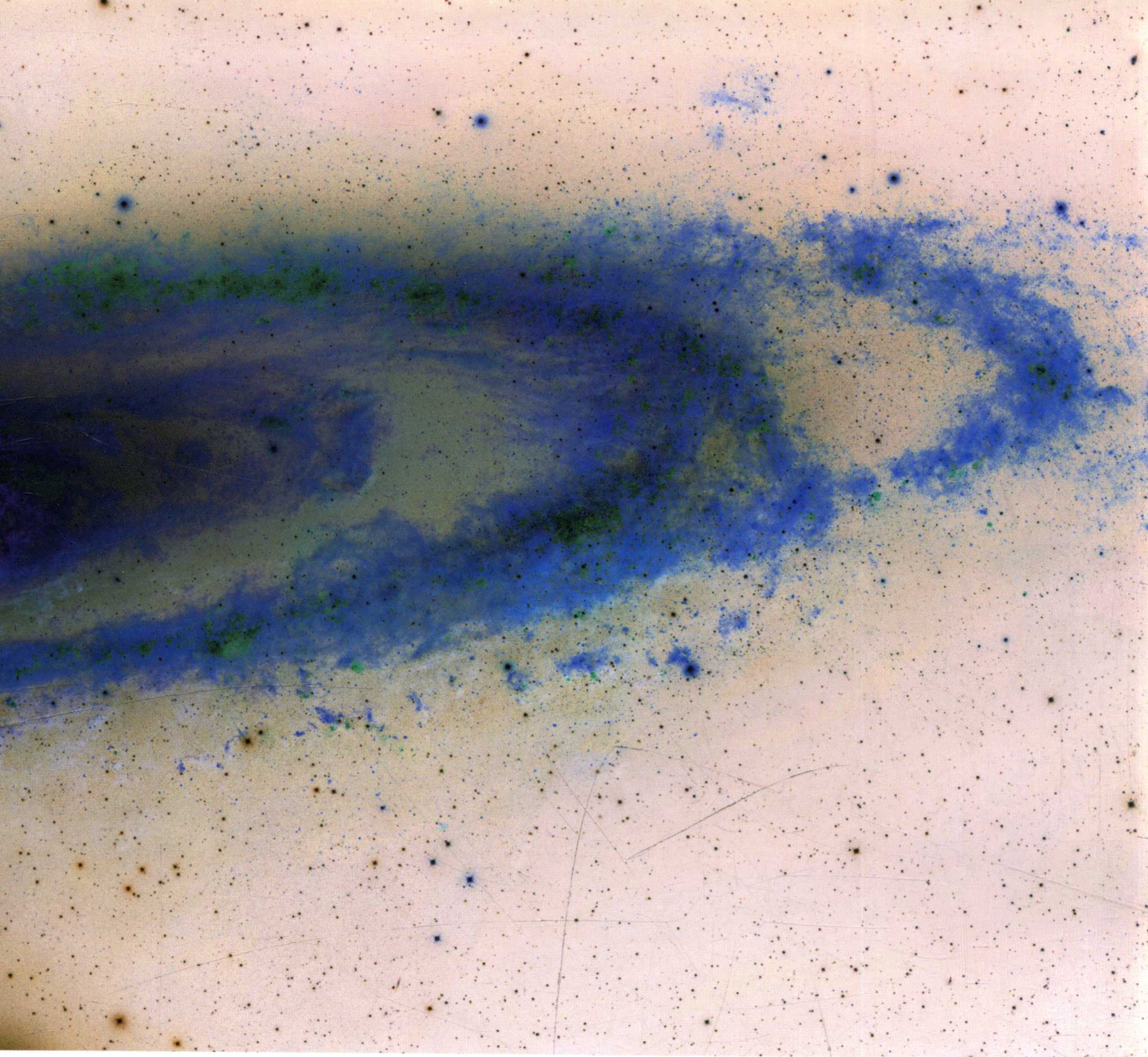

University Physics Study Guide

大学物理学习指导

主编 吴亚非

高等教育出版社

Daxue Wuli Xuexi Zhidao

大学物理学习指导

主编 吴亚非

编者（按音序排列）

顾洪恩 梁麦林 刘新典

孟湛祥 吴亚非

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是吴亚非主编的《大学物理》教材的配套学习指导书。本书一方面概括总结了《大学物理》所涉及的所有知识点、难点，并做了适当的扩展，另一方面对《大学物理》中各章的思考题与习题给出了相应的参考解答。

本书将《大学物理》涉及的全部内容归结为六类，每类对应一篇。在每篇中又分为学习指导、综合练习和解题参考三个部分。

本书可作为高等学校非物理专业大学物理课程的辅助教材，也可供社会读者阅读参考。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理学习指导 / 吴亚非主编. --北京：高等教育出版社，2015.9

ISBN 978-7-04-043275-6

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①吴… Ⅲ. ①物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O4

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第171743号

策划编辑 缪可可　　责任编辑 张海雁　　封面设计 张志奇　　版式设计 杜微言
插图绘制 杜晓丹　　责任校对 陈旭颖　　责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京凌奇印刷有限责任公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	18.75	版　　次	2015年9月第1版
字　　数	390千字	印　　次	2015年9月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	32.80元

物 料 号 43275-00

○ 前　　言

“大学物理”不仅是高等学校许多专业的公共基础课，而且是一门启迪智慧、培养科学思维方法的重要课程。

物理学对客观事物的运动规律有着独特的科学分析方法，它善于从错综复杂的客观世界中，找出事物运动发展中最关键的要素，提炼出简洁而又代表其本质的物理模型，从总结其客观规律的“知其然”开始，向着“知其所以然”一路追踪下去，使整个宇宙在人们的眼前变成一幅越来越清晰的图像，为各种“创新”提供了思想的原动力。因此，物理学有着自己独特的、严谨的、科学的思维模式。

为了更好地帮助学生学好大学物理，同时也为教师备课提供方便，我们特意编写了这本与主教材配套的学习指导书。本书一方面概括总结了主教材所涉及的所有知识点、难点；另一方面对教材中的习题与思考题给出了参考解答。

在本书的编写工作中，梁麦林负责编写第一篇至第六篇中的学习指导与综合练习部分，以及第14、15章的解题参考；孟湛祥负责编写第1、2、9、10章的解题参考；刘新典负责编写第3、4、11、12章的解题参考；吴亚非负责编写第5、6、7、8章的解题参考；顾洪恩负责编写第13章的解题参考。

由于水平有限，书中难免有不当之处，衷心希望使用此书的老师和学生们批评指正。

编　者

2015年2月

○ 目　　录

第一篇
力　学

一、学习指导

力学问题 1　描述运动的四个物理量

位矢、位移、速度和加速度：

这四个物理量描述质点的位置和运动状态，它们都是矢量，在直角坐标系中表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

位矢的大小是 $r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。位移的大小 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 一般不等于路程 Δs。无限小的位移表示为微分形式 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$；无限小位移的大小等于路程，即 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$。这是由于在无限小位移的情况下，两个点无限靠近，直线位移和曲线路程没有区别。无限小的位移沿轨道的切向，所以速度只有切向分量。

速度的大小或者速率是

$$v=|\boldsymbol{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} \tag{1.2}$$

上式给出了速率与路程的关系，而速率可以由速度的各个直角分量求出。例如，对于抛物运动，水平和竖直方向的速度分量知道后，就可以由上式求出速率，再通过积分求出路程，该路程即是一段抛物线的长度。

自然坐标系：

在自然坐标系中，坐标以路程的形式表示，即 $s=s(t)$，速度和加速度的表达式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=v\boldsymbol{e}_\mathrm{t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}\\ \boldsymbol{a}&=a_\mathrm{t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}+a_\mathrm{n}\boldsymbol{e}_\mathrm{n}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\end{aligned} \tag{1.3}$$

通过切向分量和法向分量，同样能够得到加速度的大小。例如，一个质点作半径为 R 的圆周运动，路程与时间的关系为 $s=2t^2-t^4$（m），速率 $v=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t=4t-$

$4t^3$（$\mathrm{m\cdot s^{-1}}$），切向加速度 $a_t=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=4-12t^2$（$\mathrm{m\cdot s^{-2}}$），法向加速度 $a_n=v^2/R=(4t-4t^3)^2/R$（$\mathrm{m\cdot s^{-2}}$）；再如质点作斜抛运动，在最高点处，加速度只有法向分量，数值为重力加速度 g，而速度只有水平分量，由速度的水平分量 v_{0x} 和重力加速度可以得到此处的曲率半径 $\rho=v_{0x}^2/g$。

平面极坐标系：

在平面极坐标系中，质点的位置、速度矢量的表达式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=r\boldsymbol{e}_r\\ \boldsymbol{v}&=v_r\boldsymbol{e}_r+v_\theta\boldsymbol{e}_\theta=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta\end{aligned}\tag{1.4}$$

式中，v_r 称为径向速度，v_θ 称为横向速度或角向速度。加速度表达式较为复杂，此处从略。

由位矢求速度、加速度是通过逐次求导数进行的；反过来，由加速度求速度、位矢则要通过逐次积分来进行。由于是矢量，积分时要按坐标系的每个分量分别进行积分。

力学问题 2　矢量的特性和运算

在大学物理中，经常或者说到处都有矢量的身影。熟悉并掌握矢量的运算是非常重要的。大学物理中会涉及矢量的以下一些主要性质。

矢量的表示方法：

矢量既有大小又有方向，**一个矢量有三种表示方法：与具体坐标系无关的抽象表示；大小乘以方向矢量（沿矢量方向的单位矢量）的表示；在具体坐标系中按分量的表示**。例如重力加速度，如果写成 $\boldsymbol{a}=g(-\boldsymbol{j})$，则等式左边是一个矢量的抽象表示，与具体的坐标系无关，等式右边表示加速度的大小为 g，而方向沿 y 轴的负向；如果写成 $\boldsymbol{a}=-g\boldsymbol{j}$，我们说加速度的 y 分量是 $-g$。弹性力也可以写成 $\boldsymbol{F}=kx(-\boldsymbol{i})=-kx\boldsymbol{i}$，第一个等号的左边是力的抽象表示，右边表明弹性力的大小是 kx，方向沿 x 轴的负向；第二个等号右边表示弹性力的 x 分量是 $-kx$。万有引力、库仑力也有这样的三种表示形式：

$$\boldsymbol{F}=-G\frac{m_1m_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r=-G\frac{m_1m_2}{r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{F}=k\frac{q_1q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r=k\frac{q_1q_2}{r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\tag{1.6}$$

从数学上看，这两种力的形式完全相同，因此有共同的性质，都是保守力。位矢、位移、速度、加速度四个矢量都可以有三种表示形式。

矢量的标量积（点积）和分解（投影）：

矢量的另一个性质是分解或者投影，可以用单位矢量与一个矢量的点积去完成。例如，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{v}=v_x$ 得到速度的 x 分量，也是速度在 x 轴上的投影。由于速度沿轨道的切向，所以与法向方向的单位矢量点积是零，即 $\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{v}=0$。元功是力与无限小位移的点积：

$$dW=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=F_t ds \tag{1.7}$$

写出上式用到了结果 $d\boldsymbol{r}=ds\boldsymbol{e}_t$，即无限小位移沿切向、大小为无限小路程。$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_t=F_t$ 是力在切向方向的投影或者分解。式（1.7）表明只有切向的力做功，法向的力不做功。洛伦兹力就是法向的力，不对电荷做功。如果质点在向心力场中作圆周运动，那么向心力一致保持为法向的力，因而不做功，质点的速度大小保持不变。

无限小位移在径向方向的投影是一个非常有用的结果：

$$\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{r}=dr \tag{1.8}$$

这一关系在计算万有引力做功、库仑力做功，或者计算点电荷的电势能等具有球对称或者柱对称等相关问题时非常有效。

在几何问题中，柱体的体积可以表示成底面面积矢量与高度矢量的点积。

矢量的矢量积（叉积）：

大学物理中还经常用到矢量的矢量积运算。两个矢量的矢量积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 是一个矢量，方向按右手螺旋定则给出：将右手四指由第一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 转向第二个矢量 $\boldsymbol{B}$，则右手拇指的方向即为矢量积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的方向。$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于两个矢量所决定的平面。矢量积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的大小为 $AB\sin\theta$，其中 θ 是两个矢量的夹角。如果两个矢量平行或者反平行，则两个矢量的矢量积为零。力矩、角动量、洛伦兹力、电流产生的磁场等都与矢量积有关。

三角形的面积可以用矢量积算出。如图 1.1 所示的三角形面积是

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB}\right| \tag{1.9}$$

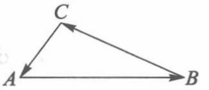

图 1.1　矢量的矢量积

当卫星绕着地球转动或者地球绕着太阳转动时，dt 时间内的位移是 $d\boldsymbol{r}$，位矢扫过的面积是 $\frac{1}{2}|\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r}|$。单位时间内扫过的面积就是 $\frac{1}{2}\frac{|\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r}|}{dt}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|$。我们知道对于这样的系统，角动量是守恒的，而角动量是 $\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$。所以位矢在单位时间内扫过的面积是恒定值，即相同时间位矢扫过的面积相等。

力学问题 3　相互垂直方向运动的独立性

在相互垂直的方向，位移、速度和加速度是相互独立的，例如：

$$v_x=\frac{dx}{dt},\ a_x=\frac{dv_x}{dt};\quad v_y=\frac{dy}{dt},\ a_y=\frac{dv_y}{dt};\quad v=\frac{ds}{dt},\ a_t=\frac{dv}{dt} \tag{1.10}$$

这实际上源于牛顿第二定律的线性形式。如果质点质量不变，则牛顿第二定律是 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$。用单位矢量点乘牛顿定律的两边会得到牛顿定律的分量形式：

$$F_x=ma_x,\quad F_y=ma_y,\quad F_z=ma_z \tag{1.11}$$

某一方向的加速度只与该方向上的力有关，与垂直方向的力无关，因此各个方向的加速度是相互独立的，这就引出了相互垂直方向上运动的独立性。如果牛顿定律不是线性的，则垂直方向的运动就不会是相互独立的。

物体运动的动能、外力做的功等，也可以写成各个方向相关量的和：

$$E_k=\frac{1}{2}mv_x^2+\frac{1}{2}mv_y^2+\frac{1}{2}mv_z^2 \tag{1.12}$$

$$dW=F_x dx+F_y dy+F_z dz \tag{1.13}$$

某一方向的功只改变对应方向的动能，就好像动能、做功也可以分解到不同方向一样。

力学问题 4　牛顿第二定律的一般形式和力学中的三个定理

牛顿第二定律的一般形式为

$$\boldsymbol{F}=\frac{d\boldsymbol{p}}{dt},\qquad \boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v} \tag{1.14}$$

这一表达式适用于单个和多个质点系统。当外力为零时，动量不变，得到动量守恒的结论。如果质量是可变的，从 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 不能得到动量守恒的结论，而只能得到外力为零时速度不变的结论。说明牛顿第二定律的一般形式 $\boldsymbol{F}=d\boldsymbol{p}/dt$ 比 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 更具普遍意义。

从牛顿第二定律出发，可以得到力学中的三个定理，即动量定理、动能定理和角动量定理，它们的微分、积分形式分别为

$$d\boldsymbol{I}=\boldsymbol{F}dt=d\boldsymbol{p},\qquad \boldsymbol{I}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}dt=\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1 \tag{1.15}$$

$$dW=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=dE_k,\qquad W=\int_{(1)}^{(2)}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=E_{k2}-E_{k1} \tag{1.16}$$

$$\boldsymbol{M}dt=d\boldsymbol{L},\qquad \int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{M}dt=\boldsymbol{L}_2-\boldsymbol{L}_1 \tag{1.17}$$

式中，$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ 为力矩，$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 为角动量。由式（1.15）知，当合外力 $\boldsymbol{F}=0$ 时，系统动量 $\boldsymbol{p}$ 守恒。由式（1.17）知，当合外力矩 $\boldsymbol{M}=0$ 时，系统角动量 $\boldsymbol{L}$ 守恒。

作用力按照做功的特点可以分为两种：保守力和非保守力。**保守力做功与路径无关，或者沿一个闭合路径，保守力做功是零**。根据保守力的这一特点，保守力做的功能够表示成一个函数在两点处的差值，这一函数被称为势能：

$$\begin{aligned} dW_{保} &= \boldsymbol{F}_{保}\cdot d\boldsymbol{r}=-dE_p \\ W_{保} &= \int_{(1)}^{(2)}\boldsymbol{F}_{保}\cdot d\boldsymbol{r}=-(E_{p2}-E_{p1})=E_{p1}-E_{p2} \end{aligned} \tag{1.18}$$

根据此定义，保守力做功等于势能的减少。由于势能的差等于保守力做的功，因此势能的绝对大小没有意义，可以选择任何一点的势能为零，该点称为势能的参考点。常用的势能有重力势能、弹性势能和万有引力势能；静电学中还有电势能。

[例题 1.1] 万有引力的功和万有引力势能

根据功的定义，可以直接算出万有引力的功：

$$W=\int_{(1)}^{(2)}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{(1)}^{(2)}\left(-G\frac{m_1m_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{r}\right)=\int_{(1)}^{(2)}\left(-G\frac{m_1m_2}{r^2}dr\right)$$

$$=G\frac{m_1m_2}{r_2}-G\frac{m_1m_2}{r_1}=E_{p1}-E_{p2}$$

做功与路径无关，这是保守力的特点。上式可以改写为

$$E_{p1}=E_{p2}+G\frac{m_1m_2}{r_2}-G\frac{m_1m_2}{r_1}$$

选择 r_2 点的势能 E_{p2} 为零，就得到了任意一点的势能。如果 r_2 无限大，就是选择无限远处为势能零点或者参考点，此时万有引力势能为

$$E_{p1}=-G\frac{m_1m_2}{r_1}$$

如果选择 r_2 为有限值（如 $r_2=r_0$），那么万有引力势能为

$$E_{p1}=G\frac{m_1m_2}{r_0}-G\frac{m_1m_2}{r_1}$$

无论选择哪一点的势能为零，被改变的只是势能本身的大小，但两点间的势能差不会改变。当然，此问题不能选择原点即 $r_2=0$ 处为势能零点，因为此处势能为无限大，出现发散现象。

[例题 1.2] 弹性力的功与弹性势能

有一个轻质弹簧，弹性力不服从胡克定律。该弹簧的弹性力 F 与弹簧形变 x 的关系为 $F=-kx-x^3/3$，问该力是不是保守力？如果是，对应的弹性势能是多少？

在 x_1、x_2 两点之间该力做的功为

$$W=\int_{x_1}^{x_2}F\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}(-kx-x^3/3)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\left(kx^2+\frac{1}{6}x^4\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}$$

可见，该力做功与路径无关，所以是保守力。取平衡点（即 $x=0$ 处）势能为零，则 x 处系统的势能为

$$E_p=\frac{1}{2}\left[kx^2+\frac{1}{6}x^4\right]$$

系统动能与势能之和 $E=E_k+E_p$ 称为机械能。当只有保守力做功时，系统的机械能守恒。另一等价说法是，当外力和非保守内力做功之和等于零时，系统机械能守恒。

力学问题 5　变力和变质量问题的求解

[例题 1.3] 力是速度的函数

$$F(v)=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\tag{1.19}$$

若在一个方程中有两个变量，为了得到两个变量之间的关系，就需要分离变量，即将两个变量分别移到方程的两边，然后积分得到结果。例如对式（1.19）有

$$\mathrm{d}t=m\frac{\mathrm{d}v}{F(v)},\qquad \int\mathrm{d}t=\int m\frac{\mathrm{d}v}{F(v)}+C\tag{1.20}$$

上式中的积分常数 C 需要由初始条件定出。式（1.20）用的是不定积分，也可

以用定积分处理，将式（1.20）写成

$$\int_{v_0}^{v} m\frac{\mathrm{d}v}{F(v)}=\int_0^t \mathrm{d}t=t$$

式中，v_0 对应 $t=0$ 时的速度。

［例题 1.4］力是坐标的函数

$$F(x)=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1.21}$$

此方程中出现了三个变量——坐标、速度和时间，分离变量出现了困难。为使方程中只有两个变量，可以在等式两边同乘 $\mathrm{d}x$，得到

$$F(x)\mathrm{d}x=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x=mv\mathrm{d}v \tag{1.22}$$

这样就可以消去一个变量，然后两边积分即可得到预期的结果：

$$\int_{x_0}^{x}F(x)\mathrm{d}x=\int_{v_0}^{v}mv\mathrm{d}v$$

式中，x_0、v_0 分别对应 $t=0$ 时的坐标、速度。该式的积分结果实际上是一维动能定理。

［例题 1.5］外力不存在，质量随时间变化

$$0=\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} \tag{1.23}$$

此式表示 $mv=p_0$ 是常量。质量增加时，速度减小，与实际一致。如果用 $F=ma=0$，则得不到这样的结果。这说明牛顿第二定律的一般形式（1.14）应用范围更广。

力学问题 6　刚体的定轴转动

角量与线量的关系：

刚体在作定轴转动时，刚体上的各个点都在作圆周运动，用角量能够统一描述刚体的定轴转动。角速度和角加速度分别为

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},\qquad \beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{1.24}$$

距离转轴 r 处一点转过的弧长、速率以及切向和法向加速度为

$$s=\theta r,\qquad v=\omega r,\qquad a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\beta,\quad a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{r}=\omega^2 r \tag{1.25}$$

刚体定轴转动定律与角动量定理：

对于定轴转动，刚体的角速度、角加速度都是沿转轴的方向，刚体定轴转动的角动量可以写成 $L=I\omega$，也是沿转轴的方向，于是角动量定理式（1.17）转化为刚体的定轴转动定律：

$$M=I\beta,\qquad I=\sum_i m_i r_i^2 \tag{1.26}$$

上式中的力矩亦沿转轴方向，其他方向的力矩对于绕该轴的转动没有影响。力矩

可以改变转动的状态，只有力而没有力矩，转动的状态是不会被改变的。对于一个初始时刻静止的刚体，当其所受力的力矩为零时，刚体是不会转动的。

由于刚体定轴转动只有两个转向，所以有关定轴转动的公式均以标量形式给出，若一个方向取正值，则另一个方向就取负值。

如将角动量定理式（1.17）应用于刚体，当刚体所受合外力矩为零时，刚体角动量守恒。地球自转一周的时间保持24小时，就是角动量守恒的反映。地球绕太阳年复一年地公转，而且周期几乎不变，也反映了该系统的角动量守恒。

另外，角动量守恒定律对非刚体也是成立的。这是因为角动量定理式（1.17）可以改写为 $\boldsymbol{M}=\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$，当合外力矩 $\boldsymbol{M}=0$ 时，角动量 $\boldsymbol{L}$ 守恒；对于定轴转动，就有 $I_1\omega_1=I_2\omega_2$，转动惯量减小，角速度增加。例如，花样滑冰运动员旋转角速度的改变就是通过改变自身转动惯量实现的。而由转动定律 $M=I\beta$，则只能得到角速度不变的结论。说明角动量定理 $\boldsymbol{M}=\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ 比转动定律 $M=I\beta$ 更具普遍意义。就像前文所述，牛顿第二定律的一般形式 $\boldsymbol{F}=\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$ 比 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 更具普遍意义。

刚体定轴转动动能定理：

刚体作定轴转动时，刚体上的各个点都在作圆周运动，力对刚体做功可以用力矩与角位移表示。采用自然坐标系，可以得到这一结果：

$$\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(F_\mathrm{n}\boldsymbol{e}_\mathrm{n}+F_\mathrm{t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t})\cdot\mathrm{d}s\boldsymbol{e}_\mathrm{t}=F_\mathrm{t}r\mathrm{d}\theta=M\mathrm{d}\theta \tag{1.27}$$

将转动定律式（1.26）代入式（1.27），得到刚体定轴转动动能定理微分、积分形式为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W&=M\mathrm{d}\theta=I\beta\mathrm{d}\theta=I\omega\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}E_\mathrm{k}\\ W&=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M\mathrm{d}\theta=\int_{\omega_1}^{\omega_2}I\omega\mathrm{d}\omega=E_\mathrm{k2}-E_\mathrm{k1}\end{aligned} \tag{1.28}$$

式中，$E_\mathrm{k}=\dfrac{1}{2}I\omega^2$ 为刚体作定轴转动的动能。

力学问题7　刚体转动惯量及相关定理

刚体转动惯量及决定因素：

刚体定轴转动惯量定义为

$$I=\sum_i m_ir_i^2,\qquad I=\int r^2\mathrm{d}m \tag{1.29}$$

求和式适用于质量离散分布的情况，积分式适用于质量连续分布的情况。由定义可知，决定刚体转动惯量的因素有三个：① 刚体的总质量；② 刚体的质量分布；③ 转轴的位置。求和或积分决定了转动惯量具有可加性，如果第一个物体相对某转轴的转动惯量为 I_1，第二个物体相对同一转轴的转动惯量为 I_2，则两物体相对该轴的总转动惯量为 $I=I_1+I_2$。

有关转动惯量的两个定理：

平行轴定理公式为

$$I=I_C+md^2 \tag{1.30}$$

式中，I_C 为刚体绕通过自身质心转轴的转动惯量，I 为刚体绕与质心轴平行的转轴的转动惯量，d 为两轴间距，m 为刚体质量。

正交轴定理公式为

$$I_z=I_x+I_y \tag{1.31}$$

此式适用于薄板状刚体，其中 I_x、I_y 分别为位于薄板上两个彼此垂直转轴的转动惯量，I_z 为垂直于薄板且通过板内两轴交点的转轴的转动惯量。

应用这两个定理，在有些情况下可以简化对转动惯量的计算。

力学问题 8　刚体定轴转动问题的求解

[例题 1.6] 转动圆盘的摩擦力矩

如图 1.2 所示，半径为 R、质量为 m 的匀质圆盘在水平桌面上转动，求摩擦力矩。

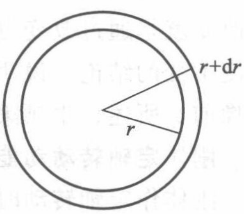

图 1.2　转动圆盘的摩擦力矩

解：摩擦力沿切向，力的作用点即半径各不相同，因此需要积分求解。计算积分要分三步进行：

第一步，分析清楚问题，设置合理的坐标系或者选择合适的变量。这是个平面问题，选择二维坐标系，径向坐标为 r，质量面密度为

$$\sigma=m/(\pi R^2)。$$

第二步，选择积分微元，计算出与微元相关的量，这是关键一步。选择面积微元为 r 到 $r+\mathrm{d}r$ 的圆环，面积为 $\mathrm{d}A=2\pi r\mathrm{d}r$，质量为 $\mathrm{d}m=\sigma\mathrm{d}A=\sigma2\pi r\mathrm{d}r$，所受的重力为 $g\mathrm{d}m=\sigma g2\pi r\mathrm{d}r$，摩擦力为 $\mathrm{d}F_\mathrm{f}=\mu g\mathrm{d}m=\mu g\sigma2\pi r\mathrm{d}r$，相对通过圆盘中心且垂直圆盘转轴的摩擦力矩为 $\mathrm{d}M=r\mathrm{d}F_\mathrm{f}=\mu g\sigma2\pi r^2\mathrm{d}r$。

第三步，积分得到总的摩擦力矩为

$$M=\int\mathrm{d}M=\int_0^R\mu g\sigma2\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\mu mgR$$

这是阻力矩，会使圆盘转速逐渐减小，最后停止。

[例题 1.7] 质点和刚体的组合力学系统

质点运动可用牛顿第二定律处理。如果系统中存在刚体，还要考虑刚体的转动定律。求解相关问题的基本过程是：① 分析系统中各个质点和刚体受到的力；② 列出质点运动的牛顿第二定律方程以及各个刚体的转动定律方程。注意，对于刚体，影响其运动状态的是力矩而不是力。列方程时还要考虑到无滑动条件，即刚体边缘的切向加速度（或称线加速度）等于质点的加速度，而线加速度等于刚体的半径乘以刚体的角加速度；③ 联立求解所得方程组就会得到刚体转动的角加速度或者质点运动的加速度。对于单轴问题，先求刚体的角加速度较为方便；而对于双轴问题，先求质点的加速度较为方便。最后解决其他相关问题，如转动的时间，质点运动的距离、速度等。

单轴问题：

如图 1.3 所示，两个半径分别为 R_1和 R_2（$R_1<R_2$）的滑轮黏合在一起，在半

径为 R_1 的滑轮右端通过缠绕的轻绳悬挂一质量为 m_1 的物体，另有一轻绳跨过半径为 R_2 的滑轮，右端悬挂质量为 m_2 的物体，左端有一力 F 向下拉动滑轮，如果绳子与滑轮之间没有相对滑动，求滑轮转动的角加速度。

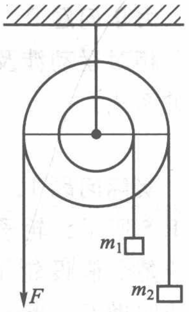

图 1.3　单轴问题

解：首先要分析受力。设与 m_1 和 m_2 连接的绳子中的张力分别为 F_{T1} 和 F_{T2}，每个物体受到两个力——重力和张力；影响滑轮转动的力矩由拉力 F 和两个绳子中的张力 F_{T1} 和 F_{T2} 产生。其次，列出动力学方程。以滑轮逆时针转动为运动正方向，物体服从牛顿第二定律：

$$F_{T1}-m_1g=m_1R_1\beta$$
$$F_{T2}-m_2g=m_2R_2\beta$$

式中，$R_1\beta=a_1$、$R_2\beta=a_2$ 分别为两个质点的线加速度。滑轮服从刚体定轴转动定律：

$$FR_2-F_{T1}R_1-F_{T2}R_2=I\beta$$

式中，$I=I_1+I_2$ 是两滑轮的总转动惯量。联立上述三个方程，得到滑轮角加速度为

$$\beta=(FR_2-m_1gR_1-m_2gR_2)/(I+m_1R_1^2+m_2R_2^2)$$

进一步可以得到绳子中的张力、质点的加速度等。注意：单轴问题先求解角加速度比较方便。

双轴问题：

如图 1.4 所示，一根轻绳跨过两个半径分别为 r 和 R 的定滑轮，右端悬挂质量为 m 的物体，左端有一力 F 向下拉绳。设绳子与滑轮之间没有相对滑动，求两个滑轮转动的角加速度。

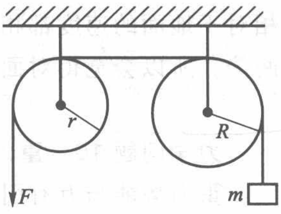

图 1.4　双轴问题

解：首先要分析受力。设两个滑轮之间的绳子中的张力为 F_{T1}，右端连接物体 m 的绳子中的张力为 F_{T2}，物体受向下的重力。其次，列出动力学方程。以滑轮逆时针转动为运动正方向，物体服从牛顿第二定律：

$$F_{T2}-mg=ma$$

两个滑轮服从刚体定轴转动定律：

$$Fr-F_{T1}r=I_1(a/r)$$
$$F_{T1}R-F_{T2}R=I_2(a/R)$$

式中，$a/r=\beta_1$、$a/R=\beta_2$ 分别是两个滑轮的角加速度，a 是滑轮边缘的线加速度或称为切向加速度，也是物体的加速度。联立上述三式，得到线加速度为

$$a=(F-mg)/(m+I_1/r^2+I_2/R^2)$$

进一步可以得到每个滑轮的角加速度、绳子中的张力等。注意：对于双轴或者多轴系统先求线加速度比较方便。

力学问题 9 相对运动

相对运动涉及三个物体，分别设为 A、B、C，三个物体间的相对速度满足以下关系式：

$$\boldsymbol{v}_{A对C}=\boldsymbol{v}_{A对B}+\boldsymbol{v}_{B对C}$$

实际问题 1：滚动车轮边缘相对于大地的速度。如图 1.5 所示，轮子上边缘的辐条看不清楚，而下面的非常清楚。假设轮子边缘的某一点叫做 A，车轴叫做 B，大地叫做 C。当一个人骑车向前走时，车轴向前行进的速度就是人前进的速度，记为 $v_C=v_{B对C}$。以车轴为参考系，车轮边缘各处的速率相同。如果车轮与地面间没有滑动，那么车轮边缘一点相对车轴的速率也是 v_C，即 $v_{A对B}=v_C$（车轴前进一个车轮周长的距离，接触地面的点会转动一圈，所以轮子边缘的速率等于车轴的速率）。站在地上观看车轮，根据相对运动速度关系式，轮子上边缘的速度为

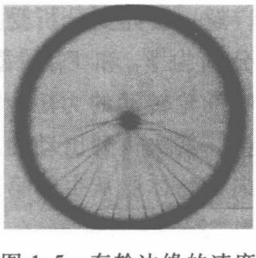

图 1.5 车轮边缘的速度

$$\boldsymbol{v}_{A对C}=\boldsymbol{v}_{A对B}+\boldsymbol{v}_{B对C}=2\boldsymbol{v}_C$$

而车轮与地面接触点的速度为

$$\boldsymbol{v}_{A对C}=\boldsymbol{v}_{A对B}+\boldsymbol{v}_{B对C}=-\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}_C=0$$

相对于地面，车轮上边缘的速度是车轴速度的两倍，车轮下边缘的速度是零。

实际问题 2：相向运动的火车上的人总是觉得对面的火车快。如果两列火车相对于地面的速度都相同，那么一列火车上的人看另一列火车的速度是该速度的两倍，所以会觉得对面的列车要比自己所在列车快得多。

力学问题 10 重力势能与万有引力势能

重力势能与万有引力势能的形式分别为

$$E_p=mgh,\quad E_p=-G\frac{mm'}{r} \tag{1.32}$$

一般来讲，重力势能的势能零点选在地球表面，而万有引力势能的势能零点选在无限远处。利用近似关系，有

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R+h}=\frac{1}{R(1+h/R)}\approx\frac{1}{R}\left(1-\frac{h}{R}\right) \tag{1.33}$$

这里 R 是地球的半径，并且假设 $h<<R$，万有引力势能因此可以写为

$$E_p=-G\frac{mm'}{R}\left(1-\frac{h}{R}\right)=-G\frac{mm'}{R}+mgh \tag{1.34}$$

式中，$g=Gm'/R^2$ 是重力加速度。如果让地球表面的势能为零，则万有引力势能变为重力势能。也就是说，重力势能的形式只有对于地球表面附近的质点才成立。

卫星在地球上方 R 处，卫星与地球的相互作用势能不能写成重力势能，而只

能是万有引力势能 $E_p=-Gmm'/(2R)$。

势能与两个物体有关，反映了它们之间的相互作用。万有引力势能是两个物体（天体）之间的势能，重力势能是物体与地球之间的势能。

力学问题 11　非惯性系

相对于惯性系（静止或匀速直线运动的参考系）作加速运动的参考系称为非惯性参考系。地球有自转和公转，我们在地球上所观察到的各种力学现象，实际上是非惯性系中的力学问题。

加速平动参考系中的惯性力：

牛顿定律不适用的参考系称为非惯性系，加速平动参考系就是非惯性系。在非惯性系中物体会受到惯性力的作用。当人们坐在车上，以车为参考系时，发现当车向前加速启动时，车上的物体居然可以无缘无故地向后加速运动，似乎有一个力作用在物体之上，这是一个什么力呢？它具有什么性质呢？施力物体是什么？无论我们怎样努力寻找，始终无法把这个力的施力物体找出来。为了弄清楚原因，我们下了车，在地面上以地面为参考系再来观察一番，这时我们恍然大悟，原来当车加速启动时，车上的物体就会相对于车厢反向加速运动起来，相对于地面，物体其实并没有发生运动而是保持静止状态，物体并没有受到力的作用，当然我们找不到施力物体了。可见，在不同参考系上观察物体的运动，观察的结果会截然不同！

一个物体在非惯性参考系中似乎在力作用下发生了加速运动，可是找不到其施力物体。为了使牛顿第二定律依然成立，人们假设了物体受到一个力的作用，这个力由物体质量与非惯性参考系加速度乘积的负值决定，但是由于找不到施力物体，人们认为这不是一个真实存在的力，而是一个虚构的力，把这个力称为“惯性力”，其数学形式为 $-m\boldsymbol{a}$。

惯性离心力与科里奥利力：

匀速转动参考系也是非惯性系。在匀速转动参考系中，质量为 m 的物体会受到惯性离心力 $-m\boldsymbol{a}_n$ 的作用，式中 $\boldsymbol{a}_n$ 是转动参考系的向心加速度。如果物体在转动参考系中运动，还会受到科里奥利力的作用，该力的数学形式为 $\boldsymbol{F}_C=2m\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{\omega}$，式中 $\boldsymbol{v}'$ 是物体 m 在转动参考系中的速度，$\boldsymbol{\omega}$ 是转动参考系自身的角速度。该力类似于洛伦兹力 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$，转动参考系的角速度起到磁场的作用。所以，质点在科里奥利力作用下的运动类似于带电粒子在磁场中的运动。惯性离心力和科里奥利力都是人们为了要在转动参考系中应用牛顿定律而人为虚构的“惯性力”，它们都找不到施力物体。重力加速度随地球纬度的变化以及傅科摆实验是验证它们存在的真实案例。

力学问题 12　质心运动定理与刚体纯滚动

质心：

火炮中发射的炮弹飞向空中，如果忽略空气阻力，炮弹的轨迹是一条抛物

线。如果炮弹在空中炸开，弹片将向各个方向散开。炮弹炸开是内力（火药）作用的结果，除重力外，炮弹并没有受到其他外力的作用，因此炮弹的整体仍应保持抛物线运动，这个作抛物线运动的点代表了炮弹整体的运动，这个点称为炮弹的质心。质心 $\boldsymbol{r}_C$ 一般表示为

$$\boldsymbol{r}_C=\frac{\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i}{m},\quad \boldsymbol{r}_C=\frac{\int \boldsymbol{r}\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}=\frac{\int \boldsymbol{r}\mathrm{d}m}{m} \tag{1.35}$$

求和适用于质量离散分布的质点系，积分适用于质量连续分布的刚体。实际上，刚体可以理解为由无穷多质点组成的特殊质点系，特殊是指这个质点系中的任意两质点间的距离始终保持不变。除此之外，有关质点系的结论一般情况下都适用于刚体。

质心运动定理：

质心的动量 $\boldsymbol{p}_C$ 等于质点系的总动量 $\boldsymbol{p}$，即

$$\boldsymbol{p}_C=\boldsymbol{p}=\sum_i \boldsymbol{p}_i=\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i=m\boldsymbol{v}_C \tag{1.36}$$

将其代入到牛顿第二定律的一般形式（1.14），得

$$\boldsymbol{F}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t}=m\boldsymbol{a}_C \tag{1.37}$$

此式称为质心运动定理，其意义在于，质点系的运动可以用质心点的运动来代表。

刚体的纯滚动：

刚体的滚动属于平面平行运动。刚体上的每个点都在各自的平面内运动且所有平面彼此平行。刚体的纯滚动是指只有滚动没有滑动，即只滚不滑。刚体的纯滚动可以看成是刚体质心的平动与绕过质心轴的转动的合成。以半径为 r 的圆柱体为例，纯滚动的运动学公式为

$$x_C=r\theta,\qquad v_C=r\omega,\qquad a_C=r\beta \tag{1.38}$$

等式左边的线量描述了质心的平动，等式右边的角量描述了绕质心轴的转动。纯滚动的动力学公式为

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}_C,\qquad M_C=I_C\beta_C \tag{1.39}$$

这是按照运动合成的观点，质心的平动采用质心运动定理处理；绕过质心轴的转动，按照刚体定轴转动处理。

从能量角度来说，纯滚动刚体的动能等于其质心的平动能与绕过质心轴的转动动能之和，即

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}I_C\omega^2 \tag{1.40}$$

处理纯滚动问题还可以采用瞬时轴的观点。如图 1.6 所示，圆柱体沿斜面向下滚动，某一时刻，圆柱体与斜面相接触的是过 P 点垂直图面的直线，称此直线为瞬时轴。圆柱体的滚动可以视为该时刻圆柱体绕瞬时轴的定轴转动。可采用定