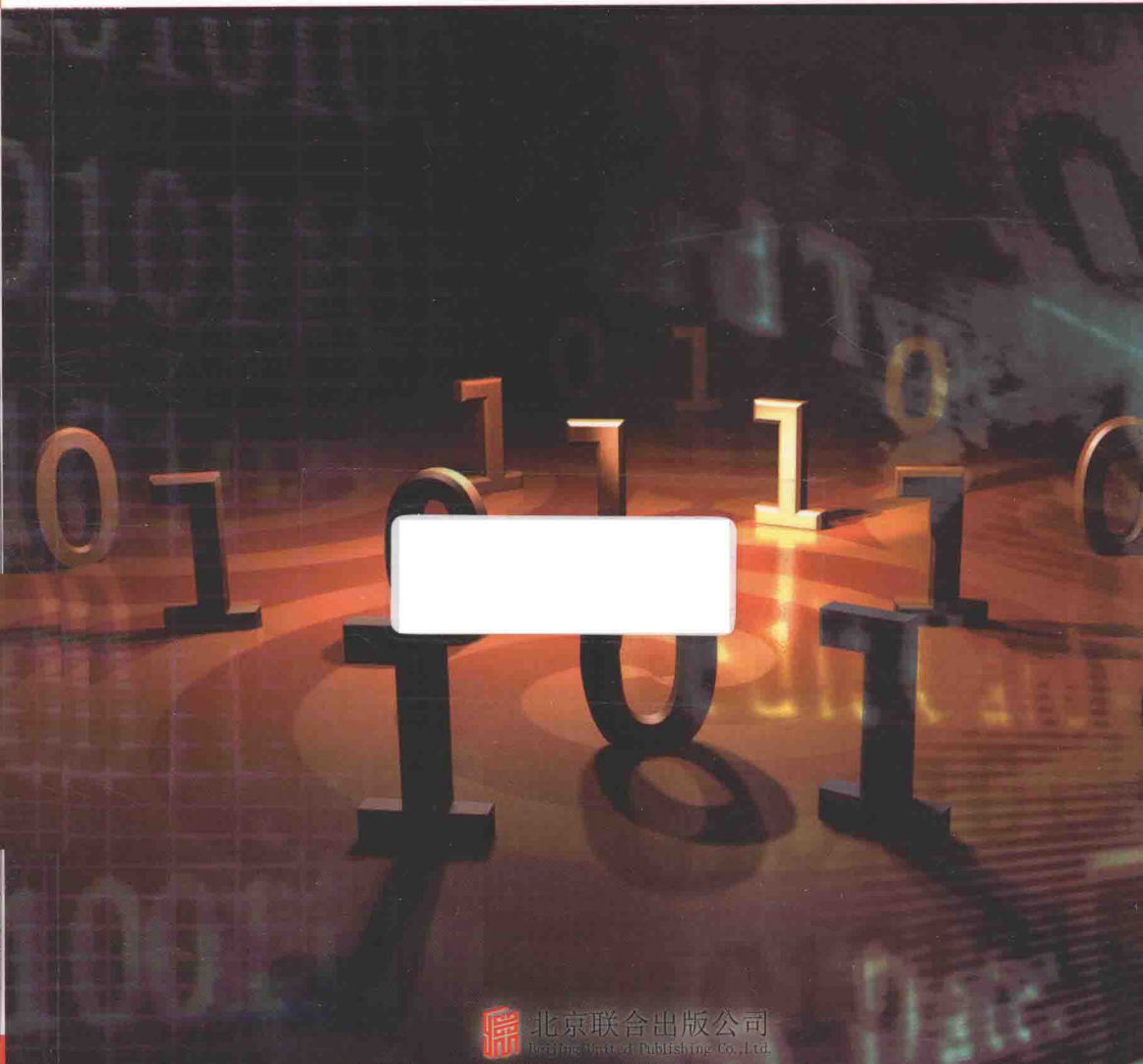


带你走进科学的世界

# 玄幻数学城堡

莫测的



带你走进科学的世界

# 玄幻数学城堡

莫测的



北京联合出版公司  
Beijing United Publishing Co., Ltd.

## 图书在版编目(CIP)数据

玄幻莫测的数学城堡 / 苗桂芳编著. -- 北京 : 北京联合出版公司, 2014.5 (2015.6 重印)

(带你走进科学的世界)

ISBN 978 - 7 - 5502 - 2943 - 3

I. ①玄… II. ①苗… III. ①数学 - 青少年读物

IV. ①O1 - 49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 084112 号

## 玄幻莫测的数学城堡

编 著 : 苗桂芳

选题策划 : 风苑阁文化

责任编辑 : 崔保华

---

北京联合出版公司

(北京市西城区德外大街 83 号楼 9 层 100088)

北京海德伟业印务公司印刷 新华书店经销

字数 80 千字 710 毫米 × 1092 毫米 1/16 10 印张

2015 年 6 月第 2 版 2015 年 6 月第 2 次印刷

ISBN 978 - 7 - 5502 - 2943 - 3

定价:29.80 元

---

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书部分或全部内容

版权所有,侵权必究

本书若有质量问题,请与本公司图书销售中心联系调换 010 - 65488949。

# 前言

科学普及是一项关系国家发展和民族兴盛的基础性工作。通过科学教育、传播与普及，帮助青少年一代树立科学思想，培养科学精神，了解科技知识，掌握科学方法，提升科学素质，就能够有力地推动创新型国家的建设进程。本书紧紧围绕人们生活身边的科学，以及青少年普遍感兴趣的科学知识，涵盖了物理、化学、植物、动物、人体和生活等各个方面的知识点，使广大青少年在轻松的阅读中，增强对科学技术的兴趣和爱好，开阔眼界，启发思维，拓宽知识面，增强科学意识。

要想成为一个有科学头脑的现代人，就要对你在这个世界上所见到的事物都问个“为什么”，科学的发展往往就始于那么一点点小小的好奇心。本丛书带你进行一次穿越时空的旅行，通过这次旅行，你将了解这些伟大的发明、发现的诞生过程，以及在这些辉煌成果背后科学家刻苦钻研的精神。

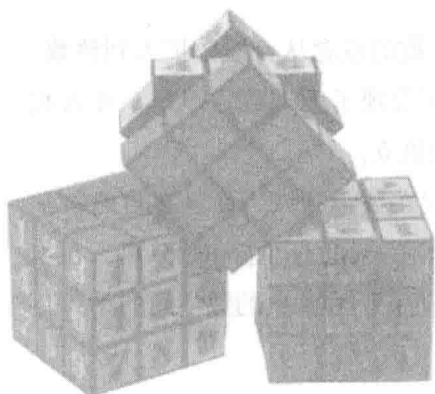
# 目 录

|                   |     |
|-------------------|-----|
| 数的故事 .....        | 001 |
| 整数论的故事 .....      | 017 |
| 费尔马的最后定理 .....    | 026 |
| 方程式和不等式的故事 .....  | 031 |
| 线性代数和现代代数故事 ..... | 042 |
| 关于矢量 .....        | 048 |
| 集合的故事 .....       | 056 |
| 逻辑的故事 .....       | 066 |
| 悖论的故事 .....       | 077 |
| 实数和数列的故事 .....    | 085 |
| 关于数列 .....        | 092 |
| 函数的故事 .....       | 103 |
| 微分和积分的故事 .....    | 116 |
| 古代数学故事 .....      | 132 |
| 蜂房中的数学 .....      | 134 |
| 六边形与自然界 .....     | 136 |

001

玄幻莫测的数学城堡

|                   |     |
|-------------------|-----|
| 蜜蜂的舞蹈 .....       | 138 |
| 音乐中的数学变换 .....    | 140 |
| 乐器的形状也和数学有关 ..... | 143 |
| 为什么有的人五音不全 .....  | 145 |
| 大自然音乐中的数学 .....   | 147 |
| 古琴音乐中的几何学 .....   | 149 |
| 美术中的平移和对称 .....   | 151 |
| 花朵的数学方程 .....     | 153 |



# 数的故事

## 引子——e所创造的等式

$$e=2.71828182845904523536028747135266249775724709369995\cdots$$

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

$$e^{i\pi}+1=0$$

$$e=\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$



## 观察与切入

数是数学里最基本的概念，数字是表示数的符号。数是日常生活中必须运用到的，所有文明的利器是利用数和式子进行设计而制作成的。人类如果不使用数的话，今天的文明社会就不可能存在。

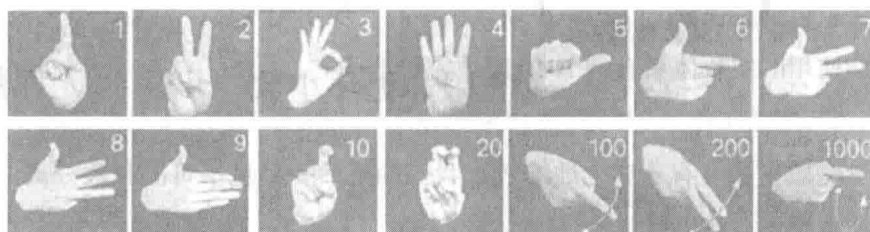
虽然不能准确地知道人类从什么时候开始使用数的概念，但是学



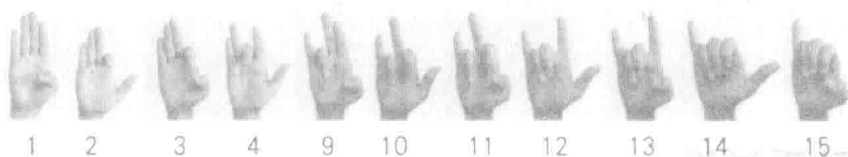


# 数学实践——用手指表示数

## ●手语

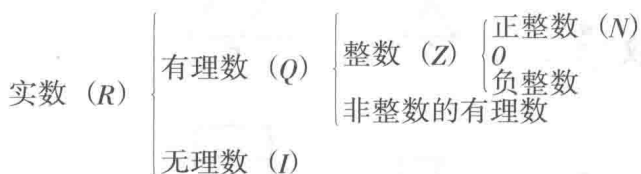


## ●埃及式手语

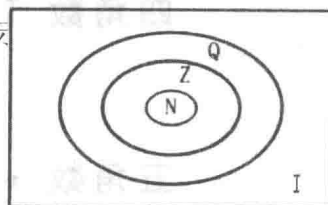


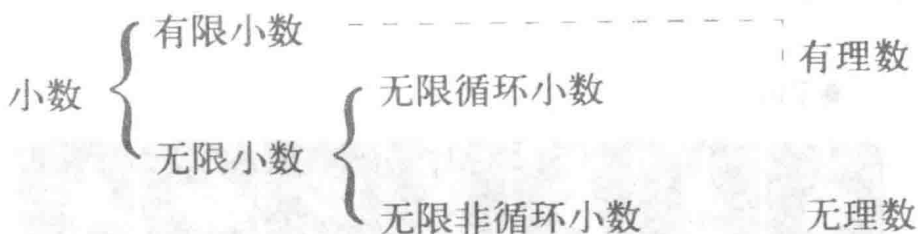
## 深入了解

### 实数的分类



小数分类：任意的实数都可以用小数表示





无理数e的定义： $e=2.71828\cdots$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{z \rightarrow 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} \quad \left( z = \frac{1}{n} \right)$$

## 动手试验

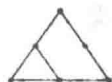
1. 分数可以由两个分数的和表示。试用相同的办法表示出  $\frac{1}{7}$ 。
2. 从下面的三角数、四角数、五角数推测下一阶段的数。

三角数

1



3



6

四角数

1



4



9

五角数

1



5



12

## 数的历史

数是由于人类计量个数的需要而产生的。由于自然数和物体的个数相一致，原始人为了计算猎物或者家畜的数量而开始使用自然数。数的概念从自然数扩大到负数、0、整数、有理数，后来毕达哥拉斯学派的人还发现了无理数。另外，在16世纪，引入了复数的概念，直到19世纪终于确立了严密的实数体系。

我们不能确切地知道从哪个年代人类开始使用数的概念。数字是表示数的符号，有记录的最早的数字出现于公元前28世纪巴比伦的楔形文字上。

在原始时代，为了记录部落成员的数量、敌人的数量、羊群的数量，使用的是一对一的原理。例如，原始人使用手指、卵石、棍子，在石头和泥土上作标记，或者将绳子打结来记录羊群的数量。

随着文明的发展，计数也变得越来越复杂，方法也日趋系统化。数被排列成为使用方便的基本群体，由于用手指记录5或者10比较方便，于是产生了5进制和10进制。使用广泛的5进制被认为是最早出现的数的体系，比如：

*One, two, three, four, hand, hand and one, ...*

另外，由于测量的关系，以一年中月圆的次数12为基数，产生了12进制，在今天还能找到很多12进制的痕迹。

12小时（时钟）、12月（1年）、12个（一打）、12英寸（1英尺）、12盎司（1英镑）

|                |
|----------------|
| 五——五个手指都捏成拳头的手 |
| 十——两双手的手指都撑开的手 |
| 十多——多于十的       |

除此之外，还有古巴比伦人使用的60进制。现在，60进制用来计量时间或者角度。而新几内亚的原始人只知道1和2，最多到3，剩下的就一无所知。不仅是那些原始人，对于幼儿来说，3以外的数就像是无限大一样。然而，“兆”这样大的数也时常用于日常生活中。

个、十 ( $10$ )、百 ( $10^2$ )、千 ( $10^3$ )、万 ( $10^4$ )、亿 ( $10^8$ )、兆 ( $10^{12}$ )，…，无量大な数 ( $10^{68}$ )

逢“万”就改变叫法的是万进制，表示那些大的数字的名称，如印度河里沙粒的数量“恒河沙”，阿僧祇、那由他、不可思议则来自佛教用语。当时，那些巨大的数字都是从佛教的思想中派生出来的。但是如今比“兆”更大的数字，一般都使用10的若干次方来表示。另外，在过去，比无量大な数更大的数虽然被看作是无限大的，但是在现代社会里，比 $10^{68}$ 大的数也是有限大的，并且将其和无限严密地区分开来。

现在，我们来考察关于负数和0的历史。

和自然数相当数量的物体的集合是实际存在的，而不可能存在-3只羊，所以负数的发现必然需要漫长的等待。但是，人类的思考能力能够感知到负数的存在，例如，如果 $3^{\circ}\text{C}$ 是表示零以上的温度的话， $-3^{\circ}\text{C}$ 便是零下的气温；往东3千米被称为+3的话，往西3千米便是-3。由此，负数在人类的思想中登场，于是自然数称作与负数相反的正数。负数在中国的《九章算术》中出现过，在书中，红色算筹表示正数，而黑色算筹表示负数。在中国，从很早以前就产生了负数的概念，可以说这和东方思想中的阴阳理论有很大关系。虽然在西方负数也为人所知，但是西方人曾认为负数是不合理的数或者是不真实的数，直到16世纪，通过方程式的解，负数才被认可。

很小的数字的读法

割 ( $10^{-1}$ )、分 ( $10^{-2}$ )、厘、毫、丝、忽、微、纤、沙、尘、埃、渺、莫、模糊、逡巡、须臾、瞬息、弹指、刹那、六得、虚、空、清、净 ( $10^{-24}$ )

在数的历史中，最具有划时代意义的莫过于0 (zero) 的发现。欧拉曾说0和负数的概念比无限的概念还要重要。表示“无”的概念的0虽然于公元前3 000年左右在古巴比伦人的脑海里有所萌芽，不过当时0只是计算中的辅助工具。0的概念是在7世纪由印度人婆罗摩笈多正式采用的，在8世纪传到阿拉伯，12世纪由阿拉伯人传到欧洲。由于负数的概念的确立，0的概念也变得明确了。

Zero (0) 是从zephirum中演变而来，印度语是sunya (表示空虚的意思)，翻译成阿拉伯语是sifr, sifr的拉丁语的形式是zephirum。

最后，我们来了解一下计数法。

顾名思义，计数法就是表达数的方法，古代埃及、罗马、印度、中国使用的是十进制，古巴比伦使用的是60进制，而古代玛雅使用的是20进制。

最初表示数的方法—手指计数，利用的是手指的个数，后来还区分左手和右手。计数法的形式有单纯编组法、乘法编组法和位置数体系。

单纯编组法是先定下底数 $b$ ，接着制定表示 $1, b, b^2, b^3, \dots$ 的符号。例如古埃及的象形数字是将10作为底数，通过象形文字制定 $1, 10, 100, 1\ 000$ 等的符号，利用这些象形文字来表示数字。古巴比伦的楔形数字定60为底数，此外还有用希腊字母表示数的希腊数字和以10为底数的罗马数字。

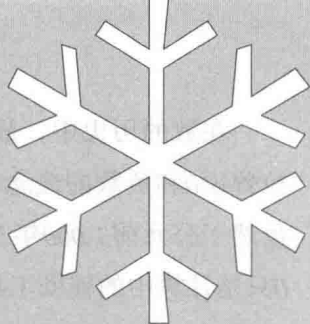
特别是罗马数字I, II, III, V等都是根据手指的模样演变过来的，用来表示10的X，是由两个V组合而成的。另外，IV, VI, IX, XI等都是在5和10的基础上加上1或者减去1得来的。

乘法编组法是在底数 $b$ 的基础上，将 $1, 2, \dots, b-1$ 和 $b, b^2, b^3, \dots$ 等符号通过乘法来表示数。例如，10进制中分别用 $a, b, c$ 代表十、百、千来表示数， $4\ 735=4c7b3a5$ 。

最发达的位置数体系是现在我们所使用的十进制。

$$4\ 735=4\times 10^3+7\times 10^2+3\times 10+5\times 1$$

区分个、十、百、千来表示数字。



## 关于无理数

我们熟知的无理数有圆周率 $\pi$ ， $\sqrt{2}$ ， $\sqrt{3}$ ， $\sqrt{5}$ ，以及自然对数 $e$ 等。能够用分数表示的数被称为有理数，不能用分数表示的数被称为无理数。有理数和无理数合称为实数，任意一个实数可以用小数表示。实际上，用小数表示有理数的话，会产生有限小数或者无限循环小数，而对于无理数会出现无限却不是循环的无限非循环小数。因此，无理数的准确值是不可能用小数表示的。

无理数的发现归功于毕达哥拉斯学派，对于毕达哥拉斯学派来说，数学就是哲学。他们主张万物的本源是数（*All is number*），所有的事物都可以用自然数和非自然数的有理数表示。但是，在两直角边为1的直角三角形中，直角的对边长为 $\sqrt{2}$ ，这和毕达哥拉斯学派的主张相违背。

当时，一直信奉不存在自然数和有理数以外的数的毕达哥拉斯学派受到了极大的打击。他们决定将非有理数的 $\sqrt{2}$ 的存在作为秘密隐藏起来，但是他们中的一人希帕苏斯证明出了 $\sqrt{2}$ 并非有理数。传说希帕苏斯被同门的毕达哥拉斯学派的人扔进了大海而丧生。

虽然数千年前就和图形相关联的无理数是圆周率 $\pi$ ，但是在数列的极限、指对数函数、微积分中出现的无理数是 $e$ 。下面是对 $e$ 的定义。

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

通过计算器求无限级数  $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$

和极限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  可以得知，两者是相等的。 $e$  约等于 2.718281828，满足  $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$

欧拉证明了这个数为无理数并且用符号  $e$  来表示它，所以这个数也被称为欧拉数。此外，欧拉还发现了公式  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ，通过这个等式我们可以进一步得到一个非常优雅的等式：

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

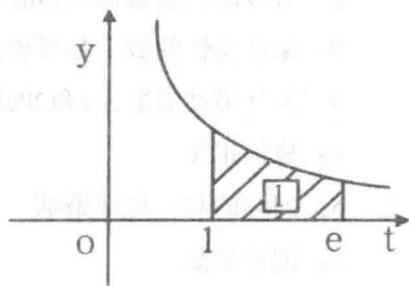
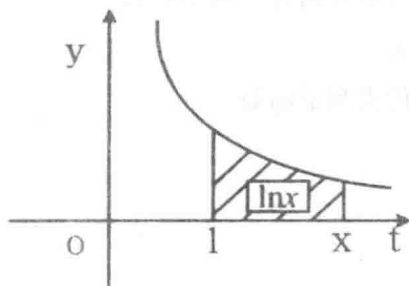
这个等式包括数学基本的五个数  $0, 1, e, \pi, i$  和数学基本符号  $+, =$ 。 $0$  和  $1$  是加法和乘法的恒等元。圆周率  $\pi$  是最刺激人们好奇心的数字，而虚数  $i$  是最能体现人类无限的想象力的数字。这些元素全部集中在了等式  $e^{i\pi} + 1 = 0$  里！

另外，指数函数  $e^x$  是导函数和自身相同的函数，所以在微积分中非常重要，关于正数  $x$  的正积  $\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$  所定义的自然对数  $\ln x$  问题显示  $\int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$  这样有趣的结果。

自然对数的定义如下：

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = 1 \quad (\text{仅 } x > 0 \text{ 时})$$

$\ln x$  的意义可由双曲线、 $x$  轴和两条直线  $t=1, t=x$  所围成的区域的宽表示，请找出  $e$  的位置。



欧拉使用的符号

符号 $p$ 表示圆周率

符号 $f(x)$ 表示函数

符号 $e$ 表示自然对数

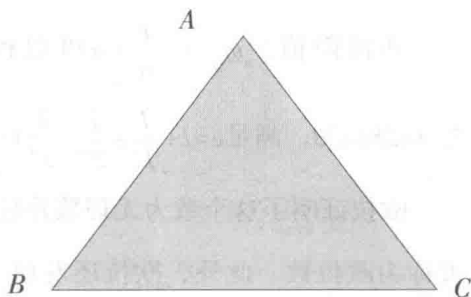
符号 $i$ 表示虚数

简写符号 $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ 表示三角函数

三角形中， $A$ ， $B$ ， $C$ 表示角， $a$ ， $b$ ， $c$ 表示三角形的对边

三角形中， $r$ 表示内切圆的半径， $R$ 表示外接圆的半径

$\Sigma$ 是表示和的符号



## 生活中的数

010

在生活中，物体的个数、量、比率、距离等都可以用数来表示。另外，在家里使用的或大或小的物体、工厂的机器、交通工具中的汽车、飞机等，都是通过数来设计和制作的。在使用这些东西时，也常常会使用到数。认为数为万物之源的毕达哥拉斯学派的研究，体现了数的美妙。

第一，毕达哥拉斯学派主张：生活即是数，数表示所有的生活。

1：所有的自然数都由1相加而得，1是万物神圣的创造者。

2：象征女性的数，与多种意义相关。

3：象征男性的数，1和2的组合，代表和谐的数。

4：象征正义。

5：2和3的和，象征婚姻。

6：创造的数。



10: 四个数1, 2, 3, 4的和, 最神圣的数。

各个数分别与和平、完整、丰富等意义相关联。

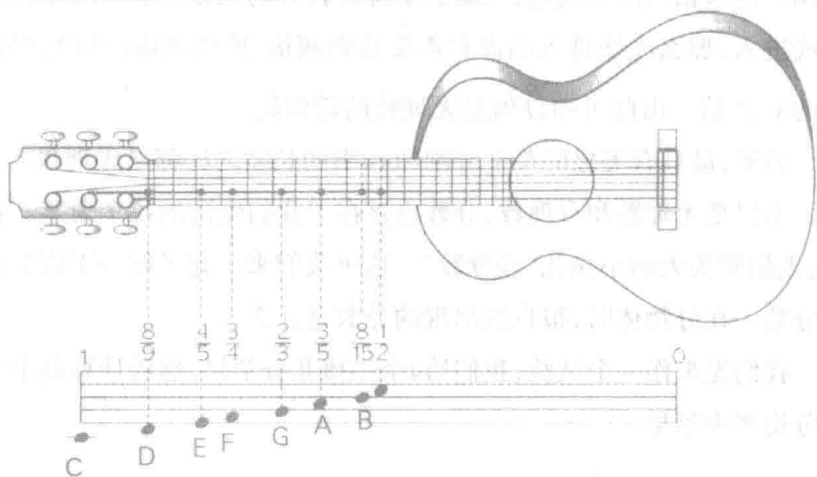
### 毕达哥拉斯学派和音乐

毕达哥拉斯学派发现了乐器的弦的长度和音的高低之间的关系。

弦的长度是最初的 $\frac{2}{3}$ 时, 会发出高5度的音, 当弦为最初的 $\frac{1}{2}$ 时, 发出的音会高8度。当弦的长度比为 $1 : \frac{2}{3} : \frac{1}{2}$ 时, 第一个音为哆的话, 第二个音便为嗦, 最后一个音高出一个8度音阶, 3个音构成美妙的和弦。但是, 弦的长度和震动数成反比例, 这时, 震动数的比为 $1 : \frac{3}{2} : 2$ 。这里,  $\frac{2}{3}$ 是1和 $\frac{1}{2}$ 的调和平均,  $\frac{3}{2}$ 是1和2的算术平均。

实际上, 乐器的哆(C)的弦长是1的话, 来(D)的弦长为 $\frac{8}{9}$ , 咪(E)为 $\frac{4}{5}$ , 发(F)为 $\frac{3}{4}$ , 嗦(G)为 $\frac{2}{3}$ , 啦(A)为 $\frac{3}{5}$ , 嘻(B)为 $\frac{8}{15}$ , 高一个音阶的哆为 $\frac{1}{2}$ 。

我们运用这样的原理来弹吉他。



第二, 他们研究了组成美妙排列的三角数、四角数、五角数。

三角数: 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

四角数: 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...