天骄之路

'98 全国"3+2"高考

新大纲·新变化·新形势

最新高考考点精要及解题技巧(数学)

《最新高考考点精要及解题技巧》编委会 编

航空工业出版社

1998年

最新高考考点精要及解题技巧

（数　学）

本书编委会　编

航空工业出版社

1998

内容提要

为正确引导广大师生进行高考总复习，北大附中、人大附中、清华附中及北师大附中的一批特高级教师郑重推出了本丛书，作者全部是长期从事命题、阅卷工作，并多年工作在高考指导第一线，具有丰富命题经验的特级和高级教师，不少是北京市、海淀区学科带头人。该书严格按照国家教委考试中心颁布的各科《考试说明》编写，不脱离教材，又高于教材，并融合了1998年新动态，内容丰富，覆盖面广，对学生备考有很大帮助。

图书在版编目(CIP)数据

最新高考考点精要及解题技巧：数学/《最新高考考点精要及解题技巧》编委会编. 一北京：航空工业出版社，1998.1

ISBN 7－80134－235－6

Ⅰ.最… Ⅱ.最… Ⅲ.①高中－入学考试－升学参考资料 ②数学课－高中－入学考试－升学参考资料 Ⅳ.G634.479

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第15568号

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里14号 100029)

航空工业出版社印刷厂印刷 全国各地新华书店经售

1998年1月第1版 1998年1月第1次印刷

开本：787×1092 1/16 印张：91 字数：2500千字

印数：1—5000 全套(共七册)定价：105.00元

出 版 说 明

长期以来，我们感到：在总复习阶段，考生迫切需要有一套既能夯实基础、以不变应万变；又能在基础上有所拔高，掌握解题技巧及提高应试能力；同时还能与高考新形势、新变化、新理论保持同步的参考书籍。为此，我们组织了北京市著名特级教师、大学教授共同编写了《最新高考考点精要及解题技巧》丛书。该书具有以下特点：

1. 该书立足于97年秋季最新试用的《全日制普通高级中学教学大纲》和《考试说明》的新精神，并融合1998年高考命题的新特点，在总结和吸收众多成功指导高考复习的经验基础上编写而成；

2. 该书紧紧抓住高考各科能力要点和知识点，做到突出重点、解决难点，帮助考生了解、掌握一个科学合理的知识网络，既便于贮存，又便于提取应用；

3. 该书在深刻分析近年来(1990—1997)高考命题特征的基础上，总结出命题的趋势和方向，并能结合大量的、典型的、新颖的例析，拓宽解题思路，总结解题技巧和方法，使考生真正做到融会贯通、举一反三；

4. 该书针对考生在高考中经常出现的典型错误给予具体指导，帮助考生在查缺补漏的同时，巩固已有的知识，避免许多考生在总复习时经常走的弯路和回头路；

5. 该书不搞"题海战术"，不以繁杂的习题充斥内容，而全部是编者群体智慧、心得体会的汇总，这些智慧来源有四：一是编者长期的教学实践；二是全国各大名报名刊的优秀作品；三是各地教研会、经验交流会的一流成果；四是专家对高考命题不断深入研究的结晶。

总之，该书既注重基础知识的强化、把关，又重视应试能力的培养、提高；既注意到知识的系统性、条理性，又有重点、难点的把握和突破；既有基本方法的总结强化，又有综合解题技巧的训练提高。因而该书含金量极高，考生在总复习时采用必定在有限的时间内获取最佳的复习效果。

国家教委考试中心主任杨学为指出：高考注重考能力，必须有考生的复习以及中学的教学相配合。希望这套书有助于改进考生的复习和中学的教学，有助于克服在高考复习中长期存在的死记硬背与题海战术，使考生切实体味到怎样从"知识型"向"能力型"转变，从"苦读型"到"巧读型"转变。

需要说明的是，为照顾到广大考生的实际购买能力，使他们能在相同价位、相同篇幅内能汲取到比其它书籍更多的营养，本书采用了小五号字和紧缩式排版，如有阅读上的不便，请谅解。

虽然我们在编写过程中，本着对考生认真负责的态度，章章推敲、节节细审、点点把关，力求能够帮助考生提高应试能力及解题技巧、方法，但书中也难免有疏忽和纰漏之处，恳请广大读者和有关专家不吝指正。

本丛书在编写过程中，得到了各参编学校及航空工业出版社有关领导的大力支持，丛书的统稿及审校工作得到了北京大学有关专家教授的协助和热情支持，在此一并谨致谢忱。

编者

1998年1月于北京大学蔚秀园

目　　录

第一部分　近年高考数学命题走向及复习应考对策

第二部分　数学常考知识点的精要解析

第三部分　高考数学常用思想方法

第一部分　近年高考数学命题走向及复习应考对策

一、1993 ～ 1997 年高考数学命题综述

1993 ～ 1997 年是我国高考制度改革的重要时期，这一时期完成了由老高考到新高考的过渡，到 1995 全国已普遍实行了高中毕业会考制度，从而进入了“3 ＋ 2”新科目组的高考时期，会考制度的实施，建立了评价高中学生学习水平的唯一标准，所以新高考首要职能就是发挥选拔功能，这一过渡时期的完成，标志着高考考试的性质已由事实上的选拔与评价并重，过渡到主要关注选拔与区分；考试内容由考查知识与能力并重，过渡到以考查能力为核心，因此，对这五年的高考与命题很有必要进行回顾，以明确今后的方向。

（一）考试形式

1. 以《考试说明》为依据，因“实”制宜进行微调

(1) 我国地域辽阔，民族众多，考生队伍庞大，层次参差不齐，情况复杂，高考又是有关改革开放、稳定大局的敏感而重大的工作，《考试说明》规定的高考性质、考试内容及考试形式、试卷结构，规范了高考与命题的行为，是高考的指导性文件，同时也是高中教师与学生学习复习的指导性文件，事实证明，以《考试说明》为依据进行的高考实践，无论是对选拔学生、重视区分度，还是对中学教学有良好的导向来说；无论是对全面考查学生的基础知识、基本技能、基本方法，还是对考查学生能力来说；无论是对教育相对对发达的大城市及沿海地区，还是对边远山区来说；特别地，无论对改革开放的大业，还是稳定的大局来说，都是适宜的，因此，在今后相当长的一段时间内，要不断完善《考试说明》，维护它的权威性，保持在《考试说明》指导下考试的稳定性。

(2)《考试说明》依据国家颁布的《教学大纲》规定了考试内容，还规定了试卷中知识比例、题型比例、难度比例等大的原则，但实际情况千变万化，要求人们不断地修正主观意识，以适应新的需要。实践中，每年命题前，首先要认真分析上一年的《试卷评价报告》、《高考统计数据》，根据实际情况，确定当年具体的命题指导思想。如 1995 年确定了“整体保持稳定、文科降低难度，应用加大力度”的指导思想；1996 年确定了“整卷保持稳定，部分力求创新，考能力突出核心，应用题控制难度”的指导思想；1997 年确定了“整卷保持稳定，部分力求创新，考能力突出核心，总体难度下降”的指导思想。在具体贯彻指导思想时，对考试内容及重点，题型比例，整卷的难度比例等，都要进行调整与重新布局。如 1993 年新高考试卷减少了 3 个选择题、1 个填空题，三种题型分数比例分别为 43％、16％、41％；1996 年填空题又减少了 1 个，三种题型分数比例分别为 43％、11％、46％，1997 年与 1996 年相比没有变化。从形式上逐渐向考核能力为主的解答题倾斜，这种动态中的平衡，变化中的稳定，既符合稳定是相对的、变化是绝对的观点，又形成高考命题的优良传统。

2. 坚持改革方向，文、理两卷有所区别

因考试内容的不同，有文、理两科不同的试卷。

80 年代末，因考虑到文科毕业生将来一般从事管理决策工作，对他们掌握知识的范围与深度的要求，可以有别于理科，但对其思维能力的要求，特别是根据情况逻辑判断、科学决策的能力应不低于理科。基于此种考试，决定逐步提高文科试卷的难度。几年来，文科试卷难度一般在 0.50 左右。由于种种原因，我国文科考生实际教学水平较低，造成试卷平均分偏低，给师生带来较大的压力，到 1994 年基本形成这样的共识：文、理科试卷除在知识范围的要求上略有区别外，在基础知识和基本能力考查方面的要求应当一致；在考查一些较高层次能力时，考查目的应基本一致，但要求层次应有所区别，在具体操作上采取“姊妹题”、、控制位置难度、换题等措施，这种试题有所区别、降低要求层次，顺序有所区别、控制位置难度的做法，既坚持了改革的方向，又使文科试卷形成独特的风格，有效地调动了文科师生的积极性。1997 年试题又考虑到文、理科在知识要求和能力要求上的差别，文科试题偏重于具体，而理解试题则偏重于抽象。

（二）考试内容

1. 以能力考查为核心，整卷保持稳定

《考试说明》的考试性质一节中，规定我国“普通高等学校招生统一考试是由合格的高中毕业生参加的选拔性考试，…… 因此高考应具有较高的信度、效度，必要的区分度，适当的难度。”它决定了高考的考试内容，要以考查基本知识为依托，考查能力为核心的特色。

（1）全面考查“三基”，突出重点内容

基础知识是高考的重要内容，是考查能力与数学思想的载体。高考全面考察基础知识，促使学生掌握好中学数学的基本知识、基本技能、基本方法，不仅仅是考查的需要，更是学生走向社会或进一步深造的需要。

有一定的量，才能反映一定的质。命题要有一定的知识的覆盖面，一般考查的知识点都在规定的70%左右（如1997年考查知识面遍及了高中数学十三章，文科十一章），全面考查中还兼顾系统性，并做到重点内容重点考查，如函数、数列、空间线面关系、直线与圆锥曲线等具有奠基性与工具性，是既能适应社会需要，又为进一步学习做好准备的知识。

（2）加强能力考查，重视数学素质

现代信息社会，对数学的需要有一种两极分化的趋势：一方面由于技术的发展，社会降低了对一般公民特殊数学技巧上的要求；另一方面却又增强了对公民在具有较高层次和更普遍的数学素质的要求。因此突出数学科特色，加强对运算能力、思维能力、空间想象能力以及分析问题和解决问题能力的考查，已成为社会所需、大势所趋及高考命题的主题。

命题实践使我们体会到，能力考查要寓于知识考查之中。解答题当然负有考核能力的重任，但以考查“三基”为主的非解答题，也应渗透能力考查的因素。

应当提出的是，以能力考查为核心对中学数学教学的良好导向作用。长期以来，我国数学教学偏重以知识为系统，以传授知识为重点，80年代初，教育界提出“传授知识、培养能力”的新教学思想，高考考查能力的导向更加速了教学向“能力型”的转变，应当意识到这种转变对我国社会主义现代化建设事业的长远影响。

（3）考查数学思想方法，逐步形成共识

进入90年代，我国数学界提出了“数学思想方法”这一具有重大理论与实践意义的课题，经过不断的探讨，特别是我国高考命题的实践与导向，对其意义与内涵由知之不清到逐渐明确深入，尤其是这五年的实践，使之在全国范围内达到共识。

五年来，无论是对有序可操作的数学基本方法，如消去法、待定系数法、配方法、换元法、坐标法……，还是对能力培养与考核核心的思维方法，如分析、综合、归纳、演绎、类比……，以及带有思想观点的属性，较高层次的思想方法，如数形结合、函数与方程、分类讨论、化归与转化的考查已形成较稳定的风格，对于这类思想方法，本书将专辟一章进行探讨。

实践中，我们认识到，对数学思想方法的考查，不能人为地营造试题或刻意追求巧法新法，而是把考查融合在“三基”检测与能力的考核之中，形成自然、流畅的风格。

2. 重视测试潜能，试卷力求创新

传统与创新、稳定与发展是高考与命题永恒的主题，只有正确处理两者的关系，才能继承已有的优良传统，独有的特色，稳定的风格，安定国事民心；又能充满活力，不僵化，能紧随时代步伐，不断汲取国内外最新改革成果，使试题富有创新精神，区分与选拔出优秀的学生。“创新是一个民族进步的灵魂，是国家兴旺发达的不竭动力”，只有不断创新的高考，不能选拔出具有创新能力的人才。

（1）应用题逐步加大考查力度

随着社会经济的发展、改革的前进，要求进入社会的人们有更多的数学意识与数学能力，强调数学应用是社会的需要，当然，数学应用题的考查也是数学本身的需要，数学与数学教育应该源于现实，寓于现实，用于现实，否则数学将是无源之水、无本之木、无用之物，应用题的考查更是高考的需要，应用题的出现，常常有新颖的背景，陌生的环境，脱俗的材料，更需要综合的方法寻求解决途径，从而能考查学生潜能，区分素质。

需要不等于现实。在高考中考查应用题的方向无疑是正确的，但操作上却应慎重。经过1993年和1994年两届高考只在选择题、填空题中出现应用题，在教师、学生已有初步思想准备的情况下，1995年加大了力度，虽然题目较

难，得分率偏低，但并未引起不稳定情绪，1996 年和 1997 年仍坚持改革方向，在解答题中考查，但控制了难度。如 1997 年高考题：

(22) 甲、乙两地相距 S 千米，汽车从甲地匀速行驶到乙地，速度不得超过 c 千米 / 时，已知汽车每小时的运输成本（以元为单位）由可变部分和固定部分组成：可变部分与速度 v（千米 / 时）的平方成正比，比例系数为 b；固定部分为 a 元。

(Ⅰ) 把全程运输成本 y（元）表示为速度 v（千米 / 时）的函数，并指出这个函数的定义域；

(Ⅱ) 为了使全程运输成本最小，汽车应以多大速度行驶？

(Ⅰ) **解**　每小时运输成本为 bv^2+a，因此全程运输成本为 $y=\dfrac{S}{v}\cdot(bv^2+a)$

即　$y=bSv+\dfrac{aS}{v}$，且 $v\in(0,c]$，

(Ⅱ) **分析**　用平均值不等式求 y 的最小值时，应当考虑不等式：$bSv+\dfrac{aS}{v}\geqslant 2\sqrt{ab}S$

中的等号能否成立。如果等号不成立怎么办？这正是对函数思想方法的考查。从函数的角度看，在区间 $(0,c]$ 的某 一个内点上，等号成立，使得 $2\sqrt{ab}S$ 成为函数在该区间上的最小值，这个现象说明函数在区间 $(0,c]$ 上先减后增。这个现象不能发生，这说明什么？一定是该函数在区间上不是先减后增。那么是什么样子呢？这就引导我们去研究函数在该区间上的单调性。

解　$bSv+\dfrac{aS}{v}\geqslant 2\sqrt{ab}S$，且 $bSv=\dfrac{aS}{v}$，即，$v=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 时等号成立。

故当 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}\leqslant c$ 时，$v=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$，全程运输成本最小。

当 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}>c$ 时，设 $0<v_1<v_2\leqslant c$，$y=f(v)$，则 $f(v_1)-f(v_2)=bSv_1-bSv_2+\dfrac{aS}{v_1}-\dfrac{aS}{v_2}=bS(v_1-v_2)+\dfrac{aS(v_2-v_1)}{v_1v_2}=S(v_1-v_2)[b-\dfrac{a}{v_1v_2}]=S(v_1-v_2)\cdot\dfrac{(bv_1v_2-a)}{v_1\cdot v_2}$

$\because$　$v_1<v_2<\sqrt{\dfrac{a}{b}}$　$\therefore v_1\cdot v_2<\dfrac{a}{b}$，即　$bv_1v_2-a<0$，而 $v_1-v_2<0$，所以 $f(v_1)-f(v_2)>0$，$f(v_1)>f(v_2)$

$\therefore$　函数在 $(0,c]$ 上是减函数。故 $v=c$ 时，全程运输成本最小。

应用题的难度比 1996 年有下降，同时在文字叙述中，在关键词语上加黑点，且每个量都明确地给出字母表示，这对于考生理解题意、明确关系大有好处，也是对"放弃应用题"的错误应试指导的一个警告，这对于中学数学应用题的教学大有指导意义。

实践使我们认识到：

改革要有连续性和阶段性。连续性指坚持改革方向，长年不辍；阶段性指改革不能一蹴而就，要循序渐进，阶梯上升，逐步深入。

考查应用题要背景公平，即要贴近教材，贴近生活，必要时给出附加说明与公式。

考查应用题要尽量结合国家形势，有强烈的时代气息，培养学生的社会责任感和应用意识。

(2) 逐步重视识别、理解、解释能力的考查

当今社会信息瞬息万变，科技日新月异，社会迅猛发展，要立足于社会，认识社会，要求人们首先要有能接收信息，识别语言、文字，进而理解它，解释它的能力，即所谓认识世界、改造世界的能力。

高考试题要以文学语言、符号语言、图形语言表述一定的背景材料，要求考生必须读懂、互译、解释，进而以准确流畅的普通语言和数学语言表述解答过程，这恰恰是考查学生识别、理解、解释语言能力的全过程。

近年来，高考中出现了不少立意新颖、表述简捷、构思精巧的试题，为信息迁移能力的考查提供了范例。今后应坚持改革方向，维护改革成果，继续完善和发展这种赋有信息时代特色的试题。

(3) 坚持开放、探索性试题之路

世上万事万物都是在探索中前进的，开放中改革，要培养创造性人才，首先要培养有探索精神与能力的人才。

数学的发生与发展更充满着探索精神。从数学发展来看，"观察、实验、猜测、抽象、证实"是发现问题和解决问

题的重要途径。在1993年的命题指导思想中，首先提出了“考查应用与探索性”问题，并在当年设计了数列求和与立体几何两道探索性解答题，经过四年的实践，人们认识到探索性试题是考查学生潜能、选拔学生区分度较高的题型，今后应坚持探索之路，并加大开放程度。

(4) 大胆尝试新颖试题，坚定创新方向

高考命题的生命力在于创新，否则会僵化枯槁，失去高考功能。五年来，高考数学尝试了如1995年和1996年这样立意情景新颖的试题；1994年以物理素材为依托，背景、语言表达新颖的试题；1996年和1997年立体几何解答题思维方式新颖、解法新颖、设问新颖的试题；当然今后还要不断力求创新，探索新颖试题之路。

实践使我们认识到，改革创新之路要辨准方向，大胆探索，渐进改革，步伐稳妥。

(三) 命题科学的研究

高考制度确定后，为圆满完成与实现考试性质规定的目标，考试内容规定的考查目的，考试形式中规划的试卷结构，首要的工作就是命题。

命题是一门科学，是一门充满许多未知的急待探索的综合科学。

1. 整体着眼布局，单题注重立意

这是实践中总结出的命题的实施方法。命题的核心由两部分组成，一是命题原则，指导思想；二是实现原则的具体方案。

《考试说明》是指导性文件，但《考试说明》只给出了一些大的原则，如何实现这些原则，实现考查目的，必须有具体的指导思想和落实步骤。“整体着眼布局”就是要求根据原则，结合前一年的反馈信息和当年的实际情况，确定指导思想、整体结构；“单题注重立意”，即个体试题的测试目的由整体布局决定，要求编拟题目时，要根据确定的指导思想和目的选取材料，这种以立意为主线的命题方式，有别于以知识为主线的方式，以立意为主线的方式把考查目的放在首位，情景、设问、知识选剪都服务于立意，从而有效地避免考查目的的随机性的盲目性，能最大限度使考试科学化、标准化，更大程度地保证实现以考查能力为核心，以选拔为目的的考试目标。

2. 科学化和标准化

人们关注的高考试题“不超纲、不出错、不过难”，实质上就是高考试题的科学化、标准化。

“不超纲”指考查内容和试卷结构符合《考试说明》的规定；“不出错”指考试不出科学性错误，试题的设问、表述符合习惯，无歧意，评分标准及参考答案符合实际情况，赋分合理科学，能有效地控制评分误差；“不过难”指试卷难度，试题难度不严重脱离实际，符合教育测量学，按我国国情厘定的难度约为0.55。

实践告诉我们，高考命题经常要做的工作就是调整结构，控制难度，可以说难度是命题的关键，多年来采取的减少题量、降低起点、均衡压轴题等一系列措施，其目的都是为了控制难度，突出考查学生能力这一核心与关键问题。

我们认为“不超纲、不出错、不过难”都属于科学化范畴，标准化实际上也属于科学化。

多年实际使人们认识到达到教育测量学所赋的科学难度值，还要经过长期试验、探索，是难度较大的科学实验。

3. 建立相对稳定、结构合理的命题队伍

它的重要性无疑已被多年的高考实践所证明。

没有一支相对稳定的命题队伍，就不会有相对稳定的高考；

没有一支结构合理的命题队伍，就不会有结构合理的试卷；

没有一支高素质的命题队伍，就会有高质量的考题；

这些年来，建立一支专业与业余相结合的命题队伍，是命题与高考得以逐年改革前进的有力保证。

所谓专业与业余相结合有两层含意，其一是，国家教委考试中心的命题组织者、领导者是专业人员，命题组其他人员，来自大专院校，科研、教材编写部门，中学教研机构是业余命题人员，因为他们都有各自的专业。命题组成员专业不同，经历各异，但能取长弥短，优势互补，团结协作，能有效地完成重大的命题任务；其二是命题组成员与评价组成员及广大关心、支持高考事业的人们。多年来命题组从广大人民群众中汲取了许多有益的建议和及时的反馈信息，使高考命题与社会息息相关，命运相连，使这一多少带些神秘色彩的事业扎根于群众的沃土之中，不断

地吸取乳汁与营养，得以茁壮成长。

4. 编制试题的基本做法

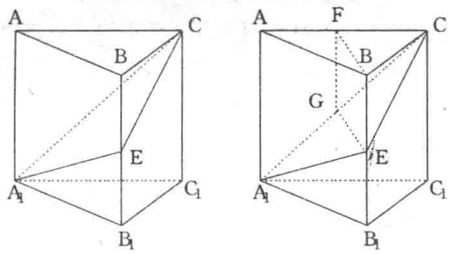
纵观近5年试题的编制，坚持和发展了以下基本做法：

(1) 坚持“两个有利”，严格遵循《考试说明》。

五年来编制的试题，在坚持“两个有利”前提下，严格遵循《考试说明》，使得高考发挥了较好的导向作用。试题重点考察高中数学的主体内容和带有通性通法的有关知识（如函数、不等式、三角函数恒等变换、立体几何中的直线与平面关系、解析几何的基本内容），以及解题的三大基本能力，并把测试的落脚点放在运用重要数学内容所蕴含的数学基本思想（如数形结合、函数与方程、等价转化、分类讨论等）上。’97与前两年注意覆盖《考试说明》所列知识点（’95文理共考查91个知识点，占总数70%；’96文理共考查的知识点也占总知识点的70%以上）相比，更强调《考试说明》所蕴含的数学思想与方法的覆盖。特别地，试题还及时吸收数学教改的成功经验，以此推动教学改革走向全面与深入发展。如逐年加大应用题的考查比重，’96、’97又注意编制了为高中新数学教学大纲的使用作铺垫的试题。

(2) 试题形式稳中求变。

五年来编制试题，坚持用试题形式稳中有变来保持试题的适度变化，’95较之’94注意了创新试题情景的探索。如’95理(12)题：“等差数列a_n、b_n的前n项和分别为S_n与T_n，若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$等于(　　)(以下从略)”在已知等差数列和关系的情景中，考察等差数列间关系，这与从等差数列出发研究其和关系的常见情景相比是一新的情景。在’95理科试题中，类似此法构作的题还有(11)、(14)等；’96较之’95又新增了革新试题的表述，如’96理(22(Ⅰ))题：“如图，在正三棱柱$ABC—A_1B_1C_1$中，$E\in BB_1$，截面$A_1EC\perp$侧面，AC_1。(Ⅰ)求证：$BE=EB_1$，(Ⅱ)(从略)。注意：在下面横线上填写适当内容，使之成为(Ⅰ)的完整证明。



(Ⅰ)证明：在截面A_1EC内，过E作$EG\perp AC_1C$，G是垂足。

①∵ __________ ∴$EG\perp$侧面AG_1；取AC中点F，连结BF，FG，由$AB=BC$，得$BF\perp AC$；

②∵ __________ ∴$BF\perp$侧面AC_1；得$BF\parallel EG$，BF、EG确定一个平面，交侧面AC_1于FG；

③∵ __________ ∴$BE\parallel FG$，四边形$BEGF$是平行四边形，$BE=FG$；

④∵ __________ ∴$FG\parallel AA_1$，$\triangle AA_1C\backsim\triangle FGC$；

⑤∵ __________ ∴$FG=\frac{1}{2}AA_1=\frac{1}{2}BB_1$，即$BE=\frac{1}{2}BB_1$，故$BE=EB_1$”。

这样的串联式填空题是首次出现，应用题的侧重也有了显著的变化。

’97又在选择题和填空题上进行了新的探索，如第(13)题第(19)题：

(13) 定义在区间$(-\infty,+\infty)$的奇函数$f(x)$为增函数；偶函数$g(x)$在区间$[0,+\infty)$的图象与$f(x)$的图象重合，设$a>b>0$，给出下列不等式：

①$f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b)$；　　②$f(b)-f(-a)<g(a)-g(-b)$；

③$f(a)-f(-b)>g(b)-g(-a)$；　　④$f(a)-f(-b)<g(b)-g(-a)$，

其中成立的是

(A)①与④　(B)②与③　(C)①与③　(D)②与④

(19) 已知m、l是直线，α、β是平面，给出下列命题：

① 若l垂直于α内的两条相交直线，则$l\perp\alpha$；

② 若l平行于α，则l平行于α内的所有直线；

③ 若$m\subset\alpha$，$l\subset\beta$，且$l\perp m$，则$\alpha\perp\beta$；

④ 若$l\subset\beta$，且$l\perp\alpha$，则$\alpha\perp\beta$；

⑤ 若$m\subset\alpha$，$l\perp\beta$，且$\alpha\parallel\beta$，则$m\parallel l$。

其中正确的命题的序号是＿＿＿＿＿＿。(注:把你认为正确的命题的序号都填上)

以上题型实质上是多项选择题,只不过融合在单选题和填空题里面,弥补了多年来数学高考试题题型略显单调的不足。这也许是以后数学题型改革的方向。

(3) 增加有效区分的可靠性。

编制试题只考虑到构成大学录取分数有效的数学分数之间的区分,而对有效分数以下考生之间的差异则不刻意追求,这是对高考本质认识的结果。为了减少随机因素所导致的区分不当,提高高考区分的可靠性,自'94 以来提高了整卷中各题的区分能力(较为显著的是由'95 理科的三题把关增加到'96 的六题把关,而且各题起点较之'95 普遍提高,'97 解答题的起点又稍有偏高。)。

(4) 联系日常生活的实际,关注社会发展的重大问题。

选定试题载体注意反映时代特征和要求,既是强化数学教育社会功能的需要,也是高考发挥选拔功能的需要。如'94 理(20) 题,是一物理测量问题,也是日常生活中的普遍性问题——找"最佳近似值";又如'95 理(24) 题,不仅是市场物价调控问题,而且蕴含其中的考生对政府功能的认识是公民有效参与现代社会生活必备的素养;至于'96 理(23) 题,是人口与土壤资源合理利用的问题,这是全人类在发展生产中都面临的重要课题,而在我国对于理解计划生育国策又有特殊的意义;'97 理(22) 题,是关于汽车全程运输成本的问题,不仅贴近生活,更贴近于课本,更易于考生理解,量与量间的关系明显。

(5) 从考生实际出发考察学习潜能。

为了满足有效识别考生学习潜能的需要,近五年编制试题注意从当年考生实际水平出发,只强调对各科内的有效区分。五年来各年文科试题的绝对难度总体水平一直低于相应年份的理科水平,但反映难度(得分率难度)却非如此('95:理科 0.59,文科 0.54;'96 Ⅱ 卷:理科 0.34、文科 0.32;'97:理科 0.56,文科 0.55),而且,编制的试题在考察考生用高中段数学综合能力求解的基础上,突出考察考生掌握进一步学习密切相关的知识和运用它来解决问题的能力(如'94 理(20) 题就涉及大学数理统计的参数估计;又如'96 理(15) 题,是函数的延拓;'96 理(25) 题,则与切比雪夫多项式的马尔科夫定理有关;以及'96 对不等式的重点考察、'97 第 24 题通过代数题考查逻辑思维能力),充分体现了数学学科特点。此外,为了保证试题知识载体和形式对考生的公平,近五年的命题还注意选用参与正常高中数学教学活动后能熟知的知识载体,以及熟悉程度相同的题型。

(6) 评分标准尽可能的易于操作。

编制能反映出各回答水平本质差异的无歧义便于操作的评分标准的题目,参是编制试题与编制习题的最显著差别。近五年制定评分标准在注意对评分操作过程误差产生源,以及由试题合成产生的合成整卷误差作预控的同时,提高了评分标准的可操作性。突出的标志就是比较不同的解题过程,寻求有试题价值的解法来建构客观公正的评分标准结构(标准答案与评分标准),如'96 年理(22(Ⅰ)) 题就是这一探索的代表。

(四) 对教学与复习的几点建议

(1) 教学要全面。由于试题载体涉及到《考试说明》所列的大部分知识(也是中学数学教学大纲的知识),以及这些知识所蕴含的数学思想与方法,而且试题也朝着多题把关的变化;事实证明,只注重特定数学知识、数学方法和数学思想的教学与复习已难于确保考生获得与实际水平相称的成绩,更不用说临场充分(超水平) 发挥了。只有平时教学全面,高度重视三基,特别是注意健全数学知识的发生过程,使考生在全面掌握知识的基础上形成分析和解决问题(实际的与数学的) 的能力,才能减少失分,保持其稳定发挥水平。

(2) 注意应用、贴近生活、贴近时代。增强数学内容与载体的时代特征为发挥数学教育社会功能所必需。具体教学要联系实际,涉用到的知识载体要既有与学生日常生活密切相关的生活经历(经验),又有其他学科的知识,以及当今社会发展的成果与问题,使学生得到必要的应用数学训练,从而体验用数学解决问题,培养出应用数学的意识和掌握用数学解决实际问题的思考方法。

(3) 注意培养在陌生情景中自我心理调节的能力。在不熟悉的环境中能迅速有效开展工作的能力,是一个人综合能力强的标志之一,数学教育应注意学生这种能力的培养。由于试题所用载体的情景和表述形式每年都可能有出人意料之外的变化,显然用"题海战术" 达到考生在考试中遇不到陌生试题情景的努力是低效、不现实的,而这又很有可能影响考生发挥其真实水平。'96 理(22(Ⅰ)) 的单位时间得分率低,有的考生甚至作不出符合要求的解答,究其原因,很大程度上是考生缺乏陌生情景心理调节能力所产生的心理障碍。因此,无论从提高学生的公民素质角

度，还是从提高考生高考成绩的需要出发，都要求在中学数学教学中刻意培养学生面对陌生环境与遇突发事件不乱、不惧、心态如常、自信、敏锐、果断的素质。

(4) 加强大学数学与中学数学的结合部教学。所谓结合部是指在高中后进一步学习中能继续直接用到的中学教学知识、方法与思想的全体。当把中学数学视为进一步学习所必要的基础时，利用高等数学的立场和观点分析中学数学的构成要素(知识点) 的地位，对提高学生学习的潜能是非常重要的。这就要求在教学中对具有结合部性质的内容(如函数、不等式、解折几何等)，注意与大学要求相关的衔接，通过信息迁移的手段把大学相关的问题转化为中学数学的问题，使学生初步接触到这些问题的特殊情形及解法，为日后的学习作铺垫。为此，数学教师应不断提高自身的数学素养，注意数学知识的更新。

(5) 用系统论的观点认识知识点的要求，将知识点统一于数学思想与方法。学生在数学学习过程中利用已有的数学认知结构重新建构新的数学认知结构，由于系统效应，在新的数学认知结构中彼此有直接逻辑联系的那些知识点达到的要求，不可能和形成过程中针对单个知识点的局部要求一致，这些知识点因统一于相同的数学思想或方法，其实际达到的水平均不低于局部的要求。但是，中学数学诸如函数与方程、分类讨论、等价转化、数形结合等思想和配方法、换元法、待定系数法、数学归纳法、比较法等不依赖具体知识载体的方法没有明确的要求，因此，应在数学思想与方法的层次对学生进行必要的训练。平时教学乃至迎考复习都要作这方面的工作，使 学生领会并不断丰富这些思想与方法的载体，而不把这些思想与方法禁锢在某一载体上加以死记硬背。

(6) 作好过渡到新《高级中学数学教学大纲》的工作。对于新大纲降低要求的知识似不宜再坚持高的要求，复习迎考应对新、旧两个教学大纲要求一致的内容予以足够的重视。

二、高考数学复习应考对策

每年一度的高考数学总复习，收效的好坏不一定和教师的主观意愿和主观努力的程度正比，不少教师拖长了总复习的时间，向学生布置了大量的作业、天南海北的复习资料采用的真不少，可是复习效果很难如愿，高中数学总复习是策略性很高、针对性强的一个精心设计和不断反馈、不断调整的过程。针对高考数学总复习的特点，任课教师有必要着重研究以下三个方面的问题。

(一) 认真研究《高考数学科考试说明》(以下简称《说明》)

开始进人总复习时，要认真学习一遍《说明》，从宏观上准确掌握《说明》序言中的精神和考试性质，准确掌握考试的内容，做到复习不超纲，不作无用之功，从微观上细心推敲以下几个内容：

1. 细心推敲对高考内容四个不同层次的要求，要准确掌握哪些内容是要求了解的，哪些内容是要求理解的，哪些内容是要求掌握的，哪些内容是要求灵活运用和综合运用的；

2. 细心推敲要考查的数学思想和数学方法各有哪些；

3. 细心推敲要考查的四种能力，为什么说运算能力、逻辑思维能力与空间想象能力称为数学能力，而把分析问题和解决问题的能力称为较高层次的能力；

4. 细心推敲文史类数学与理工农医类数学不同的复习要求；

5. 掌握选择题、填空题、解答题这三种题型各占分数的比例，代数、立体几何、解析几何这三个数学分支所占分数的比例；

6. 近年来对某些知识点的要求有所降低，对某些知识点的要求更加具体，比如代数中有关数列递推公式与数列通项公式的互化要求、立体几何中有关异面直线的距离以及求截面的要求、解析几何中有关极坐标方程与直角坐标方程的互化要求等等，对于这些降低要求的内容，教师不应该从个人兴趣出发给于“升温”，对超纲内容要有“忍痛割爱”。等到高考前一个月左右，再学习一遍《说明》，看看哪些方面的复习与《说明》的要求还有距离，以便及时查漏补缺、突出重点。总之，在整个过程中，始终以《说明》为准绳和规范。

(二) 要细心研究和正确处理教科书与复习资料的关系

课本的内容是依据《教学大纲》编写的，在课本中必学内容与选学内容都有明确的标记。近年来的高考试题有时是课本上的原题，这是引导教师平日的教学与学生的复习不要脱离课本。其余绝大部分的高考试题都不是课本上的原题，但这些题目也决不是与《教学大纲》和课本毫不相干的偏题、怪题、难题，而是把课本上的题目加工改造，

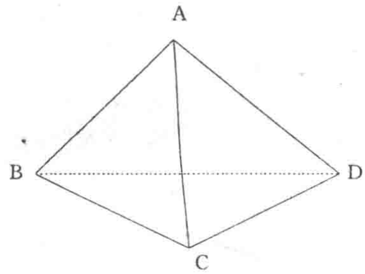
或是经过变形、变位，或是变换设问的角度，或是拓宽结论，或是把某些题目经过组合与嫁接而成，这样的试题使参加考试的学生得到公平竞争的机会。例如，95 年的高考数学题，文科试卷中有 12 道题、理科试卷中有 10 道题，来源于课本。如文科试卷第(21) 题、理科试卷第(18)、(22) 题直接取材于《代数》上册。因此，我们复习时要以课本为本，《教学大纲》与《说明》为纲。

当然，总复习时不能只是简单地重复课本，而应从问题的来龙去脉，从不同性质内容的分门别类，从了解、理解、掌握、灵活运用等不同层次的要求去组织教材、分析教材、消化教材、深化教材，在复习知识的同时提高相应的数学能力。目前各地出售的复习资料很多，这些复习资料应该作为复习过程中的参考与补充，从复习资料中选题不能与《说明》的要求和范围脱节。某些复习资料有课本上的选学内容、这些内容可供数学竞赛选用而不适于高考复习选用。还有个别复习资料仍是若干年以前旧复习资料的重版，没有把最近几年教材的某些变化引进来，如(函数定义)。这样势必给学生带来混乱，其实在总复习时只要认真选用密切结合《说明》和结合本省(市) 的一两种复习资料就够了。教学实践证明，较多地选用各种版本的复习资料，只会使学生无所适从，从而加重作业负担。

(三) 关于高考数学总复习的阶段安排，根据教学实践得知还是安排成四个复习阶段较好。

第一阶段是把课本上的所有内容(选学内容除外) 系统复习一遍，大约占去总复习时间的一半，这一阶段主要追求三个目标，一是把高中数学 130 个知识点都复习到，不能猜题押宝，二是重点内容必须紧紧抓住，三是难点必须突破、疑惑之点必须澄清。因为总复习主要是通过例题进行的，所以例题的选择应有高度的代表性和较大的知识覆盖面。例题的选择可以设成一题多问的形式，以便加大知识的覆盖面；也可以设计一个题组，以便系统地理解和掌握某个专题；也可以有针对性地编选一些澄清概念的题目，起到补缺消疑的作用，仅用以下例题作参考。

例 1　如图在正四面体 $ABCD$ 中，



(1) 求对棱 AB 与 CD 所成的角与它们之间的距离(异面直线所成的角与异面直线间的距离)；

(2) 求侧棱与底面所成的角(直线与平面所成的角)；

(3) 求相邻两个面所成的角(平面与平面所成的角)；

(4) 求正四面体的高与体积；

(5) 求与正四面体两个顶点距离相等的点的轨迹；

(6) 求与正四面体的两个面距离相等的点的轨迹；

(7) 求正四面体内切球的体积；

(8) 求正四面体外接球的体积；

(9) 求证正四面体内一点到四个面的距离之和是定值；

(10) 设正四面体的中心为 O，$\angle AOB$ 的大小(这是化学中甲烷 CH_4 的键角)。

第二复习阶段可搞些专题复习。例如把不同章节、不同分支而又性质相同(或方法相同) 的内容归并成一条知识链，这样就会使学生感到书本越读越薄；对某些典型题目采用一题多解的方法，培养学生的发散思维与灵活运用知识、综合运用知识的能力；对某些典型题目采用多题一解的方法，从中提炼相应的数学思想与数方法，在此阶段还应该搞一些联系实际和富有探索性的练习，培养学生分析问题和解决问题以及创造性的思维能力。总之，在这一阶段要知识归类、方法归类、加大数学思想方法的训练，着重提高解题能力，使学过的知识经过整理加工、融汇贯通起到知识升华的作用。这一复习阶段大约占去总复习时间的 $\frac{1}{3}$，下面给出有关这方面的一些复习参考题。

例 2　已知 $y = f(x)$ 的图象，如何画出 $y = f(x+a)$，$y + b = f(x)$，$y = Af(x)$，$y = f(mx)$，$y = f(-x)$，$y = -f(x)$，$y = f^{-1}(x)$，$y = |f(x)|$，$y = f(|x|)$ 的图象。

例 3　比较以下每组实数的大小：

(1) 已知 $x \in R$，比较 x^3 与 $x^2 - x + 1$ 的大小(用求差法)

(2) 比较 16^{18} 与 18^{16} 的大小(用求商的方法)

(3) 已知 $0 < a < b < 1$，设 a^a, a^b, b^a, b^b 中的最大值为 M，最小值为 m。求 M 与 m(用幂函数与指数函数的性质比大小)。

(4) 已知 $0 < a < b < 1$，比较 $\log_a b, \log_b a, \log_{\frac{1}{a}} b, \log_{\frac{1}{b}} a$ 的大小(用对数函数的性质比大小)。

例 4　(1) 抛物线 $y=x^2$ 上若存在不同的两点关于直线 $l:kx+y-3=0$ 对称，

① 求两对称点所连线段的中点的轨迹方程。② 求 k 的取值范围。

(2) 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 试确定 m 的取值范围，使得对于直线 $l:y=4x+m$，椭圆 C 上有不同的两点关于 l 对称。

(3) 若双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 上存在着关于直线 $l:y=kx+2$ 对称的点，① 求对称点连线中点的轨迹方程，② 求 k 的取值范围。

例 5　已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $Sn=3n^2+5n$，数列 $\{b_n\}$ 中 $b_1=8$，$b_{n+1}=\frac{b_n}{64}$，且存在一个实数 c，使 n 取任何自然数时，$a_n+log_c b_n$ 恒为常数 M，求 c 与 M。

第三复习阶段是教师引导学生研究关于选择题、填空题与解答题的解答能力与解答技巧。在解答选择题的时候，针对目前数学试卷采用四选一的单项选择题的特点，不要让学生对所有选择题一律采用正面求解对号入坐的方法，可针对不同问题选用不同方法，如筛选法、赋值法、验证法、逻辑分析法等，请看以下几个例题：

例 6　$\lg(\cos x-1)^2=($　$)$

(A) $\lg(\cos^2 x-1)$　　(B) $[\lg(\cos x-1)]^2$

(C) $2\lg(\cos x-1)$　　(D) $4\lg|\sin\frac{x}{2}|+2\lg 2$

(用筛选法，很容易筛去(A)，(B)，(C) 而选(D)

例 7　已知 a,b 是两个不相等的正数，$P=(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})$，$Q=(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}})^2$，$R=(\frac{a+b}{2}+\frac{2}{a+b})^2$，那么数值最大的一个是(　　)

(A) P　(B) Q　(C) R　(D) 与 a,b 的取值有关。

(给 a,b 以不同的值，由赋值法可知，正确的答案选(D))

例 8　若 $||x-2|-1|=a$ 有三个整数解，则整数 a 的值是(　　)

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

(将选支代入题干，由验证法可知选(B))

例 9　关于 x 的方程 $\sqrt{1-x^2}=kx+2$ 有唯一实数解，则实数 k 的取值范围是(　　)

(A) $k=\pm\sqrt{3}$　　(B) $k<-2$ 或 $k>2$

(C) $-2<k<2$　　(D) $k<-2$ 或 $k>2$ 或 $k=\pm\sqrt{3}$

(求图形 $y=\sqrt{1-x^2}$ 与 $y=kx+2$ 的交点，容易知道正确答案是(D))

关于填空题的解法，应该把“准确”、“迅速”这四个字放在首位。

如何做到“准确”？最好先使学生克服解题时屡见不鲜的“会而不对，对而不全”的毛病。

例 10　函数 $y=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值是__________

(解此题时要用平均值不等式，如果不考虑等式能否成立的条件就会得出错解 2，如果考虑到等式能否成立的条件，正确的解是 $\frac{5}{2}$)

例 11　已知 $a\in R$，在复数集内方程 $x^2+ax+1=0$ 的二根 α,β，且满足 $|\alpha-\beta|=1$，则 $a=$__________

(解此题时，如果只考虑到实数根，会得出 $a=\pm\sqrt{5}$，如果同时考虑到实根或虚根，就会得出正确答案是 $\pm\sqrt{5}$ 或 $\pm\sqrt{3}$)

在答填空题时，如何才能做到“迅速”呢？第一要灵活选择最简捷的解法；第二要合理跳步、省略中间步骤；第三要加强口算、熟记一些常用的数据或结论，请看以下例题：

例 12　A,B,C,D,E 五人站队，如果 B 必站在 A 的右边，那么站法共有________种。

(解此题时可选择整体处理的方法，显然是五个元素全排列数的一半，即 $\frac{1}{2}P_5^5$)

例 13　直线 $y = kx + b$ 被抛物线 $x^2 = 2py(p > 0)$ 所截的弦长是________。

（解此题时，把 $y = kx + b$ 代入 $x^2 = 2py$ 得 $x^2 - 2pkx - 2pb = 0$，然后代入弦长公式 $\sqrt{(1 + k^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]}$

在完成解答题的时候，审题要细心，审清题目之后在头脑中要拟定解题计划，解题步骤要完整、解题格式要规范、所画图形（成其是立体几何的图形）要清晰正确。因为高考试卷中的解答题是分段评分的，因此解题过程的关键步骤必须突出，在得分点上一定要取得满意的分数，即使对于少数的压轴题难以下手的时候，也要把它分解成几个子问题，采取分散难点，各个击破的策略，在解题过程中能写几步就写几步，争取得分，对于解答题采用的解法尽量用常见的通法，少用或不用难以被别人理解 的特殊方法或技巧，其次，因为解答题的综合性强、题型新颖、数学思想与数学方法体现较多，在完成这些大题的时候要有意识地充分运用分类讨论、等价转化、数形结合、函数与方程等数学思想。

第四复习阶段是在临近高考前的一个多月，教师可选择或自己组织二至三套综合练习题，要求学生在规定时间内，真正独立完成，考出真实的成绩来，教师对这几套练习题要认真阅卷评分，针对存在问题在课堂上进行严格讲评。讲评之后再让学生对试卷中的主要错误一一改正。最后让每个学生针对自己做这几套题的情况写出考后总结，总结自己答卷时间安排上是否合适?失误丢分在何处?在失误丢分的地方发现自己在知识、能力和方法上有什么缺陷，今后如何弥补这些缺陷，从而使自己的解题能力和得分率得到进一步的提高。

三、如何培养高考数学的应试能力

近年高考数学试题较好地贯彻了“稳定大局，贯彻《考试说明》，调整难度、积极探索”的指导思想；体现“测试中学数学的基础知识，基本方法，基本技能，运算能力，逻辑推理能力，空间想象能力，分析问题和解决问题的能力”的命题原则，坚持“出活题，考基础，考能力”的原则。

知识是能力的载体，领悟并逐步学会运用蕴含在知识发生、发展和深化过程中，贯穿在发现问题与解决问题过程中的数学思想方法，是从根本上提高素质，提高数学科能力的必由之路，只有通过对数学思想的不断积累，不断总结经验，才能由知识型向能力型转化，不断提高学习能力和学习水平。

（一）建立科学合理的认知结构

1. 做好总结，编织科学知识网络

我国著名的数学家华罗庚先生认为，学习有两个过程：一个是“从薄到厚”，一个是“从厚到薄”。前者是知识不断丰富、积累的过程，是“量”的积累；“由厚到薄”则是“质”的飞跃 。我国宋代大文学家韩愈在《进学解》中说：“记事者必提其要，纂言者必钩其玄”。“提要钩玄”就是我们通过复习、总结，使之达到“由厚到薄”的一把钥匙。

我们在高考复习中，要通过总结，编织科学的知识网络，以求融会贯通、透彻理解，既便于记忆贮存，又便于应用时随时提取。

2. 通过总结掌握解决数学问题的通法

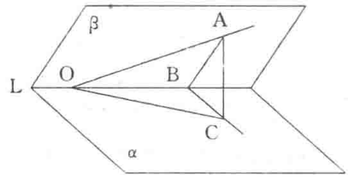
高考试题，对中学教学中的主体内容突出进行考查，考查时不追求特殊技巧，着重在“通性、通法”上，我们总结时，要总结数学科中解决问题的基本思路和方法，重点放在最有价值的常规方法的应用上，特别是每章知识所给出的解决问题的一般方法。

3. 通过总结揭示知识之间的内在联系

数学科是一个有机的整体，各章节及各分支（代数、三角、立体几何、解析几何）都分别有各自的系统，然而它们之间又都存在着密切的联系，在一定条件下可以互相转化。

例如，在一个 45^0 的二面角 $\alpha - l - \beta$ 的面 β 内，有射线 OA 与棱 l 成 45^0 角，求射线 OA 与面 α 所成的角的大小。这就需要理解二面角及其平面角的概念，直线与平面所成角的概念及它们的联系，还需画出图形，作出有关的角，通过计算来解决。设 O 在棱 l 上，A 为 OA 上任意一点，过 A 作 $AB \perp l$ 于 B，$AC \perp \alpha$ 于 C，连 BC 和 OC，则 $\angle ABC$ 为二面角 $\alpha - l - \beta$ 的平面角，$\therefore \angle ABC = 45^0$，则 $\angle AOC$ 为 OA 与 α 所成的角。设 $OB = a$，则 $AB = a$，$OA = \sqrt{2}a$，$AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$，便可得出 $\angle AOC = 30^0$。

又如，求使得方程$\cos 2x - 3\sin x + m = 0$有解的实数$m$的取值范围。如果经过分析可以得出只要$m$值在$3\sin x - \cos 2x$的值域之中，则方程必有解，问题即可转化为求$m = 3\sin x - \cos 2x$的值域问题。解之得$-\frac{17}{8} \leqslant m \leqslant 4$。

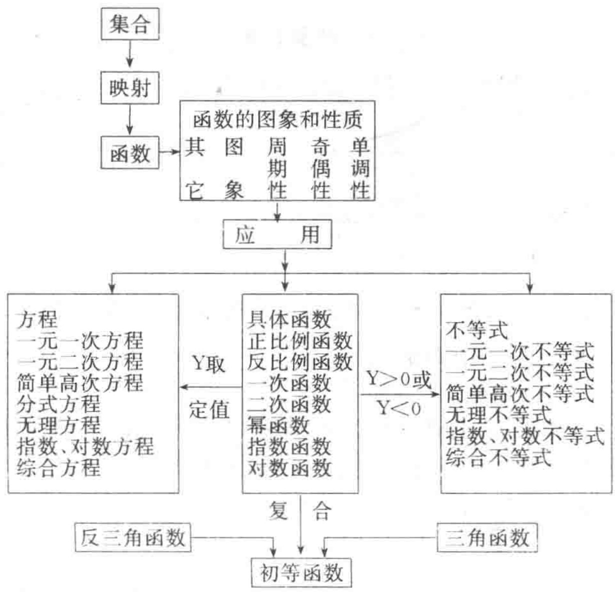


4. **几个高中数学章节总结的模式范例**

下面给出代数、立体几何和解析几何的第一章的总结，作为启示，给同学们参考之用。并希望同学们把高中数学的各个章节都认真做好总结，以便对中学阶段所涉及的数学基础知识(概念、公理、定理、性质、法则、公式等)基本方法(如配方法、消元法、代入法、解析法、待定系数法等基本数学方法，以及分析法、综合法、归纳法、演绎法、反证法等基本逻辑方法)和基本技能(如按照一定步骤进行演算、变形、推理等技能)做到掌握与落实，从而为提高能力与素质打下坚实的基础。

A. 函　　数

(1) 知识网络(如图)



(2) 方法与应用范例

① 求函数的定义域，即求函数自变量x取值范围，通常转化为解不等式或不等式组。

例　(Ⅰ)求$y = lg\sin x + \sqrt{27 - 6x - x^2}$的定义域

解　$\begin{cases} \sin x < 0 \\ 27 - 6x - x^2 \geqslant 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2k\pi < x < 2k\pi + \pi \quad (k \in z) \\ -9 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

解之得定义域为$(-2\pi, -\pi) \cup (0, 3]$

(Ⅱ)已知函数$f(x)$的定义域为$[1, 3]$，求函数$f(x^2 - 1)$和$g(x) = f(x + a) + f(x - a)$的定义域(其中$(a > 0)$)

解　由$1 < x^2 - 1 \leqslant 3$得$f(x^2 - 1)$定义域为$[-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2]$

由$\begin{cases} 1 < x + a \leqslant 3 \\ 1 < x - a \leqslant 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 1 - a < x \leqslant 3 - a \\ 1 + a < x \leqslant 3 + a \end{matrix}$ 解之，只有当$0 < a < 1$时，不等式解集为$(1 + a, 3 - a]$，否则不等式解集为空集。说明当$0 < a < 1$时，$g(x)$才能是x的函数，且其定义域为$(1 + a, 3 - a]$。

② 求函数的值域。通常利用配方法、换元法等变形手段，根据函数的单调性及平均不等式来求函数的值域。

例2　求函数值域(Ⅰ)$y = \frac{2x - 1}{x - 1}$

解　$y = \frac{2x - 1}{x - 1} = \frac{2(x - 1) + 1}{x - 1} = 2 + \frac{1}{x - 1}$，值域为$(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$。

(Ⅱ)$y = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$、$x \in [3, 9)$。

解　函数为减函数，值域为$(-3, -2]$。

(Ⅲ)$y = -x^2 + 3x + 1$、$x \in [-2, 1)$。

解　$y = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{13}{4}$，$x \in [-2, 1)$时函数递增，

∴ 其值域为$[-11, 3)$。

(Ⅳ)$y = \sin^2 x - \sin x - 1$，$x \in R$。

解 设$t=\sin x$、则$t\in(-1,1)$。$y=(t-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}$在$t\in(-1、1)$上非单调函数，

$\therefore$ 其值域为$(\dfrac{3}{4},1)$。

(Ⅴ) 分别求$y=x+\dfrac{1}{x}$在区间$(0,\dfrac{1}{2})$和$(\dfrac{1}{2},3)$上的值域。

解 由平均不等式知，当$x>0$时，$x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$，当且仅当$x=1$时，取得最小值2，还可以证明，函数在区间$(0,1]$上递减，在区间$[1,+\infty)$上递增，故$y=x+\dfrac{1}{x}$在区间$(0,\dfrac{1}{2})$上递减，$\therefore$ 值域为$(\dfrac{5}{2},+\infty)$。在$[\dfrac{1}{2},3]$上非单调，其值域应为在区间$[\dfrac{1}{2},1]$和$(1,3)$上的值域的并集，即$[2,\dfrac{10}{3}]$。

③ 求函数式的最值，求最值与求值域是两个不同的概念，但其方法类似，求最值时必须说明取得最值的条件。

例3 (Ⅰ) 已知实数x、y满足$3x^2+2y^2=6x$，求x^2+y^2的最大值和最小值。

解 由条件，把x^2+y^2化为x的函数：$x^2+y^2=-\dfrac{1}{2}x^2+3x=-\dfrac{1}{2}(x-3)^2+\dfrac{9}{2}$，又由条件知$x\in[0,2]$，故当$x=0$时，$x^2+y^2$有最小值0，$x=2$时有最大值4。

(Ⅱ) 设$x>1$，求$\dfrac{10x^2}{x-1}$的最小值。

解 $\dfrac{10x^2}{x-1}=\dfrac{10x(x-1)+10(x-1)+10}{x-1}=10x+10+\dfrac{10}{x-1}=10(x-1)+\dfrac{10}{(x-1)}+20\geqslant 40$，当且仅当$10(x-1)=\dfrac{10}{x-1}$即$x=2$时取等号。即当$x=2$时，$\dfrac{10x^2}{x-1}$取得最小值40。

另解 设$y=\dfrac{10x^2}{x-1}$变形为$10x^2-yx+y=0$，(*). 该关于x的方程有实数根，故$y^2-40y\geqslant 0$ 又$y>0$

$\therefore y\geqslant 40$，当$y=40$时方程(*)的根为$x=2>1$ $\therefore$ 当$x=2$时$\dfrac{10x^2}{x-1}$取得最小值40.

此方法常称作判别式法。

④ 关于函数的奇偶性

判断函数的奇偶性时，一是判断其定义域在数轴上是不是关于原点对称的点集；二是判断$f(-x)=-f(x)$或$f(-x)=f(x)$是不是其定义域上的恒等式。

例4 判断下列各函数的奇偶性

(Ⅰ) $f(x)=\dfrac{1}{e^x-1}+\dfrac{1}{2}$

解 定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$且$f(-x)+f(x)=0$故为奇函数。

(Ⅱ) $f(x)=\begin{cases}e^x-1(x\geqslant 0)\\1-e^{-x}(x<0)\end{cases}$

解 显然定义域为R。

又对任意$x>0$，$-x<0$，$f(-x)=1-e^{-(-x)}=1-e^x=-f(x)$；而对任意$x\leqslant 0$，则$-x\geqslant 0$，$f(-x)=e^{-x}-1=-f(x)$.

$\therefore f(x)$为奇函数。

(Ⅲ) $f(x)=\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$

解 $1+\sin x+\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}+2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=2\cos\dfrac{x}{2}(\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2})$，

欲使$1+\sin x+\cos x\neq 0$则$x\in\{x\neq 2k\pi+\pi$且$x\neq 2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\}$显然$f(x)$定义域不关于原点对称，故为非奇非偶函数。

⑤ 关于函数的单调性

利用函数单调性的定义进行判断，或求函数的单调区间，其基本方法就是作差比较法。

例5 求函数单调区间