“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

高等数学

（下册）

修订本

大学数学编写委员会《高等数学》编写组 编

科学出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

高等数学

（下册）

（修订本）

大学数学编写委员会《高等数学》编写组　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书共 7 章，包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数、MATLAB 软件与多元函数微积分、数学建模初步等内容. 书中每节配有习题，每章编有小结，书末附有习题答案与提示，以便读者预习和自学.

本书适合用作普通高等院校的工科类、非数学专业的理科类、对数学要求较高的经济类、管理类等的本科生学习高等数学课程的教材，以及教师的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：下册/大学数学编写委员会《高等数学》编写组编. —修订本. —北京：科学出版社，2015

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

ISBN 978-7-03-045518-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①大… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 194206 号

责任编辑：胡海霞 / 责任校对：钟 洋

责任印制：霍 兵 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 11 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2015 年 8 月第 二 版 印张：22

2015 年 8 月第五次印刷 字数：550 000

定价：42.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

大学数学编写委员会《高等数学》(下册)编写组

主　编　尚有林

副主编　黎　彬　李保安　秦　青

编　委　杨万才　罗来兴　成军祥　张宏伟　罗　党　刘法贵
郭晓丽　张之正　张庆政　李东亚　任立顺　张永胜
骆传枢　刁　群　刘伟庆　李灵晓　仲从磊　许丽萍
杨德五　杨　森　王春伟　丁孝全　陈　鹏　李二强
常志勇　徐翠霞　王锋叶　陈金兰　李小申　李可人
龙　兰　田学全　王月清　邬　毅

前　言

高等数学是大学低年级学生必修的一门重要基础课，其主要作用一方面是为学生打好必要的数学基础，这不仅对学生在校学习本课程及后继课程起着基础作用，而且对学生毕业后的工作和在工作中进一步的知识更新将产生深远的影响；另一方面是使学生的逻辑思维、抽象思维、演绎思维、归纳思维等科学思维方法和研究问题的能力得到学习与提高，这将使学生们的思维模式、严谨程度、探索精神受到比较系统的训练，在提高人才综合素质上具有长远的作用与意义.

教育部颁布实施的《普通高中数学课程标准》(简称高中新课标)，已贯穿于全国普通高中新课程教学中，河南省于 2008 年起普遍将新课标使用于普通高中的数学课程教学. 新课标中的教学要求已涵盖了部分大学数学课程的知识，以至于目前大学数学教学与高中新课标培养出来的入校学生(2011 级始)基础不相适应，高校教师的大学数学教学遇到了困难和问题. 鉴于此种现状，河南省教育厅高教处、基础教育教学研究室，郑州大学，河南科技大学等单位针对新课标实施后大学数学的教学改革召开了座谈会、研讨会，并以河南省教育教学改革立项形式开展了研究. 河南省数学会的教学、科研研讨会上，不少专家、教授对此问题发表了看法及改革意见. 通过多种形式的会议研讨及意见征询，大家普遍认为高等数学、线性代数、概率论与数理统计是大学理、工、经、管、农、医等学科专业的必修基础课，也是大学数学教学与高中新课标教学联系最为紧密的课程，所以这三门公共基础数学的课程体系、教学内容及教学要求必须与中学数学教育接轨，否则在各高校课程教学学时减少的情况下，造成了时间上的浪费及教学效果的低下，不利于因材施教、人才培养，影响着教育质量的提高. 因此，这三门课程的教材建设是一个十分紧迫而又重要的工作，是大学数学教学改革的核心问题之一.

本书是在高等数学的课程体系、教学内容及教学要求与高中新课标接轨的情况下编写而成的. 编写的基本指导思想和目的是以教育部数学教学指导委员会制定的高等数学教学体系、教学内容、教学基本要求为指导，以做好与中学新课标的衔接为原则，以现行的教学大纲、教学要求为基础，以兼顾部分学生继续深造的入学要求为基本点，以为教师、学生提供一套使用方便、适于现实教学的良好教材为目的.

全书分为上、下两册. 本书为下册，内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数、MATLAB 软件与多元函数微积分、数学建模初步. 编写中除了高等数学的理论体系与知识外，还注意到学生对数学史的了解，关注到学生学数学、用数学的能力与素质，从而编写了数学史话、MATLAB 软件与微积分、数学建模初步等知识. 考虑到不同教学学时与要求，有利于分层次教学，将超出基本教学要求及供选学的内容冠以“*”号标记. 书中涉及的数学专用名词均有英文标注.

本书适合用作高等院校理科(不含数学类专业)、工科类等各本科专业的高等数学课程教材或教学参考书，也是教育、科技工作者案头的一套参考资料.

参加本书编写的有李保安(第 13 章)、杨德五(第 14 章、习题答案与提示)、杨万才(第

15章)、仲从磊(第10章)、刘伟庆(第9章)、李灵晓(第11章、第12章),另外,黎彬带领的重庆科技学院团队参与编写第11章、第12章.

本书由河南科技大学杨万才教授和商丘师范学院张庆政教授担任主编,李保安、杨德五、李小申担任副主编,他们负责完成了本书的审核与统稿工作.郑州大学、河南理工大学、河南工业大学、华北水利水电学院、郑州轻工业学院、洛阳师范学院、安阳师范学院、商丘师范学院、周口师范学院、黄淮学院、平顶山学院、洛阳理工学院等高校同仁为本书的编写提出了一些意见和建议,科学出版社的编辑为本书的出版付出了辛苦劳动,对此我们表示衷心感谢.

本书于2013年12月被批准为河南省“十二五”普通高等教育规划教材立项建设,于2014年10月被评为“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材.

由于编写时间仓促,编者水平有限,书中难免有一些错误和不妥之处,恳请各位读者批评指正.

编　者

2015年3月

目　　录

前言
第 9 章　空间解析几何与向量代数 …… 1
9.1　向量及其线性运算 …… 1
9.1.1　向量的概念 …… 1
9.1.2　向量的线性运算 …… 2
9.1.3　空间直角坐标系 …… 4
9.1.4　利用坐标作向量的线性运算 …… 6
9.1.5　向量的模、方向角、投影 …… 7
习题 9.1 …… 9
9.2　数量积　向量积　*混合积 …… 10
9.2.1　两向量的数量积 …… 10
9.2.2　两向量的向量积 …… 13
*9.2.3　向量的混合积 …… 15
习题 9.2 …… 17
9.3　曲面及其方程 …… 18
9.3.1　曲面方程的概念 …… 18
9.3.2　旋转曲面 …… 19
9.3.3　柱面 …… 21
9.3.4　二次曲面 …… 22
习题 9.3 …… 25
9.4　空间曲线及其方程 …… 25
9.4.1　空间曲线的一般方程 …… 25
9.4.2　空间曲线的参数方程 …… 26
9.4.3　空间曲线在坐标面上的投影 …… 28
习题 9.4 …… 30
9.5　平面及其方程 …… 30
9.5.1　平面的点法式方程 …… 30
9.5.2　平面的一般方程 …… 31
9.5.3　两平面的夹角 …… 32
习题 9.5 …… 34
9.6　空间直线及其方程 …… 35
9.6.1　空间直线的一般方程 …… 35
9.6.2　空间直线的对称式方程与参数方程 …… 35
9.6.3　两直线的夹角 …… 37

9.6.4 直线与平面的夹角 …… 37
9.6.5 线面综合题 …… 38
习题 9.6 …… 40
本章小结 …… 41
一、内容概要 …… 41
二、解题指导 …… 41
复习题 9 …… 42
第 10 章 多元函数微分法及其应用 …… 44
10.1 平面点集与多元函数 …… 44
10.1.1 平面点集 …… 44
10.1.2 二元函数的概念 …… 46
10.1.3 多元函数的极限 …… 47
10.1.4 多元函数的连续性 …… 48
习题 10.1 …… 50
10.2 偏导数 …… 51
10.2.1 偏导数的定义及其计算方法 …… 51
10.2.2 高阶偏导数 …… 54
习题 10.2 …… 55
10.3 全微分 …… 56
10.3.1 全微分的定义 …… 56
*10.3.2 全微分在近似计算中的应用 …… 58
习题 10.3 …… 59
10.4 复合函数微分法 …… 60
10.4.1 多元复合函数的求导法则 …… 60
10.4.2 多元复合函数的全微分 …… 64
习题 10.4 …… 64
10.5 隐函数 …… 65
10.5.1 一个方程的情形 …… 65
10.5.2 方程组的情况 …… 68
习题 10.5 …… 70
10.6 多元函数微分学的几何应用 …… 71
10.6.1 空间曲线的切线与法平面 …… 71
10.6.2 曲面的切平面与法线 …… 74
习题 10.6 …… 76
10.7 方向导数与梯度 …… 76
10.7.1 方向导数 …… 76
10.7.2 梯度 …… 78
习题 10.7 …… 81
10.8 多元函数的极值 …… 81

10.8.1　多元函数的极值 …… 82
10.8.2　多元函数的最大值与最小值 …… 84
10.8.3　条件极值与拉格朗日乘数法 …… 85
习题 10.8 …… 88
*10.9　最小二乘法 …… 89
*习题 10.9 …… 92
本章小结 …… 92
一、内容概要 …… 92
二、解题指导 …… 93
复习题 10 …… 93
第 11 章　重积分 …… 96
11.1　二重积分的概念和性质 …… 96
11.1.1　二重积分的概念 …… 96
11.1.2　二重积分的性质 …… 98
习题 11.1 …… 100
11.2　二重积分的计算法(一) …… 100
11.2.1　利用直角坐标计算二重积分 …… 100
11.2.2　利用对称性和奇偶性化简二重积分的计算 …… 105
习题 11.2 …… 106
11.3　二重积分的计算法(二) …… 108
11.3.1　利用极坐标计算二重积分 …… 108
*11.3.2　二重积分的换元法 …… 111
习题 11.3 …… 114
11.4　三重积分(一) …… 115
11.4.1　三重积分的概念 …… 115
11.4.2　利用直角坐标计算三重积分 …… 116
11.4.3　利用对称性和奇偶性化简三重积分的计算 …… 120
习题 11.4 …… 120
11.5　三重积分(二) …… 121
11.5.1　利用柱面坐标计算三重积分 …… 121
11.5.2　利用球面坐标计算三重积分 …… 123
*11.5.3　三重积分的换元法 …… 125
习题 11.5 …… 126
11.6　重积分应用 …… 126
11.6.1　几何应用 …… 126
11.6.2　物理应用 …… 130
习题 11.6 …… 135
本章小结 …… 135
一、内容概要 …… 136

二、解题指导 …… 136
复习题 11 …… 137
第 12 章　曲线积分和曲面积分 …… 141
12.1　对弧长的曲线积分 …… 141
12.1.1　对弧长的曲线积分的概念与性质 …… 141
12.1.2　对弧长的曲线积分的计算 …… 143
习题 12.1 …… 146
12.2　对坐标的曲线积分 …… 146
12.2.1　对坐标的曲线积分的概念与性质 …… 146
12.2.2　对坐标的曲线积分的计算 …… 149
12.2.3　两类曲线积分的联系 …… 153
习题 12.2 …… 155
12.3　格林公式及其应用 …… 156
12.3.1　区域的连通性及边界曲线的正向 …… 156
12.3.2　格林公式 …… 157
12.3.3　平面上曲线积分与路径无关的条件 …… 160
* 全微分方程 …… 164
习题 12.3 …… 166
12.4　对面积的曲面积分 …… 167
12.4.1　对面积的曲面积分的概念和性质 …… 167
12.4.2　对面积的曲面积分的计算 …… 168
习题 12.4 …… 171
12.5　对坐标的曲面积分 …… 171
12.5.1　有向曲面及其投影 …… 171
12.5.2　对坐标的曲面积分的概念和性质 …… 173
12.5.3　对坐标的曲面积分的计算 …… 175
12.5.4　两类曲面积分之间的联系 …… 177
习题 12.5 …… 180
12.6　高斯公式　* 通量与散度 …… 181
12.6.1　高斯公式 …… 181
* 12.6.2　沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件 …… 185
* 12.6.3　通量与散度 …… 186
习题 12.6 …… 187
12.7　斯托克斯公式　* 环流量与旋度 …… 188
12.7.1　斯托克斯公式 …… 188
* 12.7.2　空间曲线与路径无关的条件 …… 191
* 12.7.3　环流量与旋度 …… 191
习题 12.7 …… 192
本章小结 …… 193

一、内容概要 …… 193
二、解题指导 …… 193
三、人物介绍 …… 196
复习题 12 …… 197
第 13 章　无穷级数 …… 201
13.1　常数项级数的概念和性质 …… 201
13.1.1　常数项级数的概念 …… 201
13.1.2　收敛级数的基本性质 …… 205
*13.1.3　柯西审敛原理 …… 207
习题 13.1 …… 208
13.2　常数项级数的审敛法 …… 209
13.2.1　正项级数及其审敛法 …… 209
13.2.2　交错级数及其审敛法 …… 215
13.2.3　绝对收敛与条件收敛 …… 217
习题 13.2 …… 218
13.3　幂级数 …… 219
13.3.1　函数项级数的概念 …… 219
13.3.2　幂级数及其收敛性 …… 220
13.3.3　幂级数的运算 …… 224
习题 13.3 …… 228
13.4　函数展开成幂级数 …… 228
13.4.1　泰勒级数 …… 229
13.4.2　函数展开成幂级数 …… 230
习题 13.4 …… 237
13.5　函数的幂级数展开式的应用 …… 237
13.5.1　近似计算 …… 237
13.5.2　欧拉公式 …… 241
*13.5.3　微分方程的幂级数解法 …… 242
习题 13.5 …… 245
13.6　傅里叶级数 …… 245
13.6.1　三角级数　三角函数系的正交性 …… 245
13.6.2　函数展开成傅里叶级数 …… 247
13.6.3　正弦级数和余弦级数 …… 252
习题 13.6 …… 256
13.7　一般周期函数的傅里叶级数 …… 257
13.7.1　周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数 …… 257
*13.7.2　傅里叶级数的复数形式 …… 260
习题 13.7 …… 263
本章小结 …… 263

一、内容概要 …… 265
二、解题指导 …… 265
三、数学史与人物介绍 …… 266
复习题 13 …… 269
*第 14 章 MATLAB 软件与多元函数微积分 …… 272
14.1 多元函数微分学实验 …… 272
14.1.1 空间曲面及曲线绘图 …… 272
14.1.2 MATLAB 求极限 …… 273
14.1.3 MATLAB 求偏导数及全微分 …… 274
14.1.4 MATLAB 与微分法的几何应用 …… 274
14.1.5 MATLAB 求多元函数的极值 …… 278
14.2 多元函数积分学实验 …… 279
14.2.1 MATLAB 求二重积分 …… 279
14.2.2 MATLAB 求三重积分 …… 280
14.3 泰勒级数和傅里叶级数实验 …… 281
14.3.1 泰勒级数 …… 281
14.3.2 傅里叶级数 …… 282
本章小结 …… 284
复习题 14 …… 284
*第 15 章 数学建模初步 …… 285
15.1 数学建模的方法与步骤 …… 285
15.1.1 数学模型的分类 …… 285
15.1.2 数学建模的基本方法 …… 286
15.1.3 数学建模的过程及一般步骤 …… 286
15.2 全国大学生数学建模竞赛简介 …… 288
15.2.1 全国大学生数学建模竞赛的历史发展与现状 …… 288
15.2.2 全国大学生数学建模竞赛的宗旨与目的 …… 288
15.3 微积分模型 …… 289
15.3.1 椅子问题 …… 289
15.3.2 洗衣服中的数学 …… 291
15.3.3 通信卫星的电波覆盖的地球面积 …… 293
15.3.4 万有引力定律的发现 …… 294
习题 15.3 …… 297
15.4 微分方程模型 …… 297
15.4.1 传染病的传播 …… 297
15.4.2 交通问题模型 …… 302
习题 15.4 …… 303
15.5 简单的经济数学模型 …… 304
15.5.1 边际成本与边际收益 …… 304

15.5.2　效用函数…………………………………………………… 305
15.5.3　商品替代率………………………………………………… 305
15.5.4　效用分析…………………………………………………… 306
15.5.5　一个最优价格模型 ……………………………………… 306
习题 15.5 ………………………………………………………… 308
15.6　SARS 传播问题 ……………………………………………… 308
本章小结……………………………………………………………… 313
习题答案与提示……………………………………………………… 314

第 9 章　空间解析几何与向量代数

在平面解析几何中，通过坐标法把平面上的点与一对有次序的数对应起来，把平面上的图形和方程对应起来，从而可以用代数的方法来研究几何问题. 用代数方法研究空间几何图形就是空间解析几何，它是平面解析几何的拓广. 平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的，空间解析几何的知识对学习多元函数的微积分同样也是不可缺少的.

向量代数是解决许多数学、物理及工程技术问题的有力工具，本章先引进向量的概念，根据向量的线性运算建立空间坐标系，然后利用坐标讨论向量的运算，并介绍空间解析几何的有关内容.

9.1　向量及其线性运算

9.1.1　向量的概念

客观世界中有这样一类量，它们既有大小，又有方向，例如位移、速度、加速度、力、力矩等，这一类量叫做**向量**或**矢量**(vector).

在数学上，常用一条有方向的线段，即有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{AB}$(如图 9-1). 有时也用一个黑体字母(或书写时，在字母上面加箭头)来表示向量，例如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{F}$(或 $\vec{a},\vec{r},\vec{v},\vec{F}$)等.

在实际问题中，一些向量与起点有关，一些向量与起点无关. 由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，因此在数学上我们只研究与起点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**(free vector)(以后简称向量)，当遇到与起点有关的向量时，可在一般原则下作特别处理.

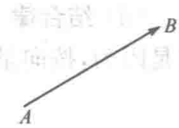

图 9-1

由于只讨论自由向量，所以如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，就说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是**相等的**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，即经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

向量的大小叫做向量的**模**(norm). 向量 $\boldsymbol{a},\overrightarrow{AB}$的模依次记作 $|\boldsymbol{a}|,|\overrightarrow{AB}|$. 模等于 1 的向量叫做**单位向量**(unit vector). 模等于 0 的向量叫做**零向量**(zero vector)，记作 $\mathbf{0}$. 零向量的起点与终点重合，它的方向可以看作是任意的.

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，任取空间一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，规定不超过 π 的$\angle AOB$(设 $\varphi=\angle AOB,0\leqslant\varphi\leqslant\pi$)称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**(如图 9-2)，记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$或$(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$，即$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi$.

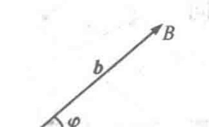

图 9-2

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在 0 到 π 之间任意取值. 如果$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或 π，就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；如

果$(\widehat{a,b})=\frac{\pi}{2}$,就称向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$**垂直**,记作$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 由于零向量与另一个向量的夹角可以在0到$\pi$之间任意取值,因此可以认为零向量与任何向量都平行,也可以认为零向量与任何向量都垂直.

当两个平行向量的起点放在同一点时,它们的终点和公共的起点在一条直线上. 因此,两向量平行又称两向量**共线**.

类似还有向量共面的概念. 设有$k(k\geqslant 3)$个向量,当把它们的起点放在同一点时,如果k个终点和公共起点在一个平面上,就称这k个向量**共面**.

9.1.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

向量的加法运算规定如下.

设有两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$,任取一点A,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再以$B$为起点,作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,连接$AC$(如图9-3),那么向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和,记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

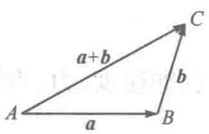

图 9-3

上述作出两向量之和的方法被称为向量相加的**三角形法则**.

力学上有求合力的平行四边形法则,仿此,也有向量相加的**平行四边形法则**,即:当向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不平行时,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以$AB$、$AD$为邻边作一平行四边形$ABCD$,连接对角线$AC$(如图9-4),显然向量$\overrightarrow{AC}$等于向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

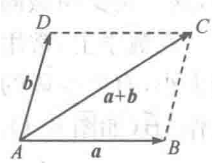

图 9-4

向量的加法符合下列的运算规律.

(i) **交换律**　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(ii) **结合律**　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

这是因为,按向量加法的规定(三角形法则),从图9-4可见

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c},$$

所以符合交换律. 又如图9-5所示,先作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$再加上$\boldsymbol{c}$,即得和$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$,如以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$相加,则得同一结果,所以符合结合律.

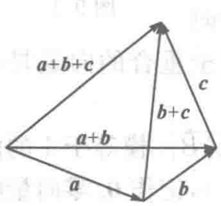

图 9-5

由于向量的加法符合交换律与结合律,故n个向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ $(n\geqslant 3)$相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

并按向量相加的三角形法则,可得n个向量相加的法则如下:使前一向量的终点作为次一向量的起点,相继作向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,再以第一向量的起点为起点,最后一向量的终点为终点作一向量,这个向量即为所求的和. 如图9-6,有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5.$$

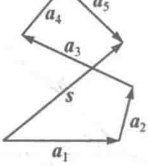

图 9-6

设$\boldsymbol{a}$为一向量,规定与$\boldsymbol{a}$的模相同而方向相反的向量叫做$\boldsymbol{a}$的**负向量**(negative vector),记作$-\boldsymbol{a}$,由此,定义两个向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的差

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}),$$

即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(如图 9-7(a)).

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

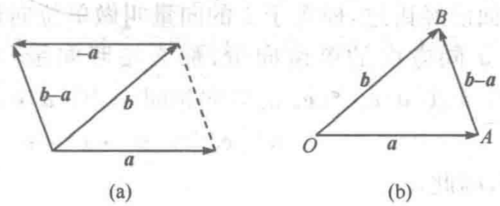

图 9-7

显然，任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O，有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},$$

因此，若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(如图 9-7(b)).

由三角形两边之和大于第三边，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \text{ 及 } |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中等号在 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向时成立.

2. 向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的**乘积**记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$ 即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的.

特别地，当 $\lambda=\pm1$ 时，有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\quad (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

向量与数的乘积符合下列运算规律.

(i) **结合律**

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}.$$

这是因为由向量与数的乘积的规定可知，向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$，$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$，$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 都是平行的向量，它们的指向也是相同的，而且

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\mu(\lambda\boldsymbol{a})|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|,$$

所以

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}.$$

(ii) **分配律**

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}, \tag{9.1}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}. \tag{9.2}$$

这个规律同样可以按向量与数的乘积的规定来证明，这里从略.

向量相加及数乘向量统称为**向量的线性运算**(linear operations).

例 1　证明：三角形两边中点连线平行于第三边，其长度等于第三边长度的一半.

证明　如图 9-8 所示，设 $AD=DB$，$AE=EC$，由向量的线性运算法则，有

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

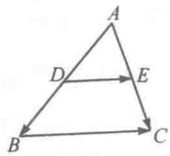

图 9-8

因此，$\overrightarrow{DE} /\!/ \overrightarrow{BC}$且$|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$.

前面已经讲过，模等于 1 的向量叫做单位向量. 设 $\boldsymbol{e}_a$（或 $\boldsymbol{a}^0$）表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，那么按照向量与数的乘积的规定，由于 $|\boldsymbol{a}|>0$，所以 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{e}_a$ 的方向相同. 又因 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 的模是

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{e}_a|=|\boldsymbol{a}|\cdot 1=|\boldsymbol{a}|,$$

即 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模也相同，因此，

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a.$$

我们规定，当 $\lambda\neq 0$ 时，$\frac{\boldsymbol{a}}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}$. 由此，上式又可写成

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{e}_a,$$

这表示一个非零向量与它的模的倒数数乘的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，因此，我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系.

定理 1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么，向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明 条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，取 $|\lambda|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负值，即 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向，且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

再证明数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减，便得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$

即 $|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0$，因 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$. 证毕.

定理 1 是建立数轴的理论依据. 我们知道，给定一个点、一个方向及单位长度，就确定了一条数轴. 由于一个单位向量既确定了方向，又确定了单位长度，因此，给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴. 设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox（如图 9-9），对于轴上任一点 P，对应一个向量$\overrightarrow{OP}$，由$\overrightarrow{OP}/\!/\boldsymbol{i}$，根据定理 1，必有唯一的实数 x，使$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$（实数 x 叫做轴上有向线段$\overrightarrow{OP}$的值），并知$\overrightarrow{OP}$与实数 x 一一对应，于是

$$\text{点 } P\leftrightarrow\text{向量}\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}\leftrightarrow\text{实数 } x,$$

从而轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系. 据此，定义实数 x 为轴上点 P 的坐标.

图 9-9

由此可知，轴上点 P 的坐标为 x 的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}.$$

9.1.3 空间直角坐标系

在空间取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴，依次记为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为**坐标轴**. 它们构成