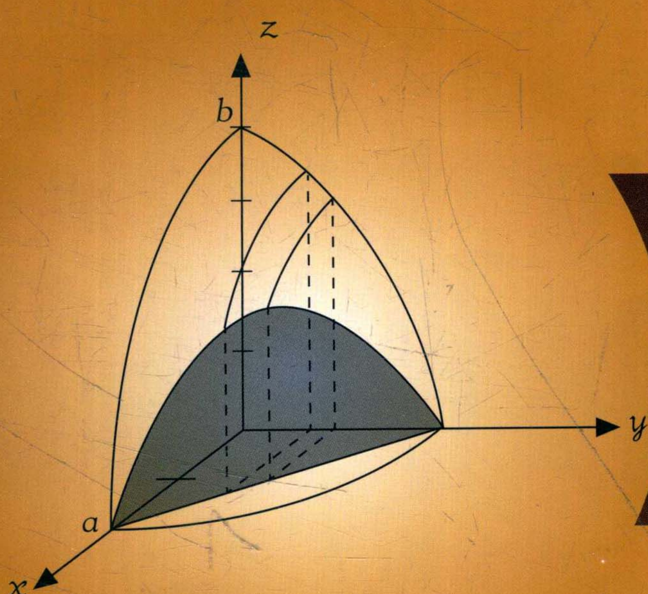
"十二五"江苏省高等学校重点教材

数学分析

（下册）

夏大峰　肖建中　成　荣　编著



科学出版社

“十二五”江苏省高等学校重点教材

重点教材编号：2015-2-028

数 学 分 析

(下册)

夏大峰　肖建中　成　荣　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书讲述数学分析的基本概念、原理与方法，分为上、下两册. 上册内容包括函数、数列极限、函数极限、函数的连续性、导数与微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分、定积分的应用、广义积分等.下册内容包括数项级数、函数项级数、幂级数与 Fourier 级数、多元函数的极限与连续性、多元函数微分学、隐函数定理及其应用、含参量积分、重积分、曲线积分、曲面积分等. 本书每节配有适量习题，每章还配有总习题，分为 A 与 B 两组. 书末有习题答案与提示，其中难度大的证明题有较详细的提示，以方便读者在自主学习时查看.

本书可作为理工科院校或师范院校数学类专业的教材，也可供其他相关专业选用.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(下册)/夏大峰，肖建中，成荣编著. —北京：科学出版社，2016.1

"十二五"江苏省高等学校重点教材

ISBN 978-7-03-046749-2

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①夏… ②肖… ③成… Ⅲ. ①数学分析–高等学校–教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 308773 号

责任编辑: 张中兴 / 责任校对: 邹慧卿

责任印制: 徐晓晨 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2016 年 1 月第　一　版　开本: 720 × 1000 1/16

2016 年 1 月第一次印刷　印张: 25

字数: 504 000

定价: 51.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

目　录

第 11 章 数项级数

CHAPTER 11

无穷级数 (简称级数) 是数学分析的一个重要组成部分. 如果说微积分是以连续变化的极限工具来研究函数, 那么级数则是以离散变化的极限工具来研究函数. 数项级数是最基本的级数, 通俗地说, 就是无穷多个数的代数和. 实际上在前面数列极限章节已经遇到过数项级数的例子, 只是没有系统地讨论. 本章基于数项级数基本性质的讨论, 着重解决其收敛性判别问题. 数列极限理论是本章所用的主要工具. 应当指出, 研究级数的重要目的是通过级数来进一步研究函数. 当然, 数项级数理论与方法本身在其他学科中也有着广泛的应用. 本章讨论数项级数的必要性主要在于它是后继两章节讨论函数项级数的基础.

11.1 数项级数概念及基本性质

有限多个实数相加是初等数学中较为简单的运算: 其一, 运算结果是一个实数; 其二, 运算过程允许使用结合律与交换律. 由此产生的问题是, 对于无限多个实数相加, 或者明确地说, 将一个数列的各项相加, 这两点是否仍成立? 以数列 $\{(-1)^n\}$ 为例进行讨论就会发现这两个问题的答案都是否定的. 因此, 对这种运算有必要建立它自身的严密的理论.

定义 11.1.1 设 $\{u_n\}$ 为数列, 对它的各项依次相加的表达式 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 称为**数项级数** (简称为**级数**), 记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \tag{11.1.1}$$

而 u_n 称为该级数的**通项**. 级数 (11.1.1) 的前 n 项之和, 记为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$

称它为该级数的**前 n 项部分和** (也称为数列 $\{u_n\}$ 的前 n 项部分和), 简称为**部分和**. 而级数 $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_k$ 称为级数 (11.1.1) 的**第 n 个余级数**或**余项**.

根据上述定义, 以级数的部分和 S_n 为通项构成一个新的数列, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S_n + R_n$.

定义 11.1.2 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**, 其和为 S, 记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$; 若 $\{S_n\}$ 发散, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**.

由定义可见, 当级数收敛时, 记号 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也表示该级数的和; 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 S, 则余级数 $R_n = S - S_n$, 此时 R_n 表示以部分和代替和所产生的误差. 发散级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 及其余级数仅仅是形式上的记号, 并不代表任何实数. 但是, 当部分和数列 $\{S_n\}$ 有广义极限, 如 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty\,(+\infty, -\infty)$, 也记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \infty\,(+\infty, -\infty)$, 并称该级数发散到无穷 (或正无穷, 负无穷).

例 11.1.1 设 $x \in \mathbb{R}$, 讨论**等比级数** (也称**几何级数**) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ 的敛散性.

解 考察几何级数的部分和 S_n. 当 $x \neq 1$ 时,

$$S_n = 1 + x + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x},$$

当 $x = 1$ 时, $S_n = n$. 因此, 当 $|x| < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-x^n}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$, 此时几何级数收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \dfrac{1}{1-x}$. 当 $|x| > 1$ 及 $x = 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, 此时几何级数发散到无穷. 当 $x = -1$ 时, $S_{2k-1} = 1$, $S_{2k} = 0$, 可知此时几何级数发散.

总之 (此结果务必记住), $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ 当 $|x| < 1$ 时收敛, 当 $|x| \geqslant 1$ 时发散; 特别地, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 都是发散的.

例 11.1.2 对固定的 $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+n_0)}$ 收敛, 并求它的和.

解 考察级数的部分和 S_n:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+n_0)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n_0}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n_0}\right] = \frac{1}{n_0}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n_0}\right]$$

$$= \frac{1}{n_0}\left[\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k} + \sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=n_0+1}^{n_0+n}\frac{1}{k}\right] = \frac{1}{n_0}\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k} - \frac{1}{n_0}\sum_{k=n+1}^{n_0+n}\frac{1}{k}.$$

由于

$$0 \leqslant \frac{1}{n_0}\sum_{k=n+1}^{n_0+n}\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n_0}\frac{n_0}{n+1} \to 0 \quad (n\to\infty),$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{n_0}\sum\limits_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k}$. 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+n_0)}$ 收敛, 其和为 $\frac{1}{n_0}\sum\limits_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k}$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+n_0)} = \frac{1}{n_0}\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k}.$$

根据以上的讨论, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性本质上可归结为其部分和数列 $\{S_n\}$ 的敛散性, 级数的相关问题可转化为数列问题. 有时需要相反的转化. 任给一个数列 $\{a_n\}$, 可将其视为某个数项级数的部分和数列, 这个级数是 (约定 $a_0=0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1}) = a_1 + (a_2-a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + \cdots. \tag{11.1.2}$$

数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当级数 (11.1.2) 收敛.

基于数列与级数的关系, 不难根据数列极限的性质推出下面有关级数的一些定理.

定理 11.1.1 (级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

证明 设级数的部分和为 S_n. 因为级数收敛, 故有实数 S 使 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. 于是

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

收敛的必要条件可以用来判定一些级数的发散性.

例 11.1.3 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\sin\frac{1}{n}$ 的敛散性.

解 记 $u_n = (-1)^n n\sin\frac{1}{n}$. 因 $|u_n| = n\sin\frac{1}{n} \to 1 \neq 0\ (n\to\infty)$, 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

值得注意的是, 通项趋于 0 仅仅是级数收敛的必要条件, 并不充分. 也就是说, 从通项趋于 0 不能得出级数收敛的结论.

例 11.1.4 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 发散, 但其通项趋于 0.

证明 显然通项 $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\to 0\ (n\to\infty)$. 由于当 $n\to\infty$ 时部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k]=\sum_{k=2}^{n+1}\ln k-\sum_{k=1}^{n}\ln k=\ln(n+1)\to+\infty,$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 发散.

注意到 $S_{n+p}-S_n=\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k$, 容易由部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛的 Cauchy 准则得出下面的级数收敛的 Cauchy 准则.

定理 11.1.2 (Cauchy 准则) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbb{Z}^+,\forall n>N,\forall p\in\mathbb{Z}^+,\text{有}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k\right|<\varepsilon.$$

Cauchy 准则是级数收敛的等价条件, 既可用来讨论级数的收敛性, 也可用来讨论级数的发散性. 由于 Cauchy 准则只涉及级数通项本身的信息, 在理论与应用上都是十分重要的.

例 11.1.5 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.

证明 (1) 记 $u_n=\dfrac{1}{n^2}$, 则

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k\right|&=\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k(k-1)}=\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{Z}^+$, $N\geqslant\dfrac{1}{\varepsilon}$, $\forall n>N,\forall p\in\mathbb{Z}^+$, 有 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k\right|<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$. 根据 Cauchy 准则, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

(2) 记 $u_n = \dfrac{1}{n}$, 则

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \geqslant \frac{p}{n+p}.$$

$\exists \varepsilon_0 = \dfrac{1}{3}$, $\forall N \in \mathbb{Z}^+$, $\exists n_0 = 2N > N$, $\exists p_0 = N \in \mathbb{Z}^+$, 有 $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \geqslant \dfrac{p_0}{n_0+p_0} = \dfrac{1}{3} = \varepsilon_0$. 根据 Cauchy 准则, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 (参见例 2.3.8).

推论 11.1.3 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是余级数 $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ 收敛于 0.

证明 设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 S, 部分和为 S_n. 则显然余级数 $R_n = S - S_n \to 0$ $(n \to \infty)$. 反之, 设余级数 R_n 收敛于 0. 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}^+$,$\forall n > N$, 有 $|R_n| < \varepsilon/2$. 于是 $\forall p \in \mathbb{Z}^+$, 有 $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| = |R_n - R_{n+p}| \leqslant |R_n| + |R_{n+p}| < \varepsilon$. 由 Cauchy 准则知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例 11.1.6 证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛.

证明 考察余级数 R_n, 有

$$\begin{aligned}
|R_n| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k-1}}{k}\right| \\
&= \left|\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) + \cdots\right| \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \cdots \\
&= \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right) - \cdots \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$. 所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛.

收敛的级数有与通常的有限个数的代数和相类似的一些性质.

定理 11.1.4 (线性性质) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, α, β 为常数, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n)$ 收敛, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n + \beta \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

证明 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分别为 A_n 与 B_n, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n + \beta v_n)$ 的部分和为 S_n, 则

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} u_k + \beta \sum_{k=1}^{n} v_k = \alpha A_n + \beta B_n.$$

由此可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n + \beta v_n)$ 收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \lim_{n\to\infty} S_n = \alpha \lim_{n\to\infty} A_n + \beta \lim_{n\to\infty} B_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

定理 11.1.4 表明, 对收敛的级数可以进行加法与数乘运算.

例 11.1.7 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n + n(-2)^n}{n3^n}$ 的敛散性.

解 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$ 收敛, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散, 故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n(-2)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} + \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

必是发散的.

定理 11.1.5 (加括号性质) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 对它的项任意加括号归组而不改变项的先后次序, 得到新级数

$$(u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots, \tag{11.1.3}$$

则新级数 (11.1.3) 也收敛, 且与原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 有相同的和.

证明 设原级数的部分和数列为 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$, 其和为 S. 则新级数(11.1.3)的部分和数列为 $S_{n_1}, S_{n_2}, \cdots, S_{n_k}, \cdots$, 显然它是 $\{S_n\}$ 的一个子数列. 由此可知, 它与 $\{S_n\}$ 有相同的极限 S. 所以加括号得到的新级数 (11.1.3) 也收敛, 且与原级数有相同的和.

定理 11.1.5 可以理解为: 收敛的级数满足加法结合律. 必须注意, 定理 11.1.5 的逆命题不成立, 就是说, 从加括号后的级数收敛, 不能断言原级数收敛. 例如, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 是发散的, 但它的加括号级数 $(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$ 收敛于 0. 根本原因在于, 从部分和数列的一个子列的收敛性不能推断原数列收敛.

从以后的讨论还会看到, 仅仅收敛的级数不足以保证加法交换律成立, 就是说, 改变收敛的级数中相加的次序, 所得的新级数未必还是收敛的.

例 11.1.8 判断下列级数的敛散性:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}+\cdots. \tag{11.1.4}$$

解 考虑对级数 (11.1.4) 加括号后的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}\right)+\cdots. \tag{11.1.5}$$

其通项 $v_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+1}=\dfrac{2}{n}$, 级数 (11.1.5) 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, 它是发散的, 故根据定理 11.1.5, 级数 (11.1.4) 发散.

下面的定理揭示了级数敛散性的本质.

定理 11.1.6 去掉、增加或改变级数的有限项不改变级数的敛散性 (但可能会改变收敛级数的和).

证明 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 改变有限项后得到的级数, 则 $\exists n_0\in\mathbb{Z}^+$, $\forall n>n_0$, 有 $v_n=u_n$. 因此根据 Cauchy 准则, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 有相同的敛散性. 将 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 去掉 k 项, 得到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+k}$. 令 $v_n=0\ (n=1,2,\cdots,k)$ 且 $v_n=u_n$ $(n\geqslant k+1)$. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+k}$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 改变 k 项得到的级数, 从而有相同的敛散性, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+k}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 有相同的敛散性. 再设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 增加有限项后得到的级数, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 去掉有限项后得到的级数, 根据上面的证明, 二者有相同的敛散性.

定理 11.1.6 表明, 一个级数是否收敛与前面有限项的取值无关. 因此, 对于仅

仅涉及级数敛散性的问题, 可以忽略级数最初有限项的条件, 可以对级数最初有限项作适当改变使其满足题设条件, 这都不影响问题的讨论.

习 题 11.1

1. 讨论下列级数的敛散性, 并求出收敛级数的和:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$; (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - 2}{3^{n-1}}$; (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)$.

2. 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. 证明:

(1) 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ 发散; (2) 当 $b_n \neq 0$ 时, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) = \frac{1}{b_1}$.

3. 应用 Cauchy 准则证明:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n(n+1)}$ 收敛; (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

4. 确定 x 的范围使下列级数收敛:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x)^{n-1}}$; (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{3^n}$.

5. 设级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 试问 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 一定发散吗? 又若 u_n 与 $v_n(n=1,2,\cdots)$ 都是非负数, 则能得出什么结论?

6. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$ 存在且级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛. 证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

11.2 上极限与下极限

在级数与实函数的进一步研究中不可避免要用到上下极限工具. 上极限与下极限的概念是极限概念的延伸与补充. 有了这一概念, 可以从一个新的视角来讨论极限.

定义 11.2.1 设 $\{a_n\}$ 是有界数列, 即 $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ 有 $|a_n| \leqslant M$. 则对 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 集合 $A_n = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$ 都有界. 根据确界原理, 可记

$$\underline{a}_n = \inf A_n = \inf_{k\geqslant n} a_k, \quad \overline{a}_n = \sup A_n = \sup_{k\geqslant n} a_k. \tag{11.2.1}$$

于是 $\forall n\in\mathbb{Z}^+$, 有 $|\underline{a}_n|\leqslant M,|\overline{a}_n|\leqslant M$, 且 $\underline{a}_n\leqslant\underline{a}_{n+1}$, $\overline{a}_n\geqslant\overline{a}_{n+1}$, 即 $\{\underline{a}_n\}$ 递增有界, $\{\overline{a}_n\}$ 递减有界. 根据单调有界定理, 这两个数列都收敛,$\{\underline{a}_n\}$ 的极限称为 $\{a_n\}$ 的**下极限**, $\{\overline{a}_n\}$ 的极限称为 $\{a_n\}$ 的**上极限**, 并分别记为 $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n\left(\text{或}\liminf\limits_{n\to\infty} a_n\right)$ 与 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n\left(\text{或}\limsup\limits_{n\to\infty} a_n\right)$, 即

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\underline{a}_n=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geqslant n}a_k,\quad \varlimsup_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\overline{a}_n=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n}a_k.\tag{11.2.2}$$

若 $\{a_n\}$ 无下界, 也称 $-\infty$ 是其下极限, 记为 $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$; 同样地, 若 $\{a_n\}$ 无上界, 则称 $+\infty$ 是其上极限, 记为 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$.

根据 (11.2.1) 式可知 $\underline{a}_n\leqslant\overline{a}_n$, 故由定义 11.2.1 立即得出

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty} a_n.\tag{11.2.3}$$

请注意, 有界数列的极限不一定存在, 但它的上极限与下极限却总是存在的. 例如, 数列 $\{(-1)^n\}$ 的极限不存在, 但它的上极限为 1, 下极限为 -1.

利用上极限与下极限的概念可得到一个极限存在性的判定定理.

定理 11.2.1 设 $\{a_n\}$ 是有界数列, 则 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n=\varlimsup_{n\to\infty} a_n.$$

证明 记 $\underline{a}_n=\inf\limits_{k\geqslant n}a_k$, $\overline{a}_n=\sup\limits_{k\geqslant n}a_k$, $n\in\mathbb{Z}^+$.

必要性 设 $\{a_n\}$ 收敛, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{Z}^+$, $\forall n>N$, 有 $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$. 于是取下确界与上确界可知 $\forall n>N$, 有

$$a-\varepsilon\leqslant\underline{a}_n\leqslant a_n\leqslant\overline{a}_n\leqslant a+\varepsilon.$$

这表明 $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\underline{a}_n=a=\lim\limits_{n\to\infty}\overline{a}_n=\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

充分性 设 $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n=\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{Z}^+$, $\forall n>N$, 有 $|\underline{a}_n-a|<\varepsilon$ 且 $|\overline{a}_n-a|<\varepsilon$. 但 $\underline{a}_n\leqslant a_n\leqslant\overline{a}_n$, 因而 $\forall n>N$ 有

$$a-\varepsilon<\underline{a}_n\leqslant a_n\leqslant\overline{a}_n<a+\varepsilon,$$

即有 $|a_n-a|<\varepsilon$. 因此 $\{a_n\}$ 收敛于 a.

上下极限有与极限相类似的一些性质.

定理 11.2.2 (保序性) 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是有界数列. 若 $\exists N_0\in\mathbb{Z}^+$, $\forall n>N_0$ 有 $a_n\leqslant b_n$, 则 $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty} b_n$ 且 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

证明 因为 $\forall n > N_0$ 有 $\underline{a}_n = \inf\limits_{k\geqslant n} a_k \leqslant \inf\limits_{k\geqslant n} b_k = \underline{b}_n$ 且 $\overline{a}_n = \sup\limits_{k\geqslant n} a_k \leqslant \sup\limits_{k\geqslant n} b_k = \overline{b}_n$, 故由极限保序性得

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \underline{b}_n = \varliminf_{n\to\infty} b_n \text{且} \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \overline{b}_n = \varlimsup_{n\to\infty} b_n.$$

定理 11.2.3 (保号性) 设 $\{a_n\}$ 是有界数列.

(1) 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = a < a_0$, 则 $\exists N_0 \in \mathbb{Z}^+$, $\forall n > N_0$ 有 $a_n < a_0$(即 $\{a_n\}$ 中至多有限项大于或等于 a_0);

(2) 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = b > b_0$, 则 $\exists N_0 \in \mathbb{Z}^+$, $\forall n > N_0$ 有 $a_n > b_0$(即 $\{a_n\}$ 中至多有限项小于或等于 b_0).

证明 只证明 (1), 用类似方法可证明 (2). 记 $\overline{a}_n = \sup\limits_{k\geqslant n} a_k$. 对 $\varepsilon_0 = a_0 - a > 0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a}_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 故 $\exists N_0 \in \mathbb{Z}^+$, $\forall n > N_0$ 有 $\overline{a}_n < a + \varepsilon_0 = a_0$, 从而 $a_n \leqslant \overline{a}_n < a_0$.

定理 11.2.4 (和运算性质) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是有界数列, 则

(1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$ 且 $\varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \geqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n$;

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 则

$$\varlimsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n \text{且} \varliminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n.$$

证明 只证明 (1) 中第一式与 (2) 中第一式, 其余式子的证明方法类似. 因为

$$\sup_{k\geqslant n}(a_k + b_k) \leqslant \sup_{k\geqslant n} a_k + \sup_{k\geqslant n} b_k,$$

故由极限保序性与和运算性质得

$$\varlimsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n}(a_k + b_k) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k + \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} b_k = \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n,$$

这表明 (1) 中第一式成立. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 则 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (-a_n) = -\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. 由 (1) 中第一式得

$$\varlimsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n; \tag{11.2.4}$$

且又有

$$\varlimsup_{n\to\infty} b_n = \varlimsup_{n\to\infty} (a_n + b_n - a_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) + \varlimsup_{n\to\infty} (-a_n) = \varlimsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) - \lim_{n\to\infty} a_n,$$