大学数学学习辅导丛书

高等数学
学习指导与习题解答

【同济第六版】

上册

常桂娟 主编

科学出版社

大学数学学习辅导丛书

高等数学学习指导与习题解答

同济第六版上册

主　编　常桂娟

副主编　姜德民　孙宝山　吴春妹　姜兆英

主　审　崔文善　吴自库

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是与同济大学数学系编写的《高等数学》（第六版）相配套的辅助教材，内容分为三部分，第一部分是《高等数学》(上册)的习题解答，包括基本内容、基本要求和习题解答；第二部分是历年考研试题及选解；第三部分是青岛农业大学高等数学上册试卷选编及参考答案。本书通过为题目提供多种解法，开拓读者的思路，有效提高读者应用能力和解题技巧。

本书可以作为学习《高等数学》的大学生的辅助教材，也可以作为报考硕士研究生入学考试的复习参考书，还可以为高等数学教师批改作业或备课提供参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与习题解答：同济第六版. 上册/常桂娟主编. —北京：科学出版社，2013

(大学数学学习辅导丛书)

ISBN 978-7-03-038655-7

I. ①高… II. ①常… III. ①高等数学-高等学校-数学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 223226 号

责任编辑：石 悦 / 责任校对：郭瑞芝

责任印制：阎 磊 / 封面设计：华路天然工作室

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 9 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2013 年 9 月第一次印刷 印张：24

字数：630 000

定价：42.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书是与同济大学数学系编写的《高等数学》（第六版）相配套的辅助教材. 同济大学数学系编写的《高等数学》是本科生学习高等数学中的经典之作. 因此，本书也力求成为在各方面更适合大学生学习高等数学的辅助教材.

为方便读者使用，本书在内容上严格按照同济大学《高等数学》各章顺序对应编写. 内容分为三部分. 第一部分是《高等数学》（上册）的习题解答，包括：① 基本内容，列出了各章节的基本理论知识；② 基本要求，提出学生对各章节知识点需要掌握的程度；③ 习题解答，给出《高等数学》（上册）教材各章节习题、总习题解答. 第二部分是历年考研试题及选解，内容涵盖函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学，常微分方程，并给出了每道试题的年份及类别，学生可以根据自己的具体情况进行选做. 第三部分是青岛农业大学高等数学上册期末考试试卷选编及参考答案.

本书由青岛农业大学理学与信息科学学院数学教师编写. 其中第一部分内容，第 1 章由吴春妹完成；第 2 章由孙宝山完成；第 3 章由孙春薇完成；第 4 章由曹秀梅完成；第 5 章由赵静完成；第 6 章由王述香完成；第 7 章由姜兆英、吴伟完成；第二部分考研试题选解由姜德民完成；第三部分由常桂娟完成. 姜德民、孙宝山、吴春妹、姜兆英及赵静老师在全书通稿、校对上付出了许多心血, 在此向他们表示衷心的感谢.

由于时间仓促，在编写上难免会有错误，敬请同行、专家、读者批评指正.

编　者

2013 年 9 月

目　录

前言

第一部分　《高等数学》(上册)习题解答

第 1 章　函数与极限 …… 3
一、基本内容 …… 3
二、基本要求 …… 4
三、习题解答 …… 4
第 2 章　导数与微分 …… 52
一、基本内容 …… 52
二、基本要求 …… 53
三、习题解答 …… 53
第 3 章　微分中值定理与导数的应用 …… 110
一、基本内容 …… 110
二、基本要求 …… 111
三、习题解答 …… 111
第 4 章　不定积分 …… 159
一、基本内容 …… 159
二、基本要求 …… 159
三、习题解答 …… 159
第 5 章　定积分 …… 200
一、基本内容 …… 200
二、基本要求 …… 200
三、习题解答 …… 200
第 6 章　定积分的应用 …… 235
一、基本内容 …… 235
二、基本要求 …… 235
三、习题解答 …… 235
第 7 章　微分方程 …… 259
一、基本内容 …… 259
二、基本要求 …… 260
三、习题解答 …… 260

第二部分 历年考研部分试题及解答

第 1 章　函数　极限　连续 …… 331

一、重点内容提示 …… 331
二、考研部分试题及答案 …… 331
第 2 章　一元函数微分学 …… 340
一、重点内容提示 …… 340
二、考研部分试题及答案 …… 340
第 3 章　一元函数积分学 …… 350
一、重点内容提示 …… 350
二、考研部分试题及答案 …… 350
第 4 章　常微分方程 …… 359
一、重点内容提示 …… 359
二、考研部分试题及答案 …… 359

第三部分　青岛农业大学高等数学上册期末考试试卷选编及参考答案

高等数学(上)期末考试试卷(一) 及参考答案 …… 369
高等数学(上)期末考试试卷(二) 及参考答案 …… 373

第一部分

《高等数学》(上册)习题解答

第1章　函数与极限

一、基本内容

1. 映射与函数.

(1) 集合: 集合概念、集合的运算、区间和邻域;

(2) 映射: 映射概念、逆映射与复合映射;

(3) 函数.

① 函数概念; ② 函数的几种特性: 有界性、单调性、奇偶性、周期性; ③ 反函数与复合函数; ④ 函数的运算: 和、差、积、商; ⑤ 初等函数.

2. 数列的极限.

(1) 数列极限的定义;

(2) 收敛数列的性质: 极限的唯一性、收敛数列的有界性、收敛数列的保号性、收敛数列与其子数列间的关系.

3. 函数的极限.

(1) 函数极限的定义.

① 自变量趋于有限值时函数的极限; ② 自变量趋于无穷大时函数的极限.

(2) 函数极限的性质: 函数极限的唯一性、函数极限的局部有界性、函数极限的局部保号性、函数极限与数列极限的关系.

4. 无穷小与无穷大.

5. 极限运算法则.

(1) 极限的四则运算法则;

(2) 复合函数的极限运算法则.

6. 极限存在准则与两个重要极限.

(1) 夹逼准则、单调有界准则;

(2) 两个重要极限.

7. 无穷小的比较.

8. 函数的连续性与间断点.

(1) 函数的连续性;

(2) 函数的间断点.

① 第一类间断点: 可去间断点、跳跃间断点; ② 第二类间断点: 无穷间断点、振荡间断点.

9. 连续函数的运算与初等函数的连续性.

(1) 连续函数的和、差、积、商的连续性;

(2) 反函数与复合函数的连续性;

(3) 初等函数的连续性.

10. 闭区间上连续函数的性质.

(1) 有界性与最大值最小值定理;

(2) 零点定理与介值定理;

*(3) 一致连续性.

二、基本要求

1. 理解函数的概念, 掌握函数的表示方法.
2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念, 了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及图形.
5. 会建立简单应用问题中的函数关系.
6. 理解极限的概念, 理解函数左极限与右极限的概念, 以及极限存在与左、右极限之间的关系.
7. 掌握极限的性质及四则运算法则.
8. 掌握极限存在的两个准则, 并会利用它们求极限, 掌握利用两个重要极限求极限的方法.
9. 理解无穷小、无穷大的概念, 掌握无穷小的比较方法, 会用等价无穷小求极限.
10. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续), 会判别函数间断点的类型.
11. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性, 了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理), 并会应用这些性质.

三、习题解答

习题 1-1

1. 设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$, $B=[-10,3)$, 写出 $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $A\setminus(A\setminus B)$ 的表达式.

分析: 此类题目较为简单, 这里需要注意的是差集的运算, 如

$$A\setminus B=A-A\cap B,$$

$$A\setminus(A\setminus B)=A\setminus(A-A\cap B=)=A-A+A\cap B=A\cap B.$$

解 $A\cup B=(-\infty,-5)\cup[-10,3)\cup(5,+\infty)=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$;

$$A\cap B=[-10,-5);$$

$$A\setminus B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty);$$

$$A\setminus(A\setminus B)=[-10,-5).$$

2. 设 A、B 是任意两个集合, 证明对偶律: $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

证 明　$x\in(A\cap B)^C \Leftrightarrow x\notin A\cap B \Leftrightarrow x\in A^C$ or $x\in B^C \Leftrightarrow x\in A^C\cup B^C$．即对偶律：$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$ 成立.

3. 设映射 $f:X\to Y$, $A\subset X$, $B\subset X$.证明:

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;

(2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

证明 (1) $y\in f(A\cup B)\Leftrightarrow \exists x\in A\cup B$, $y=f(x)$

$$\Leftrightarrow \exists x\in A \text{ or } x\in B,\ \text{s.t. } y=f(x)$$

$$\Leftrightarrow y\in f(A) \text{ or } y\in f(B)$$

$$\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B).$$

(2) $y\in f(A\cap B)\Rightarrow \exists x\in A\cap B$, s.t. $y=f(x)\Rightarrow y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)$

$$\Rightarrow y\in f(A)\cap f(B).$$

4. 求下列函数的自然定义域:

(1) $y=\sqrt{3x+2}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$;

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

(5) $y=\sin\sqrt{x}$;　　(6) $y=\tan(x+1)$;

(7) $y=\arcsin(x-3)$;　　(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$;

(9) $y=\ln(x+1)$;　　(10) $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

分析: 在此类题目中, 所给出的函数一般是由一些简单函数组合而成, 因此函数自然定义域的求解步骤一般为: 首先求出各个简单函数的定义域, 然后确定这些定义域的交集, 这个交集就是函数的自然定义域. 定义域的表示方法一般有两种: 描述法或区间. 在考查中常用到的函数及其定义域如下:

$$y=\frac{A(x)}{B(x)},\ \{x\mid B(x)\neq 0\};$$

$$y=\sqrt[2n]{x},\ \{x\mid x\geqslant 0\};$$

$$y=\log_a x,\ \{x\mid x>0\};$$

$$y=\tan x,\ \left\{x\,\middle|\, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\};$$

$$y=\cot x,\ \{x\mid x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\};$$

$$y=\arcsin x,\ \{x\mid |x|\leqslant 1\};$$

$$y=\arccos x,\ \{x\mid |x|\leqslant 1\}.$$

解　(1) 要使得算式有意义, 则 x 需要满足条件: $3x+2\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant -\dfrac{2}{3}$, 从而函数的自然

定义域为 $\left\{x \middle| x \geqslant -\frac{2}{3}\right\}$ 或者 $\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

(2) 要使得算式有意义，则 x 需要满足条件：$1-x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$，从而函数的自然定义域为 $\{x | x \neq \pm 1\}$ 或者 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(3) 要使得算式有意义，则 x 需要满足条件：$\begin{cases} x \neq 0 \\ 1-x^2 \geqslant 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 \leqslant 1 \end{cases}$ 又即 $\begin{cases} x \neq 0 \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$，从而函数的自然定义域为 $\{x | -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ 且 } x \neq 0\}$ 或者 $[-1, 0) \cup (0, 1]$.

(4) 要使得算式有意义，则 x 需要满足条件：$4-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$ 从而函数的自然定义域为 $\{x | -2 < x < 2\}$ 或者 $(-2, 2)$.

(5) 要使得算式有意义，则 x 需要满足条件：$x > 0$，从而函数的自然定义域为 $\{x | x > 0\}$ 或者 $(0, +\infty)$.

(6) 要使得算式有意义，则 x 需要满足条件：$x+1 \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$，从而函数的自然定义域为 $\left\{x \middle| x \in \mathbf{R} \text{ 且} x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 1, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

(7) 要使得算式有意义，则 x 需要满足条件：$-1 \leqslant x-3 \leqslant 1$ 即 $2 \leqslant x \leqslant 4$，从而函数的自然定义域为 $\{x | 2 \leqslant x \leqslant 4\}$ 或者 $[2, 4]$.

(8) 要使得算式有意义，则 x 需要满足条件：$\begin{cases} 3-x \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x \leqslant 3 \\ x \neq 0 \end{cases}$，从而函数的自然定义域为 $\{x | x \leqslant 3 \text{ 且} x \neq 0\}$ 或者 $(-\infty, 0) \cup (0, 3]$.

(9) 要使得算式有意义，则 x 需要满足条件：$x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$，从而函数的自然定义域为 $\{x | x > -1\}$ 或者 $(-1, +\infty)$.

(10) 要使得算式有意义，则 x 需要满足条件：$x \neq 0$，从而函数的自然定义域为 $\{x | x \neq 0\}$ 或者 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

5. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x) = \lg x^2$，$g(x) = 2\lg x$；

(2) $f(x) = x$，$g(x) = \sqrt{x^2}$；

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$，$g(x) = x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $f(x) = 1$，$g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$.

分析：函数 f 是从实数集到实数集的映射，因此构成函数的要素是：定义域 D_f 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

解 (1) 不相同，因为定义域不同，其中 $D_f = \{x | x \neq 0\}$，而 $D_g = \{x | x > 0\}$.

(2) 不相同. 因为对应法则不同，$g(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

(3) 相同, 因为定义域和对应法则都相同.

(4) 不相同, 因为定义域不相同, 其中 $D_f = R$, 而 $D_g = \left\{ x \,\middle|\, x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$.

6. 设

$$\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \dfrac{\pi}{3}, \\ 0, & |x| \geqslant \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right), \varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right), \varphi(-2)$, 并作出函数 $y = \varphi(x)$ 的图形.

解 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right| = \left|\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$; $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right| = \left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \varphi(-2) = 0.$$

函数 $y = \varphi(x)$ 的图形如图 1-1 所示.

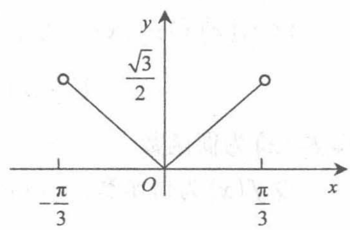

图 1-1

7. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y = \dfrac{x}{1-x}$, $(-\infty, 1)$; (2) $y = x + \ln x$, $(0, +\infty)$.

分析: 任意给定定义域内的两点 $x_1 < x_2$, 若恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则函数 $y = f(x)$ 是单调递增函数, 反之若恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则函数为单调递减函数.

证明 (1) 设 $f(x) = y = \dfrac{x}{1-x}$, $(-\infty, 1)$.

任意给定 $x_1 < x_2 < 1$, 恒有 $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{x_2}{1-x_2} - \dfrac{x_1}{1-x_1} = \dfrac{x_2 - x_1}{(1-x_2)(1-x_1)} > 0$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$, 所以 $y = \dfrac{x}{1-x}$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 内是单调递增的.

(2) 设 $f(x) = y = x + \ln x$, $(0, +\infty)$.

任意给定 $0 < x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) + (\ln x_2 - \ln x_1) = (x_2 - x_1) + \ln\dfrac{x_2}{x_1} > 0$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$, 所以 $y = x + \ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内是单调递增的.

8. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

证明 任意给定两点 $-l < x_1 < x_2 < 0$, 有 $0 < -x_2 < -x_1 < l$, 由 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 内为奇函数, 可得 $f(x_2) - f(x_1) = -f(-x_2) + f(-x_1) = f(-x_1) - f(-x_2)$, 又 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 得 $f(-x_1) - f(-x_2) > 0$, 即有 $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 从而 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

9. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l, l)$ 上的. 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明 (1) 设 $f_1(x)$ 和 $g_1(x)$ 均为定义在区间 $(-l,l)$ 上的偶函数, $F_1(x)=f_1(x)+g_1(x)$，则有

$$F_1(-x)=f_1(-x)+g_1(-x)=f_1(x)+g_1(x)=F_1(x),$$

即 $F_1(x)$ 为偶函数.

设 $f_2(x)$ 和 $g_2(x)$ 均为定义在区间 $(-l,l)$ 上的奇函数，$F_2(x)=f_2(x)+g_2(x)$，则有

$$F_2(-x)=f_2(-x)+g_2(-x)=-f_2(x)-g_2(x)=-F_2(x),$$

即 $F_2(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x)$ 和 $g_1(x)$ 均为定义在区间 $(-l,l)$ 上的偶函数，$F_1(x)=f_1(x)\cdot g_1(x)$，则有

$$F_1(-x)=f_1(-x)\cdot g_1(-x)=f_1(x)\cdot g_1(x)=F_1(x),$$

即 $F_1(x)$ 为偶函数.

设 $f_2(x)$ 和 $g_2(x)$ 均为定义在区间 $(-l,l)$ 上的奇函数，$F_2(x)=f_2(x)\cdot g_2(x)$，则有

$$F_2(-x)=f_2(-x)\cdot g_2(-x)=-f_2(x)\cdot -g_2(x)=F_2(x),$$

即 $F_2(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，$F(x)=f(x)\cdot g(x)$，则有

$$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=-f(x)\cdot g(x)=-F(x),$$

因此 $F(x)$ 为奇函数.

10. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数?

(1) $y=x^2\left(1-x^2\right)$; (2) $y=3x^2-x^3$;

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; (4) $y=x(x-1)(x+1)$;

(5) $y=\sin x-\cos x+1$; (6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解 (1) $f(x)=y=x^2\left(1-x^2\right)$，因为

$$f(-x)=(-x)^2\left(1-(-x)^2\right)=x^2\left(1-x^2\right)=f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(x)=y=3x^2-x^3$，因为

$$f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3,$$

可见 $f(-x)\neq f(x)$ 并且 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(3) $f(x)=y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，因为

$$f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(4) $f(x)=y=x(x-1)(x+1)$，因为

$$f(-x)=(-x)(-x-1)(-x+1)=-x(x-1)(x+1)=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(5) $f(x)=y=\sin x-\cos x+1$，因为

$$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1,$$

可见 $f(-x)\neq f(x)$ 并且 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(6) $f(x)=y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$，可见

$$f(-x)=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

11. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos(x-2)$；　(2) $y=\cos 4x$；

(3) $y=1+\sin \pi x$；　(4) $y=x\cos x$；

(5) $y=\sin^2 x$.

解 (1) 是周期函数，周期 $l=2\pi$.

(2) 是周期函数，周期 $l=\dfrac{\pi}{2}$.

(3) 是周期函数，周期 $l=2$.

(4) 不是周期函数.

(5) 是周期函数，周期 $l=\pi$.

12. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$；　(4) $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$；

(5) $y=1+\ln(x+2)$；　(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

解 (1) 因为 $y=\sqrt[3]{x+1}\Rightarrow x+1=y^3\Rightarrow x=y^3-1$，所以 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为 $y=x^3-1$.

(2) 因为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}\Rightarrow x=\dfrac{1-y}{1+y}$，所以 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 的反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3) 因为 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow x=\dfrac{dy-b}{a-cy}$，所以 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数为 $y=\dfrac{dx-b}{a-cx}$.

(4) 因为 $y=2\sin 3x\Rightarrow \sin 3x=\dfrac{y}{2}\Rightarrow 3x=\arcsin\dfrac{y}{2}\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$，所以 $y=2\sin 3x$ 的反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}\ (|x|\leqslant 2)$.

(5) 因为 $y=1+\ln(x+2)\Rightarrow \ln(x+2)=y-1\Rightarrow x+2=\mathrm{e}^{y-1}\Rightarrow x=\mathrm{e}^{y-1}-2$，所以 $y=1+\ln(x+2)$ 的反函数为 $y=\mathrm{e}^{x-1}-2$.

(6) 因为 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}\Rightarrow y\cdot 2^x+y=2^x\Rightarrow(1-y)2^x=y\Rightarrow 2^x=\dfrac{y}{1-y}\Rightarrow x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，所以 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

13. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证明 必要性：设 $f(x)$ 在 X 上有界，即存在 $M>0$，使得对于 $\forall x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，即

$$-M<f(x)<M,$$

可得 $f(x)$ 既存在上界 M 又有下界 $-M$.

充分性：设 $f(x)$ 在 X 上既有上界 M_1 又有下界 M_2，即对于 $\forall x\in X$，有 $f(x)<M_1$ 且 $f(x)>M_2$. 取 $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$，则有

$$|f(x)|<M,\quad \forall x\in X.$$

即函数 $f(x)$ 在 X 上有界.

14. 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值.

(1) $y=u^2$，$u=\sin x$，$x_1=\dfrac{\pi}{6}$，$x_2=\dfrac{\pi}{3}$；

(2) $y=\sin u$，$u=2x$，$x_1=\dfrac{\pi}{8}$，$x_2=\dfrac{\pi}{4}$；

(3) $y=\sqrt{u}$，$u=1+x^2$，$x_1=1$，$x_2=2$；

(4) $y=\mathrm{e}^u$，$u=x^2$，$x_1=0$，$x_2=1$；

(5) $y=u^2$，$u=\mathrm{e}^x$，$x_1=1$，$x_2=-1$.

解 (1) 复合函数 $y=(\sin x)^2$，$y_1=\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，$y_2=\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^2=\dfrac{3}{4}$.

(2) $y=\sin(2x)$，$y_1=\sin\left(2\cdot\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y_2=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

(3) $y=\sqrt{1+x^2}$，$y_1=\sqrt{2}$，$y_2=\sqrt{5}$.

(4) $y=\mathrm{e}^{x^2}$，$y_1=1$，$y_2=\mathrm{e}$.

(5) $y=\mathrm{e}^{2x}$，$y_1=\mathrm{e}^2$，$y_2=\mathrm{e}^{-2}$.

15. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$，求下列各函数的定义域:

(1) $f\left(x^2\right)$;　　　　(2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a)(a>0)$;　　　　(4) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$.

解　(1) 由 $0\leqslant x^2\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$，可得 $f\left(x^2\right)$ 的定义域为 $[-1,1]$.

(2) 由 $0\leqslant \sin x\leqslant 1\Rightarrow x\in[2k\pi,2k\pi+\pi],k\in\mathbf{Z}$，可得 $f(\sin x)$ 的定义域为 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(3) 由 $0\leqslant x+a\leqslant 1\Rightarrow -a\leqslant x\leqslant 1-a$，可得 $f(x+a)$ 的定义域为 $[-a,1-a]$.

(4) 由 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$，可得: 当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 定义域为 $[a,1-a]$；当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，定义域为 $\varnothing$.

16. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\0, & |x|=1,\\-1, & |x|>1\end{cases}\qquad g(x)=\mathrm{e}^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

解　$f[g(x)]=f\left(\mathrm{e}^x\right)=\begin{cases}1, & x<0\\0, & x=0,\\-1, & x>0\end{cases}\qquad g[f(x)]=\mathrm{e}^{f(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1\\1, & |x|=1,\\\mathrm{e}^{-1}, & |x|>1\end{cases}$

$f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$ 的图形分别如图 1-2 和图 1-3 所示.

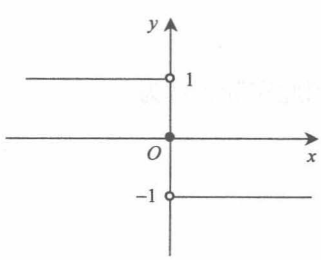

图 1-2

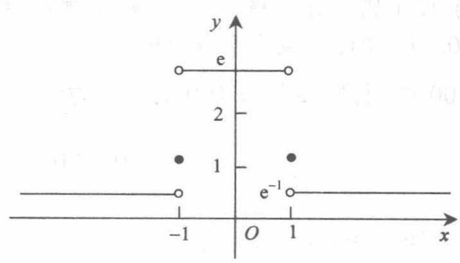

图 1-3

17. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi=40^\circ$ (图 1-4). 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 L ($L=AB+BC+CD$) 与水深 h 之间的函数关系式，并指明其定义域.

解　由题意可得 $AB=CD=\dfrac{h}{\sin 40^\circ}$，又