配合教材
辅导自学

数

高中
教学指导

高二分册

学

步练习
型丰富

苏州大学出版社

高中数学教学指导

高二分册

苏州市高中数学教改组编

苏州大学出版社

高中数学教学指导

高二分册

苏州市高中数学教改组编

苏州大学出版社出版发行

江 苏 省 新 华 书 店 经 销

宜兴印刷厂承印

地址:宜兴市荆溪北路 112 号　邮编:214200

开本 787×1092 1/16　印张 11.5　　字数 300 千

1996 年 5 月第 2 版第一次印刷　印数 1—10000

ISBN7—81037—210—6/G·75　定价 10.80 元

前　言

为了提高教学效果，为中学生提供一本实用的自我训练资料，我们编写了这本《高中数学教学指导》，按必修本的内容和顺序，按教参规定的课时数，每一课时安排一个练习，习题后附有小结，提出本节的学习目标、解题思想方法及注意事项，我们认为这样对于提高学习的自觉性很有作用，小结也可当作教学目的。希望本书能成为同学的学习助手，也能成为教师备课的辅助教案。

本书出版后深受师生的欢迎，为了满足各地需要，并使之更切合当前中学数学教学的实际，我们在原有的基础上，作了较大的调整，并改正了错漏，以新的面貌与读者见面。我们坚持注意各门功课的基础理论、基本方法和基本数学思想，从总体上加以引导，立足课本，略高于课本，习题难易有度，着重素质培养。

每个练习中选择题、填空题和解答题各四个，每章最后安排一个自测题。新版书后还附有五个综合练习题，这样的题量有的老师反映太多，再版时没有改动，我们认为习题多些可供选择，不必强要求学生全做，可选择部分去做，学有余力的学生可全做。

编写中，我们力求突出三基，使本资料实用、耐用，但限于水平，设想的目的能否达到，还请读者评说。

参加本书编写的有：王克明，王文姬，王雪元，王石龙，王继源，王汉岭，王新平，陈健民，朱晨宝，朱纯安，祁平，沈建平，孙全荣，余亚夫，汪祖德，武志荣，冯祖杰，吴关兴，周建华，周建国，罗强，李宝金，陆静娟，陆宏，陆定武，陆祥麟，郑毅，邵朴，张银山，时义，张福宁，张玉明，张心一，秦孟安，高夕德，徐玉卿，钟恩美，顾振强，赵志清，赵琳，陶绍虎，秦锋，黄之璧，郭耿荣，陈丙松，钱菊梅，黄俭，曾天民，芮兴国，韩连华，李亚文，唐柏龄，张家瑞，由张家瑞做主要编辑工作。

本书出版得到秦淦、芮滋老师的鼓励和帮助，在此表示感谢。

本书插图由张建忠描绘。

限于水平，书中不当之处敬请读者不吝施教，以便提高书的质量。

编　者

1995 年 12 月于苏州

目　　录

（高二分册）

代　　数

解析几何

解　　答

代　　数

第六章　数列、极限、数学归纳法

一、数　　列

6.1　数列(一)

一、选择题

1. 数列就是 (　　)

(A) 一列数　　(B) 排列着的一列数

(C) 按一定顺序排列着的一列数　　(D) 任意排列的一列数

2. 已知数列 $-1,1,-1,1,\cdots$，则在 ①$a_n=(-1)^n$，②$a_n=\cos n\pi$，

③$a_n=\begin{cases}-1 & (n\text{ 为奇数})\\ 1 & (n\text{ 为偶数})\end{cases}$ 中，表示这一数列的通项的是 (　　)

(A)①　　(B)①③　　(C)②③　　(D)①②③

3. 数列在直角坐标系内的图形是 (　　)

(A) 一群孤立的点　　(B) 一条线段　　(C) 一条直线　　(D) 一段弧

4. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=2n+1$，则 a_{2n} 为 (　　)

(A)$2n+1$　　(B)$4n+1$　　(C)$4n+2$　　(D)$4n$

二、填空题

1. 正 n 边形的一个外角是 $\frac{2\pi}{n}$ 弧度，依次计算正三角形、正方形、正五边形，…，正 n 边形每一个外角的弧度数，写出这些弧度构成的数列的前五项________.

2. $(-\frac{1}{3})$ 的一次幂、二次幂、三次幂 … 依次排列成数列的通项公式是________.

3. 数列通项 $a_n=\lg n^2$，此数列的第二、第五项的和是________.

4. 函数 $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$，x 依次取 $1,2,3,\cdots$，所得数列是________.

三、解答题

1. 写出下列数列的前五项：

(1)$a_n=(-1)^n n$；　(2)$a_n=\frac{1}{2}[1+(-1)^{n-1}]+(n-1)(n-2)$；　(3) $\frac{1}{2}(1-\cos n\pi)$.

2. 已知数列 $a_n=\frac{n^2}{n^2+n+2}$，写出前五项，$\frac{49}{58}$ 是否属于这个数列？若是，是第几项？

3. 数列 5,8,11,14 与 14,11,8,5 是不是同一数列？为什么？

4. 数列 a,a^2,a^3,a^4 和集合 $\{a,a^2,a^3,a^4\}$ 有没有区别？

小结

什么是数列？可理解为：1. 按一定顺序排列着的一列数；2. 数列是以自然数为自变量的函数，记为 $y=f(n)$ $n\in N$，数列不是集合．集合中元素是无序的，数列是有序的.

6.1 数列(二)

一、选择题

1. 数列 $a_n = \frac{n}{2}$,则第 10 项到第 20 项的和是 ( )

(A)155 (B)77.5 (C)170.5 (D)82.5

2. 若$(-\frac{4}{7})$是下列数列中某一个数列的项,则这个数列的通项是 ( )

(A)$a_n = \frac{n+1}{n}$ (B)$a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$

(C)$a_n = \frac{n+1}{2n}$ (D)$a_n = (-1)^n \frac{n+1}{2n}$

3. 数列$\{a_n\}$的前 4 项分别为 1,0,1,0,则下列选择支不能作为它的通项公式的是 ( )

(A)$a_n = \frac{1}{2}[1 + (-1)^{n-1}]$ (B)$a_n = \sin^2 \frac{n\pi}{2}$

(C)$a_n = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n] + (n-1)(n+2)$ (D)$a_n = \frac{1}{2}(1 + \cos n\pi)$

4. 一个数列中 $a_1 = 3$,$a_2 = 2$,通项为 $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$,则 -1 是第几项 ( )

(A)3 (B)$3 + 6(k-1)\ (k \in N)$ (C)$3k\ (k \in N)$ (D)3 和 9

二、填空题

1. 数列 $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots$ 的一个通项公式是__________.

2. 数列 $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \cdots$ 的一个通项公式是__________.

3. 数列 $3^{\sqrt{2}-1}, -3, 3^{\sqrt{2}+1}, -3^{3+2\sqrt{2}} \cdots$ 的一个通项公式是__________.

4. 数列 1,1,2,2,3,3,⋯ 的一个通项公式是__________.

三、解答题

1. 数列 $1 \times 3, 2 \times 4, 3 \times 5, \cdots, n(n+2), \cdots$,问 120 是否属于此数列?若是,120 是第几项?

2. 数列中,$a_1 = \sqrt{2}$,$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$,求通项 a_n.

3. 数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的首项均为 1,且满足 $a_1 + b_1 = a_2, b_1 + a_2 = b_2, a_2 + b_2 = a_3, b_2 + a_3 = b_3, \cdots$,求 a_{n+1} 和 b_{n+1} 的表达式,并求 a_4 和 b_4.

4. 数列 $a_n = \sin(\alpha + \frac{n\pi}{2})$,另一数列 $a_1a_2, a_3a_4, a_5a_6, \cdots$,则后一数列为常数列,对吗?为什么?

小结

由数列的前 n 项写出数列的通项,应细察数列中各项与其序号的变化情况,分析其中不变的部分和应变部分,再探求变化部分与序号的联系,找出规律,写出通项.一般说来,这类题的结果不是唯一的,只要写出其中一个通项公式即可.

6.2　等差数列(一)

一、选择题

1. 一个数列 $a_n = n^2$，则下列数列中为等差数列的是　　(　　)

(A) $\{\frac{1}{a_n}\}$　　(B) $\{\sqrt{a_n}\}$　　(C) $\{\lg a_n\}$　　(D) $\{|\lg a^n|\}$

2. 公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$，每隔两项之和组成的数列 $a_1 + a_3, a_2 + a_4, a_3 + a_5, \cdots$ 是　　(　　)

(A) 公差为 d 的等差数列　　(B) 公差为 $2d$ 的等差数列

(C) 不是等差数列　　(D) 是别的数列

3. $\{a_n\}$ 为等差数列，则数列 $a_{100}, a_{200}, a_{300}$ 是　　(　　)

(A) 等差数列　(B) 常数列　(C) 不是等差数列　(D) 不是常数列

4. 等差数列中 $a_m = p, a_n = q, m \neq n$，则 a_{m-n} 等于　　(　　)

(A) $p + q$　　(B) $\frac{mp + nq}{m + n}$　　(C) $\frac{mp - nq}{m - n}$　　(D) $\frac{mp - nq}{m + n}$

二、填空题

1. 等差数列 $-\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}, \cdots$ 的 $a_{2n} =$ ____________.

2. 等差数列中，$a_{12} = 34, a_{44} = 154$，则 334 是此数列的第____________项.

3. 在 p、q 中插入 x 个数，使它们成为等差数列，则其公差为 $d =$ ____________.

4. 首项为$\frac{1}{25}$，第 10 项为开始比 1 大的项，则此等差数列公差 d 的范围是____________.

三、解答题

1. 四数成等差数列，其平方和为 94，首末两项的积比中间两项的积少 18，求这四个数.

2. 两个等差数列 4, 7, 10, ⋯ 和 8, 12, 16, ⋯ 都有 100 项，求它们有多少项相同.

3. $\triangle ABC$ 中三边 a, b, c 所对的角分别为 A, B, C，若 $\lg\sin A, \lg\sin B, \lg\sin C$ 成等差数列，求证$\frac{a}{c} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$.

4. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}, a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 \cdot a_{a_n}$，求通项公式.

小结

通项与前 n 项之和 S_n 之间的关系为 $a_n = \begin{cases} S_1 & (n = 1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geqslant 2) \end{cases}$，　$a_1 = S_1$，有时不包括在通项公式内.

6.2 等差数列(二)

一、选择题

1. 等差数列 84,80,76,… 中,开始为负数的项数是　　　(　　)

(A)21　　(B)22　　(C)23　　(D)24

2. 在等差数列中,$a_m = n$,$a_n = m$,且 $m \neq n$,则 a_{m-n} 的值是　　　(　　)

(A)0　　(B)m　　(C)n　　(D) 不能确定

3. 凸 n 边形的各内角度数成等差数列,其中最小的角为 120°,公差为 5°,则边数 n 等于

(A)16　　(B)9　　(C)16 或 9　　(D)12　　　(　　)

4. 若 x_1、x_2 是二次方程 $ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$ 的两个不相等的实根,y 是 x_1 与 x_2 的等差中项,则 y 等于　　　(　　)

(A) $\frac{c}{a}$　　(B) $\frac{c}{2a}$　　(C) $-\frac{b}{a}$　　(D) $-\frac{b}{2a}$

二、填空题

1. 若一个等差数列的相邻两项是方程 $|3x-1| + \sqrt{9y^2 + 24y + 16} = 0$ 的解,则这个数列的公差为____________.

2. 数列$\{a_n\}$ 中,$a_1 = -60°$,$a_{n-1} = a_n + 3(n \in N)$,则该数列前 30 项的绝对值之和等于____________.

3. 等差数列中,$a_1 = \frac{1}{x+1}$,$a_2 = \frac{5}{6x}$,$a_3 = \frac{1}{x}$,则 $a_{101} =$ ____________.

4. 等差数列的首末两项是方程 $x^2 - 2x - 63 = 0$ 的两个根,这个数共有 6 项,那么中间两项是____________.

三、解答题

1. 在 1,4,7,…,$3n-2$ 中,每相邻两项间插入 3 个等差中项,构成新的数列,(1) 原数列的第十三项是新数列的第几项?(2) 新数列的第 29 项,是原数列的第几项?

2. 数列 $\lg 100, \lg(100\cos\frac{\pi}{4}), \lg(100\cos^2\frac{\pi}{4}), \cdots, \lg(100\cos^{n-1}\frac{\pi}{4})$,前几项的和最大?并求此最大值.

3. 项数为奇数的等差数列,奇数项之和为 44,偶数项之和为 33,求这个数列的项数及中间项.

4. 数列$\{a_n\}$ 的前 n 项的和 $S_n = an^2 + bn\ (a \neq 0)$.求证$\{a_n\}$ 是等差数列.

小结

1. 三数成等差数列,常设三数为 $a-d$、a、$a+d$.

2. 证明一个数列为等差数列,应用等差数列的定义,只须证 $a_n - a_{n-1}$ 为常数.

6.2 等差数列(三)

一、选择题

1. 一等差数列 $a_1=-3, d=\frac{1}{2}, S_n \geqslant \frac{57}{2}$，则项数 n 为 ( )

(A)19 (B)18 (C)17 (D)16

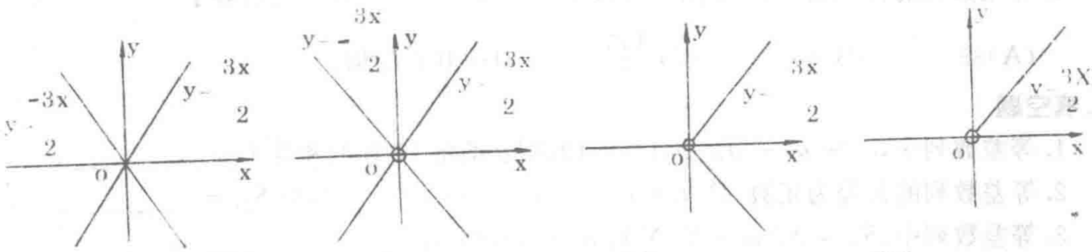
2. 1 − 100 之间能被 3 整除的所有自然数之和为 ( )

(A)1674 (B)1677 (C)1680 (D)1683

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，满足 $\sin^2 a_{n-1}=\sin a_n \sin a_{n-2}, n\in N$，则它的公差等于 ( )

(A)0 (B)1 (C)π (D)$k\pi(k\in Z)$

4. 若 $\lg x, \lg 2y, \lg 9x$ 成等差数列，则点 $M(x,y)$ 的图形是 ( )



(A) (B) (C) (D)

二、填空题

1. 一个有 $2m+1$ 项的等差数列的 $a_{m-1}=1$，则 $S_{2m-1}=$ ________.

2. 公差为 1 的等差数列的 $S_{98}=147$，则 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{96}+a_{98}$ 的值为 ________.

3. 等差数列中 $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=22$，则 $S_{20}=$ ________.

4. 等差数列共有 $2p$ 项，奇数项之和为 26，偶数项之和为 32，且 $a_{2p}-a_1=\frac{21}{2}$，则 $p=$ ________，公差 $d=$ ________.

三、解答题

1. 等差数列通项公式 $a_n=2n-37$，求它前 n 项的和与 S_n 的最小值.

2. 等差数列中，$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=30, a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=8$，则 $a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}$ 的值是多少?

3. 求和 $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2$.

4. 两等差数列前 n 项的和分别是 $n(6+n), n(4n-3)$，求这两个数列公共项构成的数列.

小结

等差数列 $\{a_n\}$ 中的一个基本性质是 $a_m+a_n=a_{m-1}+a_{n-1}=a_{m-2}+a_{n-2}=\cdots(m\leqslant n)$.

6.2 等差数列(四)

一、选择题

1. 若等差数列中 $a_3+a_{11}=40$，则 $a_6+a_7+a_8=$ ( )

(A)72 (B)60 (C)48 (D)36

2. 等差数列$\{a_n\}$，则下列数列$\{b_n\}$也是等差数列 ( )

(A)$b_n=|a_n|$ (B)$b_n=a_n^2$ (C)$b_n=\sqrt{a_n}$ (D)$b_n=2-a_n$

3. 数列$\{4n-64\}$的前n项的和S_n取最小值时，n的值 ( )

(A)13 (B)14 (C)15 (D)16

4. 等差数列的公差为$\frac{1}{2}$，且$S_{100}=45$，则$a_2+a_4+\cdots+a_{100}$的值等于 ( )

(A)85 (B)60 (C)$\frac{145}{2}$ (D)其它的值

二、填空题

1. 等差数列中，$a_4+a_7+a_{10}+a_{13}=12$，则它的前16项的和等于____________.

2. 等差数列的公差为正数，且$a_3\cdot a_7=-12$，$a_4+a_6=-4$，则$S_{20}=$____________.

3. 等差数列中，$S_m=S_n$(m、$n\in N$且$m\neq n$)，则$S_{m+n}=$____________.

4. 在三位数中除以17余3的数共有____________个，它们的和为____________.

三、解答题

1. 两个等差数列2，6，10，…，190和2，8，14，…，200，求它们的相同项之和.

2. 设等差数列的前n项之和为S_n，若$a_3=12$，$S_{12}>0$，$S_{13}<0$，(1)求公差d的取值范围；(2)指出$S_1,S_2,\cdots,S_n$中哪一个最大？并说明理由.

3. 等差数列中$S_{12}=354$，前12项中偶数项之和与奇数项之和的比为32∶27，求公差d.

4. 设等差数列$\{\frac{1}{a_n}\}$，求证$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n=(n-1)a_1a_n$.

小结

等差数列前n项和S_n，n奇数时，中间项为M，n偶数时，M为中间两项的算术平均数，则恒有$S_n=n\cdot M$，这是一个非常有实用价值的结论.

6.2 等差数列(五)

一、选择题

1. 在 55 和 555 之间插入若干个数，使它们与这两个数成等差数列，插入的最大值是方程 $x^2 - 238x + 455 = 0$ 的两根之积，则插入的个数是 (　　)

(A)3　　(B)4　　(C)5　　(D)6

2. 项数为 $2n+1(n \in N)$ 的等差数列($a_1 \neq 0$) 中，奇数项和为 P，偶数项和为 Q，那么 (　　)

(A)$P:Q$ 为常数　　(B)$P:Q = n:(n+1)$

(C)$P:Q=(n+1):n$　　(D) 以上结论都不对

3. 等差数列中 $S_{10} = 100$，$S_{110} = -110$，则 $S_{100} =$ (　　)

(A)9　　(B)-9　　(C)10　　(D)-10

4. 等差数列中 $S_m = 2n$，$S_n = 2m$，则其公差 $d =$ (　　)

(A)$-\dfrac{2(m+n)}{m \cdot n}$　　(B)$-\dfrac{4(m+n)}{mn}$　　(C)$-\dfrac{mn}{2(m+n)}$　　(D)$-\dfrac{mn}{4(m+n)}$

二、填空题

1. 等差数列中 $a_1 > 0$，$S_3 = S_{11}$，则 S_n 最大时 $n =$ ________.

2. 等差数列中 $S_3 + S_4 = S_5$，且 $S_7 = 49$，则公差 $d =$ ________.

3. 有 100 个连续整数的和大于 13500，小于 13600，则其中最小的一个数是________.

4. 等差数列中 $a_1 = -34$，第 18 项起为正数，则公差 d 的取值范围是________.

三、解答题

1. 数列$\{a_n\}$中，$a_n > 0(n \in N)$，前 n 项和 S_n，如果 $S_1{}^2, S_2{}^2, \cdots, S_n{}^2, \cdots$ 是一个首项为 3，公差为 1 的等差数列，试比较 S_n 与 $3na_n(n \in N)$ 的大小.

2. 数列$\{a_n\}$中，$S_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)(n \in N)$，求证此数列为等差数列.

3. 两等差数列前 n 项和之比为$(n+6):(4n-3)$，求它们第 n 项的比值.

*4. 数列$\{a_n\}$中，$a_1 = 1$，$a_2 = 5$，$a_{n-1} = -a_n + 3a_{n-1}$，求证此数列为等差数列.

小结

在 $a_1 > 0$，$d < 0$ 的等差数列$\{a_n\}$中，求 n 为何值时，S_n 最大，不仅可以从 S_n 来分析，也可以求出满足 $a_n \geqslant 0$ 的最大值；同样在 $a_1 < 0$，$d > 0$ 的等差数列$\{a_n\}$中，求 S_n 最小值时的 n 值可以求出满足 $a_n \leqslant 0$ 的最大 n 值.

6.3 等比数列(一)

一、选择题

1. $2+\sqrt{3}$ 和 $2-\sqrt{3}$ 的等比中项是 ( )

(A)1 (B)-1 (C)± 1 (D)2

2. 一个等比数列中 $a_5=6$，公比 $q=3$，则 $a_1=$ ( )

(A)$-\frac{2}{27}$ (B)$\frac{2}{27}$ (C)$-\frac{5}{27}$ (D)$\frac{7}{27}$

3. 设 A 和 G 分别是 x、y 的等差中项和等比中项，则 x^2+y^2 的值是 ( )

(A)$2A^2-G^2$ (B)$4A^2-G^2$ (C)$4A^2-2G^2$ (D)$2A^2-2G^2$

4. 三正数 a,b,c 成等比数列，则 $\lg a,\lg b,\lg c$ 是 ( )

(A) 等比数列 (B) 等差数列

(C) 既为等差又是等比数列 (D) 既非等差又非等比数列

二、填空题

1. 等比数列中 $a_n=16$，$a_{n-3}=2$，则公比 $q=$ ______.

2. 四数 $2,a,b,6$ 的前三数为等比数列，后三数成等差数列，则 $a=$ ______，$b=$ ______.

3. 等比数列 $\{a_n\}$，若 $a_n=4a_{n-2}$，则公比 $q=$ ______.

4. 棱台的上底面积是 4，其中截面积为上下底面积的等比中项，则下底面积为 ______.

三、解答题

1. 等比数列 $\{a_n\}$，$b_n=ca_n(c\neq 0)$. 求证 $\{b_n\}$ 是等比数列.

2. 三个数成等比数列，和为 39，它们依次加上 7、9、-1 后成等差数列，求这三个数.

3. 5 与 81 中插入两个正数，使前三数成等差数列，后三数成等比数列，求插入的两个数的和.

4. 三数成等比数列，第二项加上 4，则这三项成等差数列；如果再把这个等差数列的第三项加上 32，则又成等比数列，求这三个数.

小结

三个数成等比数列，可以设 $\frac{a}{q},a,aq$ 或 a,aq,aq^2. 四个数成等比数列，有时可以设 $\frac{a}{q^3},\frac{a}{q},aq,aq^3$.

6.3　等比数列(二)

一、选择题

1. 下列命题正确的是

(A) $\{a_n\}$ 是等比数列，则 $\{a_{\frac{n}{2}}\}$ 是等比数列

(B) 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n = a_{n-1}q$ (q 为常数)，则 $\{a_n\}$ 是等比数列

(C) 若 $b^2 = ac$，则 a,b,c 成等比数列

(D) 若 $a:(-b) = (-b):c$，则 $a,-b,c$ 成等比数列

2. 等比数列中 $a_{17} - a_{15} = 2a_{13}$，那么公比是　(　　)

(A) $\pm\sqrt{2}$　　(B) $-\sqrt{3}$　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) 不存在

3. 等比数列中 $a_3 = 81, a_{11} = 625$，则 a_{13} 是　(　　)

(A) $-\dfrac{3125}{2}$　　(B) $\dfrac{3125}{3}$　　(C) $\dfrac{3125}{4}$　　(D) $\pm\dfrac{3125}{2}$

4. 等比数列 $\{a_n\}$ 中 $a_n > 0$，$a_2a_4 + 2a_3a_5 + a_4a_6 = 25$，那么 $a_3 + a_5$ 的值等于　(　　)

(A) 5　　(B) 10　　(C) 15　　(D) 20

二、填空题

1. 等比数列中，$a_1a_9 = 256, a_4 + a_6 = 40$，则 $q =$ ____________.

2. 直角三角形三边成等比数列，则公比 $q =$ ____________.

3. 三个成等比数列的正数的算术平方根成等差数列，则公比 $q =$ ____________.

4. 等比数列中，$a_2 \cdot a_6 \cdot a_{10} \cdot a_{14} \cdot a_{18} = 243$，则 $a_{10} =$ ____________.

三、解答题

1. 若 $x,y,z > 0$，a,b,c 成等差数列(公差 $\neq 0$)，且 $x^by^cz^a = x^cy^az^b$，求证 x,y,z 成等比数列.

2. 三正数 x,y,z 成等比数列(公比不为1)，且 $(b-c)\log_m x + (c-a)\log_m y + (a-b)\log_m z = 0$，求证 a,b,c 成等差数列.

3. $a,b > 0$，比较 a,b 的等差中项与等比中项的大小.

4. 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1 = \dfrac{4}{3}, a_2 = \dfrac{13}{9}$，当 $n \geqslant 2$ 时，$3a_{n-1} - 4a_n + a_{n+1} = 0$，若 $b_n = a_{n+1} - a_n$，求证数列 $\{b_n\}$ 是等比数列.

小结

1. 等差数列中，应注意应用变通的通项公式，如 $a_n = a_m + (n-m)d$，同样，等比数列中的变通的通项公式是 $a_n = a_mq^{n-m}$.

2. 等差数列中，若 m,n,p 成等差数列，则 a_m,a_n,a_p 成等差数列；等比数列中，若 m,n,p 成等差数列，则 a_m,a_n,a_p 成等比数列.

6.3 等比数列(三)

一、选择题

1. 等比数列$\frac{1}{3}$,$\frac{2}{9}$,$\frac{4}{27}$,… 的第 4 项到第 100 项的和为 ( )

(A)$(\frac{2}{3})^2-(\frac{2}{3})^{99}$ (B)$(\frac{2}{3})^3-(\frac{2}{3})^{100}$ (C)$(\frac{2}{3})^{99}-(\frac{2}{3})^3$ (D)$(\frac{2}{3})^{100}-(\frac{2}{3})^3$

2. 等比数列的公比为 $q=2$,且 $a_1a_2a_3\cdots a_{30}=2^{30}$,那么 $a_3a_6a_9\cdots a_{30}$ 等于 ( )

(A)2^{10} (B)2^{20} (C)2^{16} (D)2^{15}

3. 一个正数等比数列中,$S_7=2$,$a_8+a_9+\cdots+a_{21}=12$,则 a_{21} 后面 21 项之和是

(A)112 (B)110 (C)108 (D)104 ( )

4. 一个等比数列中,$S_n=48$,$S_{2n}=60$,则 $S_{3n}=$ ( )

(A)183 (B)108 (C)75 (D)63

二、填空题

1. 数列的 $S_n=\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot(-2)^{n-1}}$,则通项 $a_n=$ ________.

2. 若 $\lg a^3$,$\lg a^6$,$\lg a^x$ $(a>0,a\neq 1)$ 成等比数列,则 $x=$ ________.

3. 等比数列$\frac{1}{4}$,$\frac{2}{2\sqrt{2}}$,$\frac{1}{2}$,… 中,从第________项起大于 10^3.

4. 等比数列中,S_n 为前 n 项和,$R_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$,则 $S_n:R_n=$ ________(用 a_1,a_n 表示).

三、解答题

1. 在等比数列$\{a_n\}$中,求证对于任意 $n\in N$,a_n+a_{n-1},$a_{n-2}+a_{n-3}$,$a_{n-4}+a_{n-5}$ 也成等比数列.

2. 等比数列的前 n 项和为 S_n,积为 P_n,倒数和为 T_n,求证:$P_n^2=(S_n:T_n)^n$.

3. 数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 3)$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的各项由如下关系确定:$b_k=\frac{1}{k}\lg(a_1a_2\cdots a_k)(k=1,2,3,\cdots,n)$. (1) 如果数列$\{a_n\}$是等比数列,那么$\{b_n\}$是等差数列;(2) 若 $a_1\neq a_2$,且常数 p 满足 $b_k=p\lg a_k$,$(k=1,2,\cdots,n)$,求 p,并证明此时数列$\{a_n\}$为等比数列.

4. 数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$,$a_{n-1}=a_n+2^n$,求 a_n.

小结

1. 等差数列中,当 $m+n=p+q$ 时,有 $a_m+a_n=a_p+a_q$,在等比数列中,当 $m+n=p+q$ 时,有 $a_ma_n=a_pa_q$.

2. 等比数列的相邻两项的和、差构成新的等比数列,公比不变;等比数列的相邻两项的积构成等比数列,公比为原来比的平方.

6.3 等比数列(四)

一、选择题

1. 等比数列中公比为 q，n 为奇数，且 $a_{\frac{1}{2}(3n-1)} = mq^n$，则 $a_{\frac{1}{2}(n-1)}$ 等于 (　　)

(A)$m-1$　　(B)m　　(C)$m+1$　　(D)m^2

2. 正项等比数列$\{a_n\}$，若 $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_{10} = 20$，$a_5 \cdot a_6$ 的值是 (　　)

(A)-2　　(B)80　　(C)81　　(D)82

3. 等比数列 $S_4 = 1$，$S_8 = 17$，则其公比 q 为 (　　)

(A)17　　(B)16　　(C)± 4　　(D)± 2

4. 数列 9，99，999，… 的前 n 项的和为 (　　)

(A)$10^n - 1$　　(B)$\frac{10}{9}(10^n - 1)$

(C)$\frac{10}{9}(10^n - 1) + n$　　(D)$\frac{10}{9}(10^n - 1) - n$

二、填空题

1. 等比数列的公比 $q \neq 1$，且 $a_m : a_n = a_p : a_q$，则 m,n,p,q 之间的关系是____________.

2. 数列$\{x_n\}$为公比不等于 1 的等比数列，$x_1 = 0$，$x_2 = 1$，$x_{n-2} = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_n)$，则数列 $y_n = x_{n+1} - x_n$ 是____________数列.

3. $\{a_n\}$是公比为 3 的等比数列，$\{b_n\}$为等差数列，公差为 d，$a_n > 0$，$b_n > 0$，又 $\log_3 a_n - b_n = \log_3 a_1 - b_1$，则 $d =$ ____________.

4. x,y,z 成等差数列，x,z,y 成等比数列，则 $x : y : z =$ ____________.

三、解答题

1. 三正数 a,b,c，$a^3 \cdot b^3 = x^3$，$b^3 \cdot c^3 = y^3$，$x^3 \cdot y^3 = b^6$，求证 $a^3 \cdot c^3$ 为定值.

2. $\triangle ABC$ 中，$\cos(B-C) + \cos A + \cos 2A = 1$，试证明 b,a,c 成等比数列.

3. $y = f(x)$ 为一次函数，若 $f(8) = 15$，且 $f(2)$，$f(5)$，$f(14)$ 成等比数列，求 $S_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$.

4. 设数列$\{a_n\}$中，$a_1 = 1$，$S_{n+1} = 4a_n + 2$，(1) 求证 $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ 时数列$\{b_n\}$是等比数列；(2) 求数列$\{a_n\}$的通项公式.

小结

用等比数列前 n 项和的公式时，必须注意 q 是否等于 1，如果不确定，就应分 $q=1$ 与 $q \neq 1$ 两种情况或更多的情况讨论.

6.3 等比数列(五)

一、选择题

1. 等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$各项都是正数，若$a_1=b_1$，$a_{2n+1}=b_{2n+1}$，则a_{n+1}与b_{n+1}的大小关系是　　(　　)

(A)$a_{n+1}>b_{n+1}$　　(B)$a_{n+1}\geqslant b_{n+1}$　　(C)$a_{n+1}<b_{n+1}$　　(D)$a_{n+1}\leqslant b_{n+1}$

2. 等比数列中$a_1+a_4=18$，$a_2+a_3=12$，则$S_8=$　　(　　)

(A)510　　(B)$\frac{255}{8}$　　(C)512　　(D)510或$\frac{255}{8}$

3. $S_{\triangle ABC}=S$，其三边中点构成$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_1B_1C_1$三边中点构成$\triangle A_2B_2C_2$，…依次类推，那么$\triangle A_nB_nC_n$的面积是　　(　　)

(A)$\frac{S}{4^n}$　　(B)$\frac{S}{4^{n-1}}$　　(C)$\frac{S}{4^{n+1}}$　　(D)$\frac{S}{4^{n-2}}$

4. $(3+2)+(3^2+3\cdot2+2^2)+\cdots+(3^n+3^{n-1}\cdot2+3^{n-2}\cdot2^2\cdots+2^n)$等于(　　)

(A)$3^{n+1}+2^{n+1}$　　(B)$\frac{3^{n+1}}{2}-2^{n+1}-\frac{1}{2}$

(C)$\frac{3^{n+2}}{2}-2^{n+2}-\frac{1}{2}$　　(D)$3^{n+1}-2^{n+1}$

二、填空题

1. 若$a_n=3^n+3n+3$，$n\in N$，则$S_{10}=$____________.

2. 等比数列中，$S_{100}=48$，$S_{200}=60$，则$S_{300}=$____________.

3. 等差数列$\{a_n\}$，等比数列$\{b_n\}$均非常数列，且$a_1=b_1$，$a_3=b_3$，$a_7=b_5$，那么$\{b_n\}$中与a_{31}相同的项是____________.

4. 数列$\{a_n\}$，n为奇数时，$a_n=5n+1$；当n为偶数时，$a_n=2^{\frac{n}{2}}$，则$S_{2n}=$____________.

三、解答题

1. $x^2-6x+8=0$和$x^2-bx+c=0$的四个根构成以1为首项的等比数列，求b和c.

2. 如果$\mathrm{tg}\alpha$，$\mathrm{tg}\gamma$，$\mathrm{tg}\beta$成等比数列，求证$\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}=1-\frac{\mathrm{tg}(\alpha-\beta)}{\mathrm{tg}\alpha}$.

3. 在$Rt\triangle ABC$中，CD是斜边AB上的高，$\sin B=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，求证$S_{\triangle ACD}$、$S_{\triangle CBD}$和$S_{\triangle ABC}$成等比数列.

4. 等比数列中$S_n=A$，$S_{2n}=B$，$S_{3n}=C$，求证$A^2+B^2=A(B+C)$.

小结

等差数列与等比数列计算证明中，如果涉及到其它条件，就应把其它隐含的条件结合在内. 比如涉及到三角，就有周期性、值域、三角公式等；涉及到三角形，就有三内角和为180°、正弦定理、余弦定理等；涉及到一元二次方程，就有"△"、根与系数关系；涉及到函数，就有增减性、奇偶性等等.