KOALAGOGO
考拉进阶

薛金星·教材全解 畅销20年
全国一亿读者首选

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套用书
依据教育部最新本科数学教学大纲和考研大纲编写

大学教材全解

高等数学

（同济第六版·上下册合订）

曹圣山 生汉芳 王新心◎主编

800
多个经典例题

超过1200个课后习题

220
多个考研真题

同步辅导+考研复习

讲透重点难点 | 详解课后习题 | 精析考研真题 | 提升考研能力

延边大学出版社

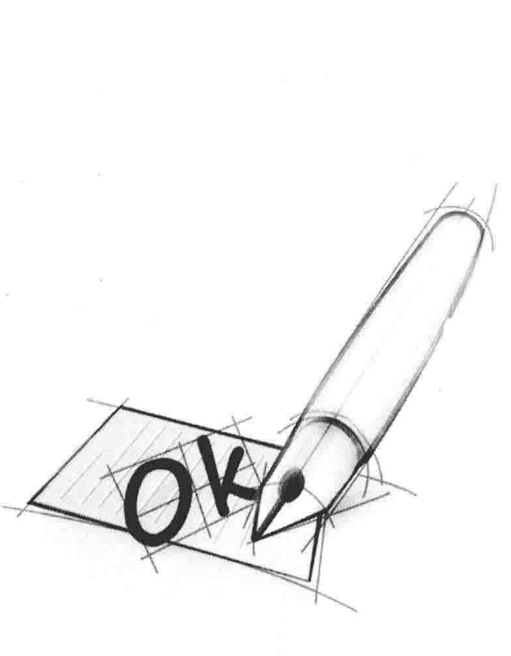
KOALAGOGO 考拉进阶

大学教材全解

高等数学

（同济第六版·上下册合订）

总策划：薛金星
主　编：曹圣山　　生汉芳　　王新心
副主编：王学锋　　丁双双　　胡京爽
　　　　张羽飞　　张艳艳



延边大学出版社

前言

"教材全解"系列丛书十多年来一直是最畅销的教材辅导类图书，种类涵盖了大、中、小学的几十门主要学科，帮助千万学子吃透教材，取得了理想的成绩。《大学教材全解—高等数学》（下称《全解》）上、下分册上市后，也立即获得了极好的读者反响。今年该书作者结合读者的反馈建议，对内容进行重新修订，编写了新版、大开本、上下册合订的《大学教材全解—高等数学（合订本）》，新版《全解》例题种类更加多样，知识点讲解更加完善、清楚，习题步骤也更加详细，与考研联系更加紧密。

本书的章节内容与教材保持一致，讲解顺序与课堂授课完全同步，每章内容安排如下：

教材内容全解 解读必须掌握、考频较高的核心内容，即重点、难点，与众不同的是，本书还特别注重讲解知识点应用过程中易混淆、难理解之处，并用"温馨提示"列举与此知识点相关、在做题中广泛使用的核心结论。

常考经典题型 以每节重点问题为主线，分类总结归纳题型，精选典型例题，并结合历年考研真题进行详细讲解。通过知识点的具体运用加深对基本概念的理解，熟练掌握重要定理和多种解题方法及思路。本部分题型全面、代表性强，并且部分例题给出多种解法，开拓读者思路。

课后习题全解 本部分给出了配套教材中每章各节习题答案。解题过程详尽、全面，并且在关键步骤和较难理解之处配以注解，以"难点注释"的形式放在了每题解答之后，这也是本书的一大亮点。

本章解题方法归纳 本部分按解题方法分类归纳总结，精选涵盖知识点多、综合性稍强的典型题目和考研真题，帮助读者总结常考问题的解题方法。

总习题 X 习题全解 这部分给出了每章章末总习题的详尽的解答过程，并且对重要步骤和较难理解之处做了注解，以"难点注释"的形式放在了每题解答之后。

本章同步测试及答案解析 精选各类考试的典型题目供读者对每章学习效果进行自我检测，并且给出了详细的解答过程。

全书最后根据历年名校期末考试情况，精心设置了"上册期末考试模拟试卷"和"下册期末考试模拟试卷"，为读者提供了考前练兵的机会。

本书延续了"教材全解系列"讲解细致、层次清晰、深入浅出的特点，并在此基础上突出了三大亮点：

1. 题型全，例题经典，步骤详尽，解题方法多

2. 关键步骤加注释，讲解更到位

3. 密切联系考研，指点考研迷津

本书可作为理工类专业学生学习高等数学的辅导用书，更适合作考研数学的复习用书，也可作为教师教授高等数学课程的教学参考书。

由于编者水平所限，书中不妥或错误之处在所难免，敬请各位同行、读者批评指正。

考拉进阶教育研究院

"大学教材全解"编委会

目录

第一章　函数与极限

第一节　映射与函数

一　教材内容全解

知识点1　函数的有关概念

1. 函数定义的要点

(1) 函数刻画的是由定义域到值域的那个确定的映射规则，或者说，函数体现了因变量与自变量间的依赖关系.

(2) 函数概念的两要素是定义域和对应法则. 对常见单值函数来说，对定义域中的每个 x，都有唯一一个确定的 y 与之对应.

(3) 函数关系可以有多种形式，例如公式、表格、图像等. 用公式表示可以是一个解析式，也可以是分段函数的形式.

2. 求函数定义域的步骤

(1) 首先，给定的函数通常是由基本初等函数(或简单函数)复合而成，列出使每个基本初等函数(或简单函数)有定义所需满足的关系式(等式或不等式)，得到使函数有意义的联立关系式组；

(2) 其次，求解所得的联立关系式组；

(3) 最后，用区间或集合的形式表示所得到的结果，即为所求的定义域.

知识点2　函数的性质(重点)

1. 有界性

(1) 有界：函数 $f(x)$ 在 X 上有界 $\Leftrightarrow$ 存在一个正常数 M，使得对任意的 $x\in X$，都成立

$$|f(x)|\leqslant M.$$

(2) 无界：函数 $f(x)$ 在 X 上无界 $\Leftrightarrow$ 对任何正数 M，至少存在一个 $x_0\in X$，使得

$$|f(x_0)|>M.$$

(3) 利用定义证明函数有界的方法

① 首先，对函数取绝对值 $|f(x)|$(或者直接利用上述"有界的等价表述"，直接转入下面的第二步)；

② 其次，利用函数的性质，并结合自变量所属定义域的特点，进行适当的不等式放大；

③ 最后，找出定义中所说的常数 M，使得对定义域中的任意 x，$|f(x)|\leqslant M$ 恒成立.

温馨提示　(1) 后面学习连续的有关知识后，利用闭区间上连续函数的性质，也可以方便地证明函数在闭区间上有界.

(2) 函数的有界性与所在区间有密切的关系. 一个函数可能在一个区间内有界，在另一区间内无界，因此描述函数的有界性时需要指明对应的区间.

2. 单调性

(1) 单调增加：$f(x)$ 在 I 上单调增加 $\Leftrightarrow$ 对任意 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2).$$

(2) 单调减少：$f(x)$ 在 I 上单调减少 $\Leftrightarrow$ 对任意 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2).$$

(3) 根据定义判断函数单调性的步骤

① 记 I 为自变量的变化范围，任取两点 x_1，$x_2\in I$，不妨设 $x_1<x_2$；

② 研究是否恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)成立，一般通过考察 $f(x_1)-f(x_2)$ 是否变号来判断；

③ 根据定义，确定函数是否具备单调性.

温馨提示　(1) 比较 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 的大小，有时考察比值形式 $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}$，研究 $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}<1$ 是否成立(此时情况较为复杂，还应注意 $f(x)$ 的符号变化).

(2) 通常要借助于常用的不等式，对 $f(x_1)-f(x_2)$ 或 $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}$ 进行放缩变形.

(3) 微积分中采用导数来研究函数的单调性，非常方便有效，这将在导数应用部分作详细介绍.

3. 奇偶性

(1) 奇函数：设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 在 D 上是奇函数.

(2) 偶函数：设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 在 D 上是偶函数.

温馨提示 (1) 奇函数和偶函数的定义域都必须是一个关于原点对称的区间.

(2) 奇函数的图像关于原点对称;偶函数的图像关于 y 轴对称.

(3) 奇(偶)函数的四则运算规律

① 奇函数±奇函数=奇函数,
偶函数±偶函数=偶函数.

② 奇函数×奇函数=偶函数,
奇函数÷奇函数=偶函数.

③ 偶函数×偶函数=偶函数,
偶函数÷偶函数=偶函数.

④ 奇函数×偶函数=奇函数,
奇函数÷偶函数=奇函数.

温馨提示 一个奇函数和一个偶函数的和(差),既不是奇函数,也不是偶函数,而是非奇非偶函数.

4. 周期性

(1) 周期函数的定义

设 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在常数 $T\neq0$,使得任意 $x\in D$,$x+T\in D$,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是周期函数,称 T 为 $f(x)$ 的周期.

温馨提示 (1) 周期函数有无穷多个周期,通常所说的周期是指最小正周期.

(2) 周期函数不一定存在最小正周期,如常数函数 $f(x)=C$ 和狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\0, & x\in\mathbf{Q}^C\end{cases}$ 均为周期函数,但无最小正周期.

(2) 函数周期性的几何意义

周期函数的图形是周期变化的.

(3) 最常见的周期函数是三角函数.

知识点3 分段函数、反函数、复合函数

1. 分段函数

(1) 分段函数是一种特殊形式的函数:在定义域不同的范围内,其对应关系用不同的表达式来表达.分段函数一般不是初等函数.

(2) 常见的分段函数

① 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\0, & x=0,\\-1, & x<0.\end{cases}$$

② 狄利克雷函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

2. 反函数

(1) 反函数是将自变量与因变量互换而得的函数,其对应关系与直接函数正好相反.

(2) 单调函数一定存在反函数,且反函数也单调.

(3) 反函数与直接函数的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(4) 常见的互为反函数的函数有:

指数函数与对数函数;三角函数与反三角函数;双曲函数与反双曲函数.

3. 复合函数

(1) 定义:设 $y=f(u)$ 的定义域为 U,$u=g(x)$ 的定义域为 X,值域为 U^*.如果 $U^*\subset U$,则称 $y=f[g(x)]$ 是由 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 构成的复合函数,u 称为中间变量.

(2) 两个以上的函数也可以复合,只要满足复合的条件.

(3) 并非任何两个函数都能复合.两函数能够复合的条件是内层函数的值域全部或部分落于外层函数的定义域之中,即两者的交集非空.

温馨提示 当内层函数的值域仅部分落于外层函数的定义域之中时,此时复合函数的定义域不再是原内层函数的定义域,通常只是其一个子集.

二 常考经典题型

题型Ⅰ 求函数的定义域

题型解析 函数的定义域需使得函数的所有部分有定义.例如分母不等于零、真数大于零、偶次根式下的式子要不小于零等.若同时包含这些约束,需找其公共部分,即求各集合的交集.

例1 求函数 $f(x)=\ln[\ln(\ln x)]+\sqrt{100-x^2}$ 的定义域.

解 要使 $\ln[\ln(\ln x)]$ 有意义,需 $\ln(\ln x)>0$,即 $\ln x>1$,这等价于 $x>\mathrm{e}$;要使 $\sqrt{100-x^2}$ 有意义,需 $x^2\leqslant100$,即 $|x|\leqslant10$,或表示为 $-10\leqslant x\leqslant10$.两集合的交集为 $\mathrm{e}<x\leqslant10$,故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(\mathrm{e},10]$.

例2 求函数 $y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}+\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln(x+1)}}$ 的定义域.

解 该函数受多个约束条件的限制.要使函数有意义,需满足

$$\begin{cases}x^2-1\geqslant0,\\\sqrt{x^2-1}\neq0,\\\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\leqslant1,\\x+1>0,\\\ln(x+1)\neq0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x^2-1>0,\\\sqrt{x^2-1}\geqslant1,\\x+1>0,\\x\neq0,\end{cases}$$

也即$\begin{cases}x^2-1\geqslant 1,\\ x>-1\text{ 且 }x\neq 0,\end{cases}$故所求定义域为 $D=\{x \mid x\geqslant\sqrt{2}\}$，或写为 $D=[\sqrt{2},+\infty)$.

方法技巧 求多个部分的交集时，若借助数轴表示，有助于简洁地得到结果.

特别提醒 若函数涉及实际问题，在保证数学式子有意义的同时，需要特别注意变量的实际意义，例如长度、时间、质量等均要非负.

题型Ⅱ　函数值的运算

题型解析 函数值的运算问题主要有两类：一是已知函数表达式，求给定点处的函数值；二是给出一些运算的结果，求函数的表达式.

例3 已知函数 $f(x+1)=x^2+2x-3$，求 $f(x)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$和$\dfrac{1}{f(a)}$.

解题提示：本题关键是求出 $f(x)$，可以采取两种不同的方法求解.

解法Ⅰ 采取"凑项"的方法，将等式右端表示成 $x+1$ 的函数

$$f(x+1)=x^2+2x+1-4=(x+1)^2-4,$$

于是便知

$$f(x)=x^2-4.$$

利用$f(x)$可直接得到 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{a^2}-4$ 和$\dfrac{1}{f(a)}=\dfrac{1}{a^2-4}$.

解法Ⅱ 将 $x+1$ 看作一个变量，即作变量代换 $t=x+1$，这样得到 $x=t-1$，代入原式有 $f(t)=(t-1)^2+2(t-1)-3=t^2-2t+1+2t-2-3=t^2-4$，故 $f(x)=x^2-4$.

求 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$和$\dfrac{1}{f(a)}$的步骤与结果同解法Ⅰ.

例4 设 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+x$，求 $f(x)$.

解法Ⅰ 令 $e^x+1=u$，$x=\ln(u-1)$，则

$$f(u)=(u-1)^2+(u-1)+\ln(u-1)$$
$$=u^2-u+\ln(u-1),$$

于是 $f(x)=x^2-x+\ln(x-1)$.

解法Ⅱ 因为

$$f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+x$$
$$=(e^x+1)^2-(e^x+1)+x$$
$$=(e^x+1)^2-(e^x+1)+\ln(e^x+1-1),$$

所以 $f(x)=x^2-x+\ln(x-1)$.

题型Ⅲ　函数的有界性

例5 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}+\sin x+\cos x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界.

证 设 $x\neq 0$，因为 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$，所以

$$x+\frac{1}{x}+\sin x+\cos x\geqslant 2+\sin x+\cos x$$
$$=2+\sqrt{2}\left[\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right]$$
$$=2+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

而 $0<2-\sqrt{2}\leqslant 2+\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant 2+\sqrt{2}$，即 $0<f(x)\leqslant\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}$.

取 $M=\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则有 $|f(x)|\leqslant M$，即函数$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上有界.

题型Ⅳ　函数的单调性

例6 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$，其中 $a>0$，求 a 的取值范围，使函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$上是单调函数.

解 在区间$[0,+\infty)$上任取 x_1，x_2，不妨设 $x_1<x_2$，注意到

$$f(x_1)-f(x_2)$$
$$=\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}-a(x_1-x_2)$$
$$=\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a(x_1-x_2)$$
$$=(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a\right).$$

(1) 当 $a\geqslant 1$ 时，因为$\dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<1$，所以$\dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a<0$. 又 $x_1-x_2<0$，故 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以，当 $a\geqslant 1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$上是单调递减函数.

(2) 当 $0<a<1$ 时，在区间$[0,+\infty)$上存在两个不同点 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{2a}{1-a^2}$，满足 $f(x_1)=1$，$f(x_2)=1$，即 $f(x_1)=f(x_2)$，所以函数 $f(x)$在区间$[0,+\infty)$上不是单调函数.

综上，当且仅当 $a\geqslant 1$ 时，函数 $f(x)$在区间 $[0,+\infty)$上是单调函数.

特别提醒 根据单调性的定义研究函数的单调性，关键是不等式的分析讨论，此时常常会用到一些基本的不等式；对于含参数的函数，应针对参数的取值范围分类讨论.

题型Ⅴ　函数的奇偶性

题型解析　利用定义研究函数奇偶性的步骤：

(1) 对任意的 x，写出 $f(-x)$ 的表达式，并考察它与 $f(x)$ 的关系.

(2) 根据两者关系，确定奇偶性. 有三种可能性：如果 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数；若前两式都不成立，则 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

例7　判断函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$
$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

故函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

题型Ⅵ　函数性质的综合应用

例8　已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x-4)=-f(x)$，且在区间 $[0,2]$ 上是增函数，若方程 $f(x)=m(m>0)$ 在区间 $[-8,8]$ 上有四个不同的根 x_1,x_2,x_3,x_4，求 $x_1+x_2+x_3+x_4$ 的值.

解题提示：注意到函数的奇偶性、单调性、对称性、周期性，以及由函数图像分析函数零点问题，运用数形结合的思想和函数与方程的思想解答问题.

解　因为函数 $f(x)$ 满足 $f(x-4)=-f(x)$，所以

$$f(x-8)=f(x-4-4)=-f(x-4)=f(x),$$

因此函数 $f(x)$ 是以 8 为周期的周期函数.　①

又因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，且 $f(x-4)=-f(x)=f(-x)$.

记 $x=t-2$，有

$$f(2-t)=f(-x)=f(x-4)=f(t-6)$$
$$=f(t+2-8)=f(t+2),$$

即函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称. ②

再由函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上是增函数，且是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(x)$ 在区间 $[-2,0]$ 上也是增函数，即 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上是增函数.　③

由②和③得，$f(x)$ 在区间 $[2,6]$ 上是减函数，且 $f(4)=0$.

再由①，②，③，得函数 $y=f(x)$ 的图像关于 $x=-6$ 对称.

由题意，方程 $f(x)=m(m>0)$ 在区间 $[-8,8]$ 上有四个不同的根 x_1,x_2,x_3,x_4，不妨设 $x_1<x_2<x_3<x_4$，由对称性(图 1-1)知 $x_1+x_2=2\times(-6)=-12$，$x_3+x_4=2\times2=4$，所以

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-12+4=-8.$$

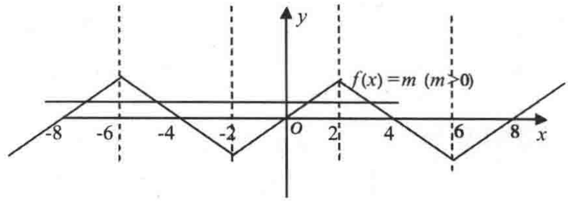


图 1-1

方法技巧　充分利用所给函数的奇偶性、单调性、对称性和周期性，结合函数图像来分析函数零点的情况.

题型Ⅶ　求反函数

题型解析　求给定函数的反函数，一般先将 x 反解出来，将 x 用 y 的表达式表达；然后将 x,y 对调，即得到用 x 表示自变量，y 表示因变量的反函数.

例9　求 $y=e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}}$ 的值域.

解　函数的值域就是其反函数的定义域，因而先求出反函数.

两边取对数，得 $\ln y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$，即 $x^3-1=\dfrac{1}{\ln^3 y}$，解得 $x=\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{\ln^3 y}}$，故原函数的反函数为 $y=\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{\ln^3 x}}$，它的定义域 $x>0$，且 $x\neq1$，所以原函数的值域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

题型Ⅷ　复合函数的运算

题型解析　函数的复合，主要是理清各函数对应关系，将中间变量依次代入而成. 多个函数复合，可以逐步进行两两复合的过程.

例10　已知 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，求 $f\left[\dfrac{1}{f(x)-1}\right]$.

解　因为 $f(x)-1=\dfrac{x}{x-1}-1=\dfrac{1}{x-1}$，

所以 $\dfrac{1}{f(x)-1}=x-1(x\neq1)$. 于是

$$f\left[\frac{1}{f(x)-1}\right]=f(x-1)=\frac{x-1}{(x-1)-1}$$
$$=\frac{x-1}{x-2}(x\neq1,x\neq2).$$

例11　已知 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant0,\\ x^2-1, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}|x|, & x\leqslant0,\\ 1-x^2, & x>0,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

解　该复合过程中，$g(x)$ 作为内层函数，其取值决定着外层函数的对应方式.

若 $g(x)\leqslant0$，解得 $x=0,1$ 及 $x>1$；

若 $g(x)>0$,解得 $x<0$ 或 $0<x<1$. 于是

$$f[g(x)]=\begin{cases}g(x)+1, & g(x)\leqslant 0,\\ [g(x)]^2-1, & g(x)>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-x^2+1, & x>1,\\ 1, & x=0,1,\\ (1-x^2)^2-1, & 0<x<1,\\ x^2-1, & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x^2-1, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ x^4-2x^2, & 0<x<1,\\ 2-x^2, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

特别提醒 分段函数的复合问题较为复杂,要根据外层函数的定义域求解针对内层函数形成的不等式,其结果通常会把定义域分成更多段,本例作为个例,两个分成两段定义的分段函数,它们的复合函数是一个分成四段的分段函数.

三 课后习题全解

习题 1-1(原题目见上册教材 P21~P23)

1. 解 $A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$,

$A\cap B=[-10,-5)$,

$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$,

$A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$.

2. 证 设 $x\in(A\cap B)^C$,则 $x\overline{\in}A\cap B$,于是 $x\overline{\in}A$ 或 $x\overline{\in}B$. 所以 $x\in A^C\cup B^C$,即

$$(A\cap B)^C\subset A^C\cup B^C.$$

又,若 $x\in A^C\cup B^C$,则 $x\in A^C$ 或 $x\in B^C$,即 $x\overline{\in}A$ 或 $x\overline{\in}B$,所以 $x\overline{\in}A\cap B$,即 $x\in(A\cap B)^C$,即

$$A^C\cup B^C\subset(A\cap B)^C.$$

综上,$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

3. 证 (1) 设 $y\in f(A\cup B)$,存在 $x\in A$ 或 B,使得 $y=f(x)$,于是有 $y\in f(A)$或$y\in f(B)$,即 $y\in f(A)\cup f(B)$,所以 $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$.

再设 $y\in f(A)\cup f(B)$,则 $y\in f(A)$或 $f(B)$,于是存在 $x\in A$ 或 B,使得 $y=f(x)$,即 $y\in f(A\cup B)$,所以 $f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$.

综上,$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(2) 设 $y\in f(A\cap B)$,存在 $x\in A\cap B$,使得 $y=f(x)$,有 $y\in f(A)$,且 $y\in f(B)$,即 $y\in f(A)\cap f(B)$,所以 $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

4. 解 (1) $3x+2\geqslant 0$,即 $x\geqslant -\frac{2}{3}$,定义域

$$D=\left[-\frac{2}{3},+\infty\right).$$

(2) $1-x^2\neq 0$,即 $x\neq\pm 1$,定义域

$$D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty).$$

(3) $\begin{cases}x\neq 0,\\ 1-x^2\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-1\leqslant x<0,\\ 0<x\leqslant 1,\end{cases}$ 定义域

$$D=[-1,0)\cup(0,1].$$

(4) $4-x^2>0$,定义域 $D=(-2,2)$.

(5) $x\geqslant 0$,定义域 $D=[0,+\infty)$.

(6) $x+1\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ (k 为整数),定义域

$$D=\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}-1\ (k\text{ 为整数})\right\}.$$

(7) $|x-3|\leqslant 1$,即 $2\leqslant x\leqslant 4$,定义域 $D=[2,4]$.

(8) $\begin{cases}3-x\geqslant 0,\\ x\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\leqslant 3,\\ x\neq 0,\end{cases}$ 定义域

$$D=(-\infty,0)\cup(0,3].$$

(9) $x+1>0$, 即 $x>-1$,定义域 $D=(-1,+\infty)$.

(10) $x\neq 0$, 定义域 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

5. 解 (1) 不同. 两者定义域不同.

(2) 不同. 两者对应法则不同.

$x<0$ 时,$f(x)=x,g(x)=-x$.

(3) 相同. 两者定义域、对应法则均相同.

(4) 不同. $g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x=\frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}$分母不能为 0,要求 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$(k 为整数),故 $f(x)$ 与 $g(x)$定义域不同.

6. 解 因为 $|x|=\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$,所以

$$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}.$$

同理,$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},\varphi(-2)=0.$$

综上,$y=\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{3},\\ -\sin x, & -\frac{\pi}{3}<x<0,\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3}.\end{cases}$

$y=\varphi(x)$的图形如图 1-2 所示.

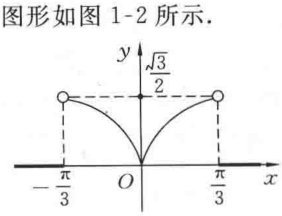


图 1-2

7. 证 (1) 设 $x_1<x_2$,且 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$,

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1-x_1}-\frac{x_2}{1-x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以函数 $y=\frac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增.

(2) 设 $x_1<x_2$ 且 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，
$f(x_1)-f(x_2)=(x_1+\ln x_1)-(x_2+\ln x_2)$
$=(x_1-x_2)+(\ln x_1-\ln x_2)$，
由于 $y=\ln x$ 为单调递增函数，所以

$$\ln x_1-\ln x_2<0.$$

又 $x_1-x_2<0$，所以 $(x_1-x_2)+(\ln x_1-\ln x_2)<0$，故 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$. 从而函数 $y=x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

8. **证** 设 $x_1,x_2\in(-l,0)$，且 $x_1<x_2$，则有 $-x_1,-x_2\in(0,l)$，且 $-x_2<-x_1$，由 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 上单调递增可得 $f(-x_2)<f(-x_1)$.
因为 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内是奇函数，所以 $f(-x_2)=-f(x_2)$，$f(-x_1)=-f(x_1)$，所以 $-f(x_2)<-f(x_1)$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.
从而对 $(-l,0)$ 内任意 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$. 因此 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

9. **证** 设 $f_1(x),g_1(x)$ 为奇函数，$f_2(x),g_2(x)$ 为偶函数，
(1) $f_2(-x)+g_2(-x)=f_2(x)+g_2(x)$，
即两个偶函数的和仍为偶函数.
$f_1(-x)+g_1(-x)=-[f_1(x)+g_1(x)]$，
即两个奇函数的和仍为奇函数.
(2) $f_2(-x)g_2(-x)=f_2(x)g_2(x)$，
即两个偶函数的积仍为偶函数.
$f_1(-x)g_1(-x)=f_1(x)g_1(x)$，
即两个奇函数的乘积是偶函数，并且
$f_2(-x)f_1(-x)=f_2(x)[-f_1(x)]=-f_2(x)f_1(x)$，
即偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

10. **解** (1) $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$，$f(x)$ 为偶函数.
(2) $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3\neq f(x)$，且 $f(-x)\neq -f(x)$，$f(x)$ 既非偶函数也非奇函数.
(3) $f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$，$f(x)$ 为偶函数.
(4) $f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$，$f(x)$ 为奇函数.
(5) $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1\neq f(x)$，且 $f(-x)\neq -f(x)$，$f(x)$ 既非偶函数也非奇函数.
(6) $f(-x)=\frac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$，$f(x)$ 为偶函数.

11. **解** (1) $y=\cos(x-2)$ 是周期函数，周期为 2π.
(2) $y=\cos 4x$ 是周期函数，周期为 $\frac{\pi}{2}$.
(3) $y=1+\sin \pi x$ 是周期函数，周期为 2.
(4) $y=x\cos x$ 不是周期函数.
(5) $y=\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ 是周期函数，周期为 π.

12. **解** (1) 将 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 改写为 $x=\sqrt[3]{y+1}$，得

$$y=x^3-1(x\in\mathbf{R}).$$

(2) 将 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 改写为 $x=\frac{1-y}{1+y}$，得

$$y=\frac{1-x}{1+x}(x\neq -1).$$

(3) 将 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 改写为 $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$，得

$$y=\frac{-dx+b}{cx-a}\left(x\neq\frac{a}{c}\right).$$

(4) 将 $y=2\sin 3x$ 改写为 $x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$，得

$$y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}(-2\leqslant x\leqslant 2).$$

(5) 将 $y=1+\ln(x+2)$ 改写为 $x=e^{y-1}-2$，得

$$y=e^{x-1}-2(x\in\mathbf{R}).$$

(6) 将 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$ 改写为 $x=\log_2\frac{y}{1-y}$，得

$$y=\log_2\frac{x}{1-x}(0<x<1).$$

13. **证** (1) 必要性：设 $f(x)$ 在 X 上有界，即存在数 $M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M,x\in X$. 因而 $-M\leqslant f(x)\leqslant M,x\in X$. 即 $f(x)$ 在 X 上既有上界 M，又有下界 $-M$.
(2) 充分性：设 $f(x)$ 在 X 上有下界 M_1，上界 M_2，即 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2,x\in X$.
令 $M=\max(|M_1|,|M_2|)$，则 $-M\leqslant M_1,M_2\leqslant M$，因而 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$，$x\in X$. 即 $|f(x)|\leqslant M,x\in X$，所以 $f(x)$ 在 X 上有界.

14. **解** (1) $y=\sin^2 x$，$y_1=\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^2=\frac{1}{4}$，
$y_2=\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2=\frac{3}{4}$.
(2) $y=\sin 2x$，$y_1=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y_2=\sin\frac{\pi}{2}=1$.
(3) $y=\sqrt{1+x^2}$，$y_1=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，
$y_2=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$.
(4) $y=e^{x^2}$，$y_1=e^0=1$，$y_2=e^1=e$.
(5) $y=e^{2x}$，$y_1=e^2$，$y_2=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$.

15. **解** (1) 要使 $0\leqslant x^2\leqslant 1$，当且仅当 $x\in[-1,1]$，故 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1,1]$.
(2) 要使 $\sin x\in[0,1]$，当且仅当 $x\in[2k\pi,(2k+1)\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$，故 $f(\sin x)$ 的定义域是 $\{x\mid x\in[2k\pi,(2k+1)\pi],k\in\mathbf{Z}\}$.
(3) 要使 $x+a\in[0,1]$，当且仅当 $x\in[-a,1-a]$，故 $f(x+a)$ 的定义域为 $[-a,1-a]$ $(a>0)$.

(4) 若 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$，定义域为 $[a,1-a]$；若 $a>\frac{1}{2}$，则函数无定义.

16. **解** $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$

如图 1-3(a)所示.

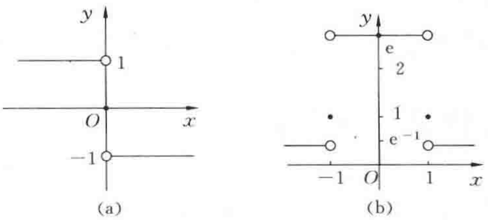


图 1-3

$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$

如图1-3(b)所示.

17. **解** 如图 1-4 所示，记 $BC=b$，由 $CD=\frac{h}{\sin\varphi}$，$AD=b+2CD\cos\varphi=b+2h\cot\varphi$，从而

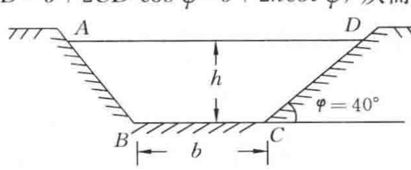


图 1-4

$S_0=\frac{1}{2}h(BC+AD)=\frac{h}{2}\left(b+b+2\frac{h}{\sin\varphi}\cos\varphi\right)$

$=h(b+h\cot\varphi)$. ①

由 $AB=CD$，所以

$L=AB+BC+CD=b+2CD=b+\frac{2h}{\sin\varphi}$， ②

由①②消去 b，得 $S_0=h\left(L-\frac{2h}{\sin\varphi}+h\cot\varphi\right)$，

从而有

$L=\frac{S_0}{h}+\frac{2h}{\sin\varphi}-h\cot\varphi=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h$，

即所求湿周 L 与水深 h 之间的函数关系式为

$$L=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h.$$

由题意可知，其定义域由 $h>0$ 和 $b>0$ 所确定，❶

由①式可知 $b=\frac{S_0}{h}-h\cot 40^\circ>0$，从而

$$h^2<S_0\tan 40^\circ,$$

所以 $0<h<\sqrt{S_0\tan 40^\circ}$，

所求定义域为 $(0,\sqrt{S_0\tan 40^\circ})$.

难点注释：❶对固定形状的水渠，S_0 为定值意味着：h 既不能太小，也不能太大.

18. **解**

(1) $p=\begin{cases}90, & 0\leqslant x\leqslant 100,\\ 90-(x-100)\times 0.01, & 100<x<1\,600,\\ 75, & x\geqslant 1\,600.\end{cases}$

(2) $P=(p-60)x$

$=\begin{cases}30x, & 0\leqslant x\leqslant 100,\\ [30-(x-100)\times 0.01]x, & 100<x<1\,600,\\ 15x, & x\geqslant 1\,600.\end{cases}$

(3) 当定购 1 000 台时，按(2)的结论厂方可获利

$P=31x-0.01x^2$

$=[31\times 1\,000-0.01\times(1\,000)^2]=21\,000$(元)，

所以定购 1 000 台时，厂商获利 21 000 元.

19. **解** 已知华氏度与摄氏度之间是线性关系，故假设 $F=aC+b$，其中，a,b 为常数，又由 $F=32$ 时，$C=0$；及 $F=212$ 时，$C=100$，得 $a=1.8$，及 $b=32$，所以

$$F=1.8C+32，或 C=\frac{5}{9}(F-32).$$

(1) 当 $F=90$ 时，$C=\frac{5}{9}(90-32)\approx 32.2$.

当 $C=-5$ 时，$F=1.8\times(-5)+32=23$.

(2) 设温度 t 符合题意，则有 $t=1.8t+32$，解得 $t=-40$. 即 -40°F恰好也是 -40℃.

20. 解题提示：人口增长的指数模型是：$P(t)=P(t-1)\cdot(1+r)$，或 $P(t)=P_0\cdot(1+r)^t$，其中 $P(t)$ 表示第 t 年的人口数，r 表示年平均增长率，P_0 表示初始年份的人口数. 本题要利用该模型推测某一年的人口数，需要确定：(1)哪一年算作初始年份，以及初始年份的人口数；(2)人口增长率 r，或前后两年人口数的比值 $1+r$；(3)预测年份相对于初始年份，是其后的多少年.

解 由给定的数据表中第 3 列，可假设：1986 年后，任一年的世界人口是前一年人口的 1.018 倍，❶

于是，1986 年后的第 t 年世界人口数满足指数模型：❷

$P(t)=4\,936\cdot(1.018)^t$(百万)，❸

2010 年是 1986 年后的第 24 年，即 2010 年相当于 $t=24$，所以按上述指数模型可得 2010 年的世界人口数为

$P(24)=4\,936\cdot(1.018)^{24}$

$\approx 7\,573.9$(百万)≈ 76(亿).

即推测 2010 年的世界人口约为 76 亿.

难点注释：❶前后两年人口数的比值 $1+r$；❷以 1986 年算作初始年份，初始年份的人口数4 936 百万；❸人口增长的指数模型：$P(t)=P_0(1+r)^t$.

第二节　数列的极限

一　教材内容全解

知识点1　数列极限的概念(重点)

1. 数列极限的定义

(1) 数列极限的概念刻画了数列的变化趋势.当 n 无限增大时,收敛的数列会越来越接近于一个常数,发散的数列不接近任何常数.

(2) 数列收敛的"ε-N"描述:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,∃正整数 N,当 $n>N$ 时,有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

(3) 数列发散的"ε-N"描述:$\{x_n\}$发散$\Leftrightarrow\forall a$,$\exists\varepsilon_0>0$,对∀正整数 N,总∃n_0,满足$n_0>N$,且

$$|x_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0.$$

温馨提示　ε是任意给定的正数,ε给出后就可看作固定的,然后求 N,N 依赖于ε,不是唯一的,只要存在、并是正数即可.

2. 数列极限的两种几何解释

(1) $\{x_n\}$以 a 为极限⇔对任意给定的开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$,从某个 N 项以后的一切 x_n 全部落在这个区间内.

(2) $\{x_n\}$以 a 为极限⇔当 n 充分大时,表示数列的点都聚集在 a 的附近.

知识点2　收敛数列的性质(重点)

1. 极限的唯一性

若数列收敛,则其极限是唯一的.

2. 收敛数列的有界性

收敛的数列必有界.

温馨提示　该结论反之不成立,即有界的数列不一定收敛.例如数列$\{(-1)^n\}$,它有界但不收敛.

3. 收敛数列的保号性

(1) 如果数列的极限为一正数(负数),则从某项起,后面所有的项全为正(负).

(2) 假设数列$\{x_n\}$从某项起都非负(非正),若数列收敛,则其极限也必非负(非正).

温馨提示　各项均为正值的数列,其极限不一定为正值,例如数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$,其各项均为正,但其极限却为0.

4. 收敛数列与其子数列间的关系

收敛数列的任一子数列也收敛,且所有子数列的极限与原数列相同.

温馨提示　(1) 由此结论可知:若存在某个子列发散,或者存在两个子列收敛于不同的极限,则原数列发散.

(2) 若数列的奇数子列和偶数子列收敛于同一个数,则原数列收敛,其极限也为该数.

(3) 发散的数列也可能有收敛的子数列.

二　常考经典题型

题型Ⅰ　证明数列的极限为某数

题型解析　利用数列极限的定义证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的关键是:"对任意给定的正数ε,寻求一个正整数 N,使得当 $n>N$ 时,恒有$|x_n-a|<\varepsilon$".为解该不等式,常常需要一系列不等式放大的过程,将不等式$|x_n-a|<\varepsilon$化简为方便求解的形式.如放大成$|x_n-a|<\cdots<\Phi(n)$,则要使$|x_n-a|<\varepsilon$成立,只需 $\Phi(n)<\varepsilon$ 即可,解此不等式得 $n>\Phi^{-1}(\varepsilon)$,即得所找的正整数 $N=[\Phi^{-1}(\varepsilon)]$.

例1　设$|q|<1$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

证　(1) 当 $q=0$ 时,结论显然成立.

(2) 当$0<|q|<1$时,对任意$\varepsilon>0$(不妨假设$\varepsilon<1$),要使$|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon$,只要$|q|^n<\varepsilon$.两边取自然对数,得 $n\ln|q|<\ln\varepsilon$.因$|q|<1$,$\ln|q|<0$,故得

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}.$$

取 $N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$,则当 $n>N$ 时,恒有$|q^n-0|<\varepsilon$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ 成立.

特别提醒　该结论说明,对于等比数列$\{q^n\}$,当公比的绝对值小于1时(此时称该数列为无穷递缩等比数列),其极限必为0.这是一个重要的结果,常常作为公式使用.

例2　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-\cos\sqrt{3n\pi}}{2n}=1$.

证　对任意$\varepsilon>0$,因为

$$\left|\frac{2n-\cos\sqrt{3n\pi}}{2n}-1\right|=\left|\frac{\cos\sqrt{3n\pi}}{2n}\right|\leqslant\frac{1}{2n}<\frac{1}{n},$$

要使$\left|\frac{2n-\cos\sqrt{3n\pi}}{2n}-1\right|<\varepsilon$,只要$\frac{1}{n}<\varepsilon$即可,即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$.取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$时,恒有$\left|\frac{2n-\cos\sqrt{3n\pi}}{2n}-1\right|<\varepsilon$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-\cos\sqrt{3n\pi}}{2n}=1$.

方法技巧 此题中直接从不等式 $|y_n-a|<\varepsilon$ 解出 N 并不容易，常采用先放大不等式再求出 N 的方法，这样确定的 N 可能不是最小的，但这并不矛盾，因为在极限定义中仅要求满足不等式条件的 N 存在，我们只要找出一个，说明其存在性即可. 事实上，找到一个 N 后，比该数大的自然数也都可以作为定义中要求的 N. 需要注意的是，放大不等式的手段多种多样，不管何种手段，只要能保证解出的 N 满足要求即可.

题型Ⅱ 借助于子数列分析原数列的敛散性

题型解析 根据数列与子数列的关系，可以判别部分数列的敛散性. 若数列的奇数子列和偶数子列都收敛，且极限一致，则可断定原数列收敛；若能找到两个子数列收敛于不同的极限，或找到某个子列发散，则可断定原数列发散.

例 3 判断下列数列是否收敛，对收敛数列，通过观察其变化趋势，写出极限.

(1) $x_n=\begin{cases}\dfrac{2^n}{3^n}, n\text{ 为奇数}, \\ \dfrac{1}{n}, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$　(2) $y_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

解 (1) 当 $n=2k$ 时，$x_{2k}=\dfrac{1}{2k}$，于是有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{2k}=0$；当 $n=2k+1$ 时，$x_{2k+1}=\dfrac{2^{2k+1}}{3^{2k+1}}$，是一个等比数列，其公比 $q=\dfrac{4}{9}$，由于 $|q|<1$，所以子列 $\{x_{2k+1}\}$ 收敛，且有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}=0$. 因为奇数子列和偶数子列有相同的极限，所以数列 $\{x_n\}$ 收敛，其极限为 0.

(2) 对于数列 $y_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$，取子列

$$\{y_{2k}\}: y_{2k}=\sin\frac{2k\pi}{2}=\sin k\pi=0\to 0,$$

即

$$\lim_{k\to\infty}y_{2k}=0;$$

再取子列

$$\{y_{4k+1}\}: y_{4k+1}=\sin\frac{(4k+1)\pi}{2}=\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$=\sin\dfrac{\pi}{2}=1\to 1$，即 $\lim\limits_{k\to\infty}y_{4k+1}=1$，即两子数列极限不同，所以数列 $y_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$ 发散.

三 课后习题全解

习题 1-2(原题目见上册教材 P30～P31)

1. 解 (1) 收敛，极限为 0.

(2) 收敛，极限为 0.

(3) 收敛，极限为 2.

(4) 收敛，极限为 1.

(5) 发散，n 为偶数时，$x_n\to+\infty\ (n\to\infty)$，$n$ 为奇数时，$x_n\to-\infty\ (n\to\infty)$.

(6) 收敛，极限为 0.

(7) 发散，$x_n\to+\infty\ (n\to\infty)$.

(8) 发散，n 为偶数时，$x_n\to 2\ (n\to\infty)$，n 为奇数时，$x_n\to 0\ (n\to\infty)$.

*2. **解** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}=0$. 对 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|x_n|<\varepsilon$，只需 $\left|\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\right|\leqslant\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即 $\dfrac{1}{\varepsilon}<n$，可取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $\varepsilon=0.001$ 时，$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]=1\ 000$.

方法技巧 由数列极限的定义证明给定的数列收敛到已知数 a，关键是对于任意给定的正数 ε，求出正整数 N，使之满足：当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

通常的步骤是：首先，声明 ε 是任意给定的正数；其次，求解满足不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 的 n，通常其解的形式形如 $n>\varphi(\varepsilon)$，则可取 $N=[\varphi(\varepsilon)]$；最后，完整陈述一遍定义：即对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $N=[\varphi(\varepsilon)]$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

*3. **证** (1) $\forall\varepsilon>0$，要使 $\dfrac{1}{n^2}<\varepsilon$，只需 $n>\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}$，可取 $N=\left[\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}\right]$，则对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N=\left[\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}\right]$，当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$，因为 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|=\left|\dfrac{-1}{2(2n+1)}\right|<\dfrac{1}{2n+1}<\dfrac{1}{n}$，要使 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$，只需 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 令 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

(3) $\forall\varepsilon>0$，由 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}\right|=\left|\dfrac{n^2+a^2-n^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}\right|=\left|\dfrac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}\right|<\left|\dfrac{a^2}{n}\right|$，要使 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，只需 $\left|\dfrac{a^2}{n}\right|<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{a^2}{\varepsilon}$. 令 $N=\left[\dfrac{a^2}{\varepsilon}\right]$，则对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1.$$

(4) $\forall \varepsilon > 0$，由 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1| = \frac{1}{10^n}$，要使 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1| < \varepsilon$，只需 $10^n > \frac{1}{\varepsilon}$，即

$$n > \lg\frac{1}{\varepsilon}.$$

令 $N = \left[\lg\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则对 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $N = \left[\lg\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n > N$ 时，有 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1| = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} 0.\underbrace{999\cdots9}_{n个} = 1$.

*4. **证** 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$，由极限的定义可知：对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，恒有 $|u_n - a| < \varepsilon$，而 $||u_n| - |a|| \leq |u_n - a|$. 于是 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，总有 $||u_n| - |a|| < \varepsilon$，故

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = |a|.$$

举例：$u_n = (-1)^n$，$|u_n| = |(-1)^n| = 1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ 不存在.

特别提醒 在有些问题的论证中，否定一个一般性结论的有效方法就是：举一个"反例"，即举例说明，虽然结论中的条件满足，但结论并不成立.

*5. **证** 因已知 $\{x_n\}$ 有界，故存在 $M > 0$，使得对一切 $n \in \mathbf{N}$，总有 $|x_n| \leq M$.

由已知 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$，故 $\forall \varepsilon > 0$，对正数 $\frac{\varepsilon}{M}$，总 $\exists N > 0$，❶

当 $n > N$ 时，恒有 $|y_n| = |y_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$，所以 $\forall \varepsilon > 0$，可取上述的 N，当 $n > N$ 时，恒有

$$|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

难点注释：❶如此找到的 N，可保证：当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n y_n| < \varepsilon$ 成立，即为 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n y_n = 0$ 定义中直接需要的 N.

*6. **解题提示**：数列 $\{x_n\}$ 由两部分组成，分别是偶数项构成的子列 $\{x_{2k}\}$（称为数列 $\{x_n\}$ 的偶子列），及奇数项构成的子列 $\{x_{2k-1}\}$（称为数列 $\{x_n\}$ 的奇子列）. 因为奇、偶子列都收敛，且极限均为 a，由数列收敛的几何意义，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，奇子列自某一项以后的各项都落在区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内，偶子列自某一项以后的各项也都落在区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内，因此，本题的关键是要找到 N，并说明数列 $\{x_n\}$ 自 N 以后的各项都落在区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内.

证 由 $k\to\infty$ 时，$x_{2k-1}\to a$，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists K_1 > 0$，当 $k > K_1$ 时，恒有 $|x_{2k-1} - a| < \varepsilon$. 又由 $k\to\infty$ 时，$x_{2k}\to a$，对上述的 ε，$\exists K_2 > 0$，当 $k > K_2$ 时，恒有 $|x_{2k} - a| < \varepsilon$，

取 $K = \max\{K_1, K_2\}$ ❶，当 $k > K$ 时，恒有 $|x_{2k-1} - a| < \varepsilon$ 与 $|x_{2k} - a| < \varepsilon$ 同时成立. 记 $N = 2K+1$，当 $n > N$ 时，无论 $n = 2k-1$，还是 $n = 2k$，恒有 $k > K$，自然 $|x_{2k-1} - a| < \varepsilon$ 与 $|x_{2k} - a| < \varepsilon$ 同时成立，即 $|x_n - a| < \varepsilon$，故

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

难点注释：❶类似这样确定 K，是一种非常重要的、使两个不等式同时成立的方法.

第三节　函数的极限

一　教材内容全解

知识点1　自变量趋于有限值时函数极限(重点　难点)

1. $x\to x_0$ 时函数极限的定义

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 刻画的是函数随其自变量变化而变化，两者之间所呈现的某种规律性——x 越接近 x_0，函数就越接近常数 A.

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的直观描述

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 当 $x\to x_0$ 时，函数无限接近于一个常数 A.

(3) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的"ε-δ"描述

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

温馨提示 (1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 描述了在 $x\to x_0$ 过程中，函数 $f(x)$ 的变化趋势. 极限存在与否，与函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的取值无关，即使函数在该点无定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 也可能存在.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$、$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ 是当 $x\to x_0$ 时极限不存在的三种特殊情形，这三种情形与 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 相比，共同点是函数随其自变量的变化均呈现出某种规律；不同点是前三种特殊情形对应的函数曲线上的点离坐标原点越来越远，而 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 对应曲线 $y = f(x)$ 上的点越来越接近于点 (x_0, A).

2. 左、右极限的概念

(1) 左极限

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow$任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当$-\delta<x-x_0<0$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2) 右极限

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow$任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<x-x_0<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

温馨提示 (1) 极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充分必要条件是左、右极限都存在且相等.

(2) 若左、右极限中至少有一个不存在,或者两者均存在但不相等,则极限一定不存在.

知识点2　自变量趋于无穷大时函数极限(重点　难点)

1. $x\to\infty$时函数极限的定义

(1) 极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的直观描述

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$当 $|x|$ 无限增大时,函数无限接近于一个常数 A.

(2) 极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的"ε-X"描述

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$任意 $\varepsilon>0$,存在 $X>0$,当 $|x|>X$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) 极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 是一个无限变化的过程,只要 x 的绝对值足够大,$|f(x)-A|$能够任意地小,要多小都可以实现.

温馨提示 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$描述了在 $x\to\infty$过程中函数 $f(x)$的变化趋势.

2. $x\to+\infty$和 $x\to-\infty$时的极限

(1) $x\to+\infty$时的极限

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$任意 $\varepsilon>0$,存在 $X>0$,当 $x>X$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2) $x\to-\infty$时的极限

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$任意 $\varepsilon>0$,存在 $X>0$,当 $x<-X$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

温馨提示 (1) 极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在的充分必要条件是极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$都存在且相等.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$中至少有一个不存在,或者两者均存在但不相等,则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不存在.

知识点3　函数极限的性质(重点)

1. 极限的唯一性

若函数的极限存在,则极限是唯一的.

2. 函数极限的局部有界性

如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)|\leqslant M$.

3. 函数极限的局部保号性

(1) 如果极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 为一正数(负数),则必存在 x_0 的某个去心邻域$\mathring{U}(a,\delta)$,在此范围内函数值全为正(负).

(2) 若在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$内,函数值 $f(x)$为非负(非正),且极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则其极限值也必非负(非正).

温馨提示 即使函数在定义域内的函数值恒正,其极限不一定为正值.例如$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,函数值恒大于 0,但其极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$.

二　常考经典题型

题型Ⅰ　用定义证明函数的极限为给定值

题型解析 利用函数极限的定义证明极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的关键是:"对任意给定的正数ε,寻求一个正数 δ,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$".求δ的关键是解不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$.与数列极限的情况类似,为了解该不等式,常需要将不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 放大为 $|f(x)-A|<\cdots<\Phi(|x-x_0|)$,转化为求解不等式$\Phi(|x-x_0|)<\varepsilon$,记不等式$\Phi(|x-x_0|)<\varepsilon$ 的解为 $0<|x-x_0|<\Phi^{-1}(\varepsilon)$,此时,取$\delta=\Phi^{-1}(\varepsilon)$即可作为满足定义要求的$\delta$.

例1 证明$\lim\limits_{x\to\theta}\sin x=\sin\theta$.

证 $$|\sin x-\sin\theta|=\left|2\sin\frac{x-\theta}{2}\cos\frac{x+\theta}{2}\right|\leqslant 2\cdot\left|\frac{x-\theta}{2}\right|\cdot 1=|x-\theta|.$$

对于任意 $\varepsilon>0$,要使 $|\sin x-\sin\theta|<\varepsilon$,只需 $|x-\theta|<\varepsilon$,于是取 $\delta=\varepsilon$,则对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\varepsilon>0$,当 $0<|x-\theta|<\delta$ 时,恒有

$$|\sin x-\sin\theta|\leqslant|x-\theta|<\delta=\varepsilon,$$

于是证得　$\lim\limits_{x\to\theta}\sin x=\sin\theta$.

方法技巧 这里应用三角函数的和差化积公式,并巧妙地运用了不等式$|\sin\theta|\leqslant\theta$,将所研究的不等式放大为只含$|x-\theta|$的简单不等式,使得$\delta$容易确定.

例2 证明$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x^2}=0$.

证 因为$\left|\dfrac{\cos x}{x^2}-0\right|=\dfrac{|\cos x|}{x^2}\leqslant\dfrac{1}{x^2}$,对任意 $\varepsilon<0$,要使 $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}-0\right|<\varepsilon$,只需$\dfrac{1}{x^2}<\varepsilon$,即

$|x|>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. 于是取 $X=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $X=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}>0$，当 $x>X$ 时，恒有

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}-0\right|\leqslant\frac{1}{x^2}<\frac{1}{X^2}=\varepsilon,$$

所以
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x^2}=0.$$

方法技巧 本题放大不等式时，借助了余弦函数的有界性 $|\cos x|\leqslant 1$.

题型Ⅱ　讨论某些极限是否存在

题型解析 证明函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，有三种常用的方法：

1. 证明函数的左、右极限不相等（见例 3）.

2. 寻找一数列 $\{x_n\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，但 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)$ 不存在.

3. 找两数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$，但 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to+\infty}f(y_n)$（见例 4）.

例3 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 3,\\ x^2, & x>3,\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ 是否存在？

解 所给函数是分段函数，$x=3$ 是分段点.

因为 $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}0=0$，$\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}x^2=9$，左、右极限不相等，所以极限 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ 不存在.

例4 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

证 取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$，$y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. 但是由于

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\sin 2n\pi=0,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{y_n}=\lim_{n\to+\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

三　课后习题全解

习题 1-3（原题目见上册教材 P37～P39）

1. 解 函数 $f(x)$ 如图 1-5 所示.

(1) $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=0$.　(2) $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=-1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，因为 $f(0^+)\neq f(0^-)$.

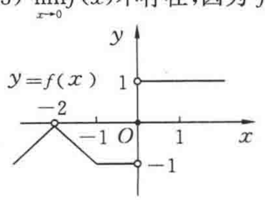


图 1-5

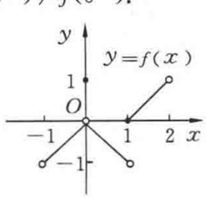


图 1-6

2. 解 函数 $f(x)$ 如图 1-6 所示.

(1) 错，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. ❶

(2) 对，因为 $f(0^+)=f(0^-)=0$.

(3) 错，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 与 $f(0)$ 的值无关.

(4) 错，$f(1^+)=0$，但 $f(1^-)=-1$，故 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在.

(5) 对，因为 $f(1^-)\neq f(1^+)$.

(6) 对.

难点注释：❶ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在与否与 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否有定义，以及在该点的取值无关.

3. 解 (1) 对.

(2) 对，因为当 $x<-1$ 时，$f(x)$ 无定义.

(3) 对，因为 $f(0^+)=f(0^-)=0$.

(4) 错，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 的值与 $f(0)$ 的值无关.

(5) 对.　(6) 对.　(7) 对.

(8) 错，因为当 $x>2$ 时，$f(x)$ 无定义，$f(2^+)$ 不存在.

4. 解 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}1=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$ 不存在.

***5. 证** (1) $\forall\varepsilon>0$，为使 $|3x-1-8|=3|x-3|<\varepsilon$，只需 $|x-3|<\frac{\varepsilon}{3}$. 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$，则 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}>0$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，恒有 $|3x-1-8|<\varepsilon$，故

$$\lim_{x\to 3}(3x-1)=8.$$

(2) 对于 $\forall\varepsilon>0$，为使 $|5x+2-12|<\varepsilon$，只需 $|x-2|<\frac{\varepsilon}{5}$. 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$，则 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta=\frac{\varepsilon}{5}>0$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，恒有 $|5x+2-12|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$.

(3) 对于 $\forall\varepsilon>0$，为使 $\left|\frac{x^2-4}{x+2}+4\right|=|x-2+4|=|x+2|<\varepsilon$，可取 $\delta=\varepsilon$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon>0$，当 $0<|x+2|<\delta$ 时，有 $\left|\frac{x^2-4}{x+2}+4\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$.

(4) 对于 $\forall\varepsilon>0$，为使 $\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=$