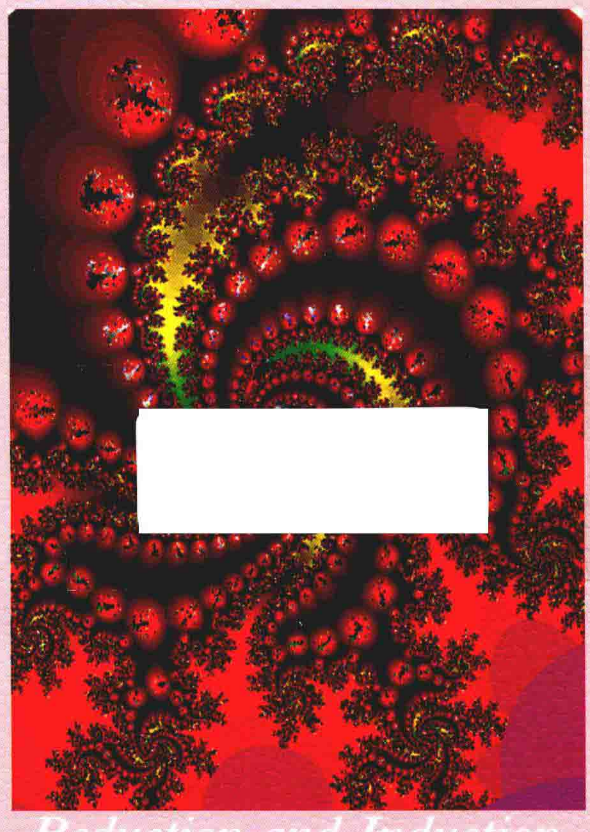
史久一 朱梧槚◎著

SCIENCE & HUMANITIES

12

（珍藏版）

数学科学文化理念传播丛书（第一辑）



Reduction and Induction
Analogy Association

大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

化归与归纳·类比·联想

史久一 朱梧槚◎著

SCIENCE & HUMANITIES

12

（珍藏版）

数学科学文化理念传播丛书（第一辑）

Reduction and Induction Analogy Association

大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

图书在版编目(CIP)数据

化归与归纳·类比·联想 ：珍藏版 / 史久一，朱梧槚著. —2版. —大连 ：大连理工大学出版社，2016.1
(数学科学文化理念传播丛书)
ISBN 978-7-5611-8755-5

Ⅰ.①化… Ⅱ.①史… ②朱… Ⅲ.①数学—研究方法 Ⅳ.①O1-3

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第120225号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路80号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 传真:0411-84701466 邮购:0411-84708943
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连住友彩色印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:188mm×260mm 印张:10.75 字数:152千字
2008年4月第1版 2016年1月第2版
2016年1月第1次印刷

责任编辑:刘新彦 王 伟 责任校对:田中原
封面设计:冀贵收

ISBN 978-7-5611-8755-5 定价:39.00元

总　序

一、数学科学的含义及其在学科分类中的定位

20 世纪 50 年代初，我曾就读于东北人民大学（现吉林大学）数学系，记得在二年级时，曾有两位老师[①]在课堂上不止一次地对大家说："数学是科学中的女王，而哲学是女王中的女王."

对于一个初涉高等学府的学子来说，很难认知其言真谛. 当时只是朦胧地认为，其言大概是指学习数学这一学科非常值得，也非常重要. 或者说与其他学科相比，数学可能是一门更加了不起的学问. 到了高年级时，开始慢慢意识到，数学与那些研究特殊的物质运动形态的学科（诸如物理、化学和生物等）相比，似乎真的不在同一个层面上. 因为数学的内容和方法不仅要渗透到其他任何一个学科中去，而且要是真的没有了数学，则就无法想象其他任何学科的存在和发展了. 后来我终于知道了这样一件事，那就是美国学者道恩斯（Douenss）教授，曾从文艺复兴时期到 20 世纪中叶所出版的浩瀚书海中，精选了 16 部名著，并称其为"改变世界的书". 在这 16 部著作中，直接运用了数学工具的著作就有 10 部，其中有 5 部是属于自然科学范畴的，它们是：

(1) 哥白尼（N. Copernicus）的《天体运行》（1543 年）；

(2) 哈维（William Harvery）的《血液循环》（1628 年）；

(3) 牛顿（I. Newton）的《自然哲学之数学原理》（1729 年）；

(4) 达尔文（E. Darwin）的《物种起源》（1859 年）；

---

① 此处的"两位老师"指的是著名数学家徐利治先生和著名数学家、计算机科学家王湘浩先生. 当年徐利治先生正为我们开设"变分法"和"数学分析方法及例题选讲"，而王湘浩先生正为我们讲授"近世代数"和"高等几何".

(5) 爱因斯坦(A. Einstein)的《相对论原理》(1916 年).

另外 5 部是属于社会科学范畴的，它们是：

(6) 潘恩(T. Paine)的《常识》(1760 年)；

(7) 史密斯(Adam Smith)的《国富论》(1776 年)；

(8) 马尔萨斯(T. R. Malthus)的《人口论》(1789 年)；

(9) 马克思(Karl Max)的《资本论》(1867 年)；

(10) 马汉(R. Thomas Mahan)的《论制海权》(1867 年)；

在道恩斯所精选的 16 部名著中，若论直接或间接地运用数学工具的，则就无一例外了. 由此可以毫不夸张地说，数学乃是一切科学的基础、工具和精髓.

至此似已充分说明了如下事实：数学不能与物理、化学、生物、经济或地理等学科在同一层面上并列. 特别是近 30 年来，先不说分支繁多的纯粹数学的发展之快，仅就顺应时代潮流而出现的计算数学、应用数学、统计数学、经济数学、生物数学、数学物理、计算物理、地质数学、计算机数学等如雨后春笋般地产生、存在和发展的事实，就已经使人们去重新思考过去那种将数学与物理、化学等学科并列在一个层面上的学科分类法的不妥之处了. 这也是多年以来，人们之所以广泛采纳“数学科学”这个名词的现实背景.

当然，我们还要进一步从数学之本质内涵上去弄明白上文所说之学科分类上所存在的问题，也只有这样才能使我们能在理性层面上对“数学科学”的含义达成共识.

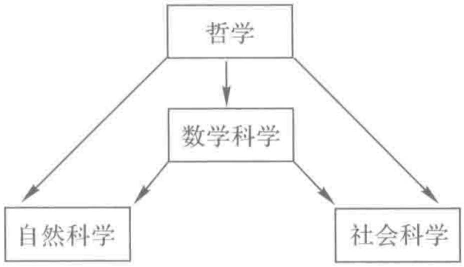
当前，数学被定义为是从量的侧面去探索和研究客观世界的一门学问. 对于数学的这样一种定义方式，目前已被学术界广泛接受. 至于有如形式主义学派将数学定义为形式系统的科学，更有如形式主义者柯亨(Cohen)视数学为一种纯粹的在纸上的符号游戏，以及数学基础之其他流派所给出之诸如此类的数学定义，可谓均已进入历史博物馆，在当今学术界，充其量只能代表极少数专家学者之个人见解. 既然大家公认数学是从量的侧面去探索和研究客观世界，而客观世界中之任何事物或对象又都是质与量的对立统一，因此没有量的侧面的事物或对象是不存在的. 如此从数学之定义或数学之本质内涵出发，就必然导致数学与客观世界中的一切事物之存在和发展密

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

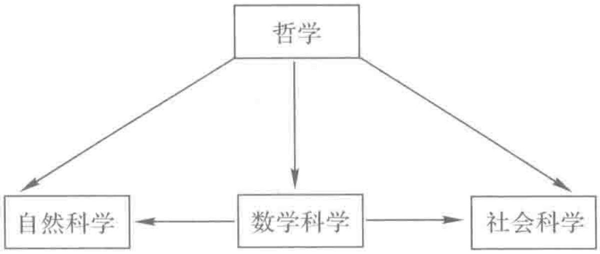
切相关.同时也决定了数学这一研究领域有其独特的普遍性、抽象性和应用上的极端广泛性,从而数学也就在更抽象的层面上与任何特殊的物质运动形式息息相关.由此可见数学与其他任何研究特殊的物质运动形态的学科相比,要高出一个层面.在此或许可以认为,这也就是本人少时所闻之“数学是科学中的女王”一语的某种肤浅的理解.

再说哲学乃是从自然、社会和思维三大领域,亦即从整个客观世界的存在及其存在方式中去探索科学世界之最普遍的规律性的学问,因而哲学是关于整个客观世界的根本性观点的体系,也是自然知识和社会知识的最高概括和总结.因此哲学又要比数学高出一个层面.

这样一来,学科分类之体系结构似应如下图所示:



如上直观示意图的最大优点是凸现了数学在科学中的女王地位,但也有矫枉过正与骤升两个层面之嫌.因此,也可将学科分类体系结构示意图改为下图所示:



如上示意图则在于明确显示了数学科学居中且与自然科学和社会科学相并列的地位,从而否定了过去那种将数学与物理、化学、生物、经济等学科相并列的病态学科分类法.至于数学在科学中之女王地位,就只能从居中角度去隐约认知了.关于学科分类体系结构之如上两个直观示意图,究竟哪一个更合理,在这里就不多议了,因为少

时耳闻之先入为主，往往会使一个人的思维方式发生偏差，因此留给本丛书的广大读者和同行专家们去置评了.

二、数学科学文化理念与文化素质原则的内涵及价值

数学有两种品格，其一是工具品格，其二是文化品格. 对于数学之工具品格而言，在此不必多议. 由于数学在应用上的极端广泛性，因而在人类社会发展中，那种挥之不去的短期效益思维模式必然导致数学之工具品格愈来愈突出和愈来愈受到重视. 特别是在实用主义观点日益强化的思潮中，更会进一步向数学纯粹工具论的观点倾斜，所以数学之工具品格是不会被人们淡忘的. 相反地，数学之另一种更为重要的文化品格，却已面临被人淡忘的境况. 至少数学之文化品格在今天已经不为广大教育工作者所重视，更不为广大受教育者所知，几乎到了只有少数数学哲学专家才有所了解的地步. 因此我们必须古识重提，并且认真议论一番数学之文化品格问题.

所谓古识重提指的是：古希腊大哲学家柏拉图(Plato)曾经创办了一所哲学学校，并在校门口张榜声明，不懂几何学的人，不要进入他的学校就读. 这并不是因为学校所设置的课程需要以几何知识基础才能学习，相反地，柏拉图哲学学校里所设置的课程都是关于社会学、政治学和伦理学一类课程，所探讨的问题也都是关于社会、政治和道德方面的问题. 因此，诸如此类的课程与论题并不需要直接以几何知识或几何定理作为其学习或研究的工具. 由此可见，柏拉图之所以要求他的弟子先行通晓几何学，绝非着眼于数学之工具品格，而是立足于数学之文化品格. 因为柏拉图深知数学之文化理念和文化素质原则的重要意义. 他充分认识到立足于数学之文化品格的数学训练，对于陶冶一个人的情操，锻炼一个人的思维能力，直至提升一个人的综合素质水平，都有非凡的功效. 所以柏拉图认为，不经过严格数学训练的人是难以深入讨论他所设置的课程和议题的.

前文指出，数学之文化品格已被人们淡忘，那么上述柏拉图立足于数学之文化品格的高智慧故事，是否也被人们彻底淡忘甚或摒弃了呢？这倒并非如此. 在当今社会中，仍有高智慧的有识之士，在某

些高等学府的教学计划中，深入贯彻上述柏拉图的高智慧古识. 列举两个典型事例如下：

例 1，大家知道，从事律师职业的人在英国社会中颇受尊重. 据悉，英国律师在大学里要修毕多门高等数学课程，这既不是因为英国的法律条文一定要用微积分去计算，也不是因为英国的法律课程要以高深的数学知识为基础，而只是出于这样一种认识，那就是只有通过严格的数学训练，才能使之具有坚定不移而又客观公正的品格，并使之形成一种严格而精确的思维习惯，从而对他取得事业的成功大有益助. 这就是说，他们充分认识到了数学的学习与训练，绝非实用主义的单纯传授知识，而深知数学之文化理念和文化素质原则，在造就一流人才中的决定性作用.

例 2，闻名世界的美国西点军校建校将近两个世纪，培养了大批高级军事指挥员，许多美国名将也毕业于西点军校. 在军校的教学计划中，学员们除了要选修一些在实战中能发挥重要作用的数学课程(如运筹学、优化技术和可靠性方法等)之外，规定学员还要必修多门与实战不能直接挂钩的高深的数学课. 据我所知，本丛书主编徐利治先生多年前访美时，西点军校研究生院曾两次邀请他去做“数学方法论”方面的讲演. 西点军校之所以要学员们必修这些数学课程，当然也是立足于数学之文化品格. 也就是说，他们充分认识到，只有经过严格的数学训练，才能使学员们在军事行动中，能把那种特殊的活力与高度的灵活性互相结合起来，才能使学员们具有把握军事行动的能力和适应性，从而为他们驰骋于疆场打下坚实的基础.

然而总体来说，如上述及的学生或学员，当他们后来真正成为哲学大师、著名律师或运筹帷幄的将帅时，早已把学生时代所学到的那些非实用性的数学知识忘得一干二净了. 但那种铭刻于头脑中的数学精神和数学文化理念，却会长期地在他们的事业中发挥着重要作用. 亦就是说，他们当年所受到的数学训练，一直会在他们的生存方式和思维方式中潜在地起着根本性的作用，并且受用终身. 这就是数学之文化品格、文化理念与文化素质原则之深远意义和至高的价值所在.

三、《数学科学文化理念传播丛书》出版的意义与价值

有现象表明，教育界和学术界的某些思维方式正在深陷纯粹实用主义的泥潭，而且急功近利、短平快的病态心理正在病入膏肓. 因此，推出一套旨在倡导和重视数学之文化品格、文化理念和文化素质的丛书，一定会在扫除纯粹实用主义和诊治急功近利病态心理的过程中起到一定的作用，这就是出版本丛书的意义和价值所在.

那么究竟有些什么现象足以说明纯粹实用主义思想已经很严重了呢？如果要详细地回答这一问题，至少可以写出一本小册子来. 在此只能举例一二，点到为止.

现在计算机专业的大学一、二年级学生，普遍不愿意学习逻辑演算与集合论课程，认为相关内容与计算机专业没有什么用. 那么我们的教育管理部门和相关专业人士又是如何认知的呢？据我所知，南京大学早年不仅要给计算机专业本科生开设这两门课程，而且还要开设递归论和模型论课程. 然而随着思维模式的不断转移，不仅递归论和模型论早已停开，而且逻辑演算与集合论课程的学时数也在逐步缩减. 现在国内坚持开设这两门课的高校已经很少了，大部分高校只在离散数学课程中，给学生讲很少一点逻辑演算与集合论知识. 其实，相关知识对于培养计算机专业的高科技人才来说是至关重要的，即使不谈这是最起码的专业文化素养，难道不明白我们所学之程序设计语言是靠逻辑设计出来的？而且柯特(E. P. Codd)博士创立关系数据库，以及许华兹(J. T. Schwartz)教授开发的集合论程序设计语言 SETL，可谓全都依靠数理逻辑与集合论知识的积累. 但却很少有专业教师能从历史的角度并依此为例去教育学生，甚至还有极个别的专家教授，竟然主张把“计算机科学理论”这门硕士研究生学位课取消，认为这门课相对于毕业后去公司就业的学生太空洞，这真是令人瞠目结舌. 特别是对于那些初涉高等学府的学子来说，其严重性更在于他们的知识水平还不了解什么有用或什么无用的情况下，就在大言这些有用或那些无用的实用主义想法. 好像在他们的思想深处根本不知道高等学府是培养高科技人才基地，竟把高等学府视为

专门培训录入、操作与编程的技工学校.因此必须让教育者和受教育者明白,用多少学多少的教学模式只能适用于某种技能的培训,对于培养高科技人才来说,此类纯粹实用主义的教学模式是十分可悲的.不仅误人子弟,如果任其误入歧途继续陷落下去,必将直接危害国家和社会的发展前程.

另外,现在有些现象甚至某些评审规定,所反映出来的心态和思潮就是短平快和急功近利,这样的软环境对于原创性研究人才的培养弊多利少.杨福家院士说:①

“费尔马大定理是数学上一大难题,360 多年都没有人解决,现在一位英国数学家解决了,他花了 9 年时间解决了,其间没有写过一篇论文.我们现在的规章制度能允许一个人 9 年不出文章吗?”

“要拿诺贝尔奖,都要攻克很难的问题,不是灵机一动就能出来的,不是短平快和急功近利就能够解决问题的,这是异常艰苦的长期劳动.”

据悉,居里夫人一生只发表了 7 篇文章,却两次获得诺贝尔奖.现在晋升副教授职称,都要求在一定年限内,在一定级别杂志上发表一定数量的文章,还要求有什么奖之类的,在这样的软环境里,按照居里夫人一生中发表文章的数量计算,岂不只能当个老讲师.

清华大学是我国著名的高等学府,1952 年,全国高校进行院系调整,在调整中清华大学变成了工科大学.直到改革开放后,清华大学才开始恢复理科并重建文科.我国各层领导开始认识到世界一流大学均以知识创新为本,并立足于综合、研究和开放,从而开始重视发展文理科.11 年前,清华人立志要奠定世界一流大学的基础,为此而成立清华高等研究中心.经周光召院士推荐,并征得杨振宁先生同意,聘请美国纽约州立大学石溪分校聂华桐教授出任高等中心主任.5 年后接受上海《科学》杂志编辑采访,面对清华大学软环境建设和我国人才环境的现状,聂华桐先生明确指出:②

“中国现在推动基础学科的一些办法,我的感觉是失之于心太

① 王德仁等,杨福家院士“一吐为快——中国教育 5 问”,扬子晚报,2001 年 10 月 11 日 A8 版.

② 刘冬梅,营造有利于基础科技人才成长的环境——访清华大学高等研究中心主任聂华桐,科学,Vol. 154,No. 5,2002 年.

急.出一流成果,靠的是人,不是百年树人吗?培养一流科技人才,即使不需百年,却也绝不是短短几年就能完成的.现行的一些奖励、评审办法急功近利,凑篇数和追指标的风气,绝不是真心献身科学者之福,也不是达到一流境界的灵方.一个作家,您能说他发表成百上千篇作品,就能称得上是伟大文学家了吗?画家也是一样,真正的杰出画家也只凭少数有创意的作品奠定他们的地位.文学家、艺术家和科学家都一样,质是关键,而不是量."

"创造有利于学术发展的软环境,这是发展成为一流大学的当务之急."

面对那些急功近利和短平快的不良心态及思潮,前述杨福家院士和聂华桐先生的一番论述,可谓十分切中时弊,也十分切合实际.

大连理工大学出版社能在审时度势的前提下,毅然决定立足于数学文化品格编辑出版《数学科学文化理念传播丛书》,不仅意义重大,而且胆识非凡.特别是大连理工大学出版社的刘新彦和梁锋等不辞辛劳地为丛书的出版而奔忙,实是智慧之举.还有88岁高龄的著名数学家徐利治先生依然思维敏捷,不仅大力支持丛书的出版,而且出任丛书主编,并为此而费神思考和指导工作,由此而充分显示徐利治先生在治学模式中的奉献精神和远见卓识.

序言中有些内容取材于"数学科学与现代文明"①一文,但对文字结构做了调整,文字内容做了补充,对文字表达也做了改写.

朱梧槚

2008年4月6日于南京

① 1996年10月,南京航空航天大学校庆期间,名誉校长钱伟长先生应邀出席庆典,理学院名誉院长徐利治先生应邀在理学院讲学,老友朱剑英先生时任校长,他虽为著名的机械电子工程专家,但从小喜爱数学,曾通读《古今数学思想》巨著,而且精通模糊数学,又是将模糊数学应用于多变量生产过程控制的第一人.校庆期间钱伟长先生约请大家通力合作,撰写"数学科学与现代文明"一文,并发表在上海大学主办的《自然杂志》上.当时我们就觉得这个题目分量很重,要写好这个题目并非轻而易举之事.因此,我们(徐利治、朱剑英、朱梧槚)曾多次在一起研讨此事,分头查找相关文献,并列出提纲细节,最后由朱梧槚执笔撰写,并在撰写过程中,不定期会面讨论和修改补充,终于完稿,由徐利治、朱剑英、朱梧槚共同署名,分为(上)、(下)两篇,作为特约专稿送交《自然杂志》编辑部,先后发表在《自然杂志》1997,19(1):5-10与1997,19(2):65-71.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　录

引 言

所谓“化归”，从字面上看，应可理解为转化和归结的意思. 数学方法论中所论及的“化归方法”，是指数学家们把待解决或未解决的问题，通过某种转化过程，归结到一类已经能解决或者比较容易解决的问题中去，最终求获原问题之解答的一种手段和方法. 匈牙利著名数学家路沙・彼得(Rozsa Peter)在她的名著《无穷的玩艺——数学的探索和旅行》一书中曾对“化归方法”作过生动而风趣的描述:

> “如上所述的推理过程，对于数学家的思维过程来说是很典型的，他们往往不对问题进行正面的攻击，而是不断地将它变形，直至把它转化为已经能够解决的问题. 当然，从陈旧的实用观点来看，以下的一个比拟也许是十分可笑的，但这一比拟在数学家中却是广为流传的:
>
> ‘现有煤气灶、水龙头、水壶和火柴摆在您面前，当您要烧水时，您应当怎样去做呢?’
>
> ‘往水壶里注满水，点燃煤气，然后把水壶放在煤气灶上.’
>
> ‘您对问题的回答是正确的，现把所说的问题稍作修改，即假设水壶中已经盛满了水，而所说问题中的其他情况都不变，试问，此时您应当怎样去做?’
>
> 此时被问者一定会大声而颇有把握地回答说:‘点燃煤气，再把水壶放上去.’
>
> 他确信这样的回答是正确的. 但是更完善的回答应该是

这样：‘只有物理学家才会按照刚才所说的办法去做，而数学家们却会回答：只需把水壶中的水倒掉，问题就化归为前面所说的问题了.’”

稍作考虑便可看出，在路沙·彼得之如上的一番议论中包含着这样一层意思，即化归方法乃是数学家们所常用的一种方法，也是数学方法论中的基本方法或典型方法之一，从而是人们寻找真理、发现真理和处理问题的一种重要手段.

让我们通过以下四个简单的例子去进一步阐明化归方法的具体含义.

例 1 在设定我们已经会求矩形面积的前提下，去求解：

(1)平行四边形面积；

(2)三角形面积；

(3)多边形面积.

解 (1)由于我们已经会求矩形面积，因而我们会很自然地想到用割补法把平行四边形化为与之等积的矩形.

(2)可用拼接法，把两个三角形拼成一个平行四边形，从而把问题转化为(1)的情形.

(3)可用分割法将多边形分割成若干个三角形，这样就把问题转化为(2)的情形了.

例 1 中 3 个小题的求解过程有一个共同的特点，那就是它们都不是利用面积的最基本的概念(含单位正方形的个数)去求其面积，而都是将未解决的问题转化归结为一个已经能解决的问题，从而求获原问题之解答. 这正是化归方法的重要特色.

例 2 求证 $f(n)=n^3+6n^2+11n+12(n\in N)$能被 6 整除.

现把原式适当地变形：

$$\begin{aligned} f(n)&=n^3+6n^2+11n+12 \\ &=(n+1)(n+2)(n+3)+6 \end{aligned}$$

上式表明，$f(n)$是三个连续自然数之积与 6 之和. 因而问题转化为往证：

①三个连续自然数之积总能被 6 整除.

如果我们对①的证明方法已经掌握，那么原问题便可由此而获

证，但若我们对①的证法仍属未知，那么因为 $6=2\times3$，而 2 与 3 又互质，因而①又可被转化为往证：

②三个连续自然数之积，既被 2 整除，又能被 3 整除.

由于对②的处理方法为大家所熟知，因此原问题可由此而获解.

例 3 在边长为 2 的正方形内，任意放置 5 个点，求证其中必存在两个点，它们之间的距离不大于$\sqrt{2}$.

注意$\sqrt{2}$这个数值，它使我们联想到单位正方形对角线的长. 如所知，在单位正方形内，任意两点间的距离都不大于对角线的长，从而小于或等于$\sqrt{2}$. 因此原问题便转化为在所设条件下往证“至少有两个点落在同一个单位正方形之中”. 如图 1 所示，我们把边长为 2 的正方形划分为四个单位正方形，那么问题便可进一步转化为“证明在四个单位正方形内任意放置 5 个点，至少有两个点在同一正方形内”. 由于这个问题与大家在生活中早就体验过的下述问题完全一样，即“在四个抽屉内放五个苹果，至少有一个抽屉内要放进两个苹果”. 因而原问题也就获证.

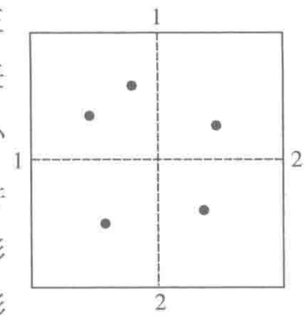


图 1

例 4 已知 A,B,C 是$\triangle ABC$ 的三内角，求 $y=\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$ 的最大值.

注意到函数式中的 $\sin A,\sin B,\sin C$，它容易使我们联想到正弦定理：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R(R\text{ 是三角形外接圆半径})$$

考虑到 y 值的大小与三角形外接圆半径的大小无关，因此不妨假定 $R=1$，于是根据正弦定理便可将原函数式变形为

$$\begin{aligned}y&=\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C=\sin A\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}bc\sin A\end{aligned}$$

其中$\frac{1}{2}bc\sin A$ 是我们所熟悉的三角形面积公式，于是原问题就转化为求单位圆内接三角形面积之最大值. 这是一个为我们所熟悉并能求解

的问题，从而原问题也就由此而得解. 事实上，由于圆内接三角形中以正三角形面积最大，因而当 $A=\frac{\pi}{3}$，$b=c=\sqrt{3}$ 时 $\frac{1}{2}bc\ \sin A$ 取得最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 故所求 y 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

以上四例之形式虽各不相同，求解或证明的具体过程也各各相异，但其思考方式却有一个共同的特点，即都是通过转化，或再转化，将待解决的问题归结为一个已经能解决的问题，或者归结为一个较易解决的问题，甚至为人们所熟知的常识问题，这种求解问题的手段与过程可见图 2. 图 2 也可视为化归方法的一般模式.

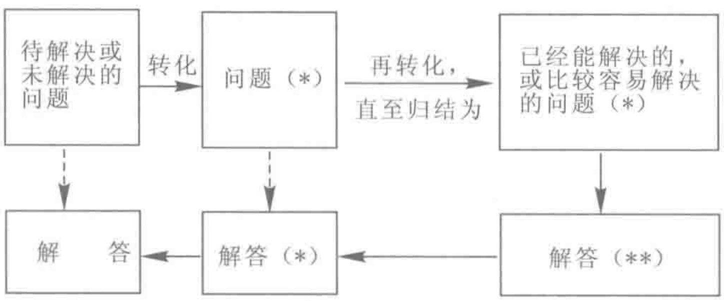


图 2

化归方法之所以成为数学方法论的基本方法之一，是有其理论上的客观背景的.

如所知，数学是一门演绎推理的学科，于是在同一个数学分支内部（或建立在同一个理论基础上的几个数学分支内部），就产生了如下的事实：任何一个正确的结论，都可按照需要与可能成为推断其他结论的依据（如例 1）. 这表明在任何一个数学系统的展开中，都有形或无形地存在着如图 3 所示的结论链：

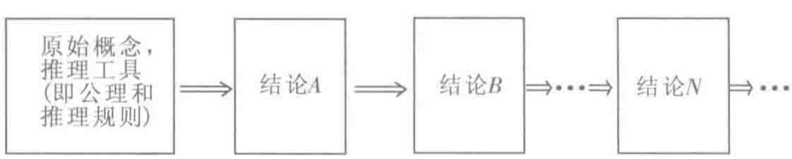


图 3

所谓有形和无形是指有许多数学分支是已经公理化或形式公理化了的，如欧几里得几何等. 但事实上，现在许多数学分支都采取素朴的陈述形式，如康托（G. Cantor）的古典集合论等. 但若对这些素朴陈

述的数学理论稍作分析整理，就不难看出，仍然有它们的不定义概念和无条件承认的一些思想规则，这就是无形地存在着的相当于形式公理体系中之推理工具（公理和推理规则）或原始概念的东西. 另外还要注意两点：第一点，图 3 的表达形式是不全面的，事实上，一个数学系统的“结论集”往往是树枝形的偏序集，而并非直线型的全序集；第二点，图中之“⇒”往往还是可逆的. 当然更多的情况是不可逆的.

由于结论链的存在，势必大大加快演绎推理的步伐，因为我们由此而大可不必事事都去“请示”原始概念与推理工具. 只需把待解决问题转化为结论链中的某一环节就可以了. 这就是化归方法在理论上的客观背景和化归方法之所以能成为数学方法论的典型方法之一的根本原因.

然而，通过以上四例，我们还可看到，所谓“通过转化的手段把待解决问题归结为已经能解决或比较容易解决的问题”，只是在原则上教给我们一种解决数学问题的基本手段，至于对每一个具体问题如何去具体实现这种转化过程，以及能否依靠或单独依靠化归方法解决问题，这既要在总体上去作多方面的探索，还要加上具体实现化归过程时的种种数学技巧. 譬如在例 2 中，我们是怎样想到将 $f(n)$ 化成 $(n+1)(n+2)(n+3)+6$ 的形式的？在例 3 中又是怎样想到把原正方形分割为四个单位正方形的？这些都说明，我们即使在总体上已经决策，将解决问题的方案纳入化归方法的模式，仍然面临着如何寻找正确的化归途径和怎样选择恰当的转化手段等等技巧问题，而这也正是本书所要着重讨论和研究的一个问题.

我们将从特殊与一般，分解与组合，关系映射反演原则和归纳、类比、联想及其在化归中的作用等四个方面去讨论上述问题，这也是本书正文四章的具体内容. 但要说明的是，首先本书所涉及的数学知识都被限制在中学数学的教学范围之内，其次，由于本书是从数学方法论的角度来研讨有关数学题材的，它既非题解，也非复习资料，因此我们的兴趣主要在于如何去探索和发现解题的方法. 尽管本书中会较多地给出某些具体的解题过程，但那仍然是为了具体阐明某种处理问题的思想背景和思想方法.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com