严格依据 2016 年考研数学考试大纲编写

高教版

2016考研数学

考试大纲解析及配套800题

冲刺套装　　配套800题分册

（数学三适用）

全国考研数学大纲配套教材专家委员会

高等教育出版社

最佳搭配：数学考试大纲解析 + 大纲配套 800 题 + 冲刺模拟 5 套卷

严格依据2016年考研数学考试大纲编写

高教版

2016考研数学

考试大纲解析及配套800题

冲刺套装　配套800题分册

（数学三适用）

2016 KAOYAN SHUXUE KAOSHI DAGANG JIEXI JI PEITAO 800 TI CHONGCI TAOZHUANG
PEITAO 800 TI FENCE (SHUXUE SAN SHIYONG)

全国考研数学大纲配套教材专家委员会

高等教育出版社·北京

最佳搭配：数学考试大纲解析 + 大纲配套 800 题 + 冲刺模拟 5 套卷

内容简介

《2016考研数学考试大纲解析及配套800题冲刺套装(配套800题分册)(数学三适用)》在2015版的基础上做了较大修改，具有如下特色：

1. 在对试题内容的分类和命题规律研究的基础上，按照考试内容对题型和考点进行了分类，每部分内容和练习题后面对这类题型的解题方法和技巧、需要着重掌握的内容、考生答题中丢分的主要因素进行了简明扼要的小结，使读者在练习几道题后对这部分内容的解题要点、常见错误有更深的体会，进而能够获得良好的学习效果；

2. 达到或略高于考题的深度和难度，注重数学思考方法的培养、解题方法的掌握和解题技巧的训练，使得考生不但能够熟悉试题的类型，而且能够掌握解决问题的方法；

3. 题目知识点覆盖全面，融进了编者多年从事考研辅导授课经验和积累的丰富资料，某些题目是编者根据命题趋势和阅卷经验有针对性地自行命制，有较高的参考价值；

4. 体例简洁，适应学习规律。

图书在版编目(CIP)数据

2016考研数学考试大纲解析及配套800题冲刺套装. 配套800题分册：数学三适用/全国考研数学大纲配套教材专家委员会编. -- 北京：高等教育出版社，2015.9

ISBN 978-7-04-043610-5

Ⅰ.①2… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第204211号

策划编辑 张耀明　责任编辑 张耀明　封面设计 王 洋　版式设计 于 婕
插图绘制 郝 林　责任校对 陈 杨　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　址	北京市西城区德外大街4号	网　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　刷	保定市中画美凯印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
本册印张	19.5	版　次	2015年9月第1版
本册字数	520千字	印　次	2015年9月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　价	80.00元(全两册)

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　43610-001

修订说明

《2016考研数学考试大纲配套800题》是《2016年全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》《2016全国硕士研究生招生考试数学考试大纲解析》的姊妹篇，与《考研数学复习教程》《考研数学基础过关500题》《2016考研数学冲刺模拟5套卷》共同构成考研数学考试大纲配套权威辅导用书系列。

《2016考研数学考试大纲配套800题》旨在帮助考生在强化复习阶段强化解题思维训练，培养和快速提高解题能力，为拿下数学高分打下坚实基础。为了使读者获得良好的复习效果，在编写过程中《2016考研数学考试大纲配套800题》贯彻如下指导思想：

1. 严格按照《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》的内容和要求编写；
2. 内容上力求能够把握命题规律，追踪命题走向，立足考题特点；
3. 风格简约清新，适应学习规律，帮助考生达到高质、高效的学习效果。

按照上述指导思想，本书在2015版的基础上做了较大修改，具有如下特色：

1. 在对试题内容的分类和命题规律研究的基础上，按照考试内容对题型和考点进行了分类，每部分内容和练习题后面对这类题型的解题方法和技巧，需要着重掌握的内容，考生答题中丢分的主要因素进行了简明扼要的小结，使读者在练习几道题后对这部分内容的解题要点、常见错误有更深的体会，进而能够获得良好的学习效果；
2. 达到或略高于考题的深度和难度，注重数学思维方法的培养，解题方法的掌握和解题技巧的训练，使考生不但能够熟悉试题的类型，而且能够掌握解决问题的方法；
3. 题目知识点覆盖全面，融进了编者多年从事考研辅导授课经验和积累的丰富资料，某些题目是编者根据命题趋势和阅卷经验有针对性地自行命制，有较高的参考价值；
4. 体例简洁，适应学习规律。

本书适用于考研数学的数学三卷种。

在编写过程中，作者参考了许多相关教材，引用了其中的一些例子，恕不一一列出，在此向有关作者表示诚挚的感谢，并致以深深的敬意。

本书仓促付梓，书中的疏漏和不足，敬请同行专家和读者不吝赐教。

编　者

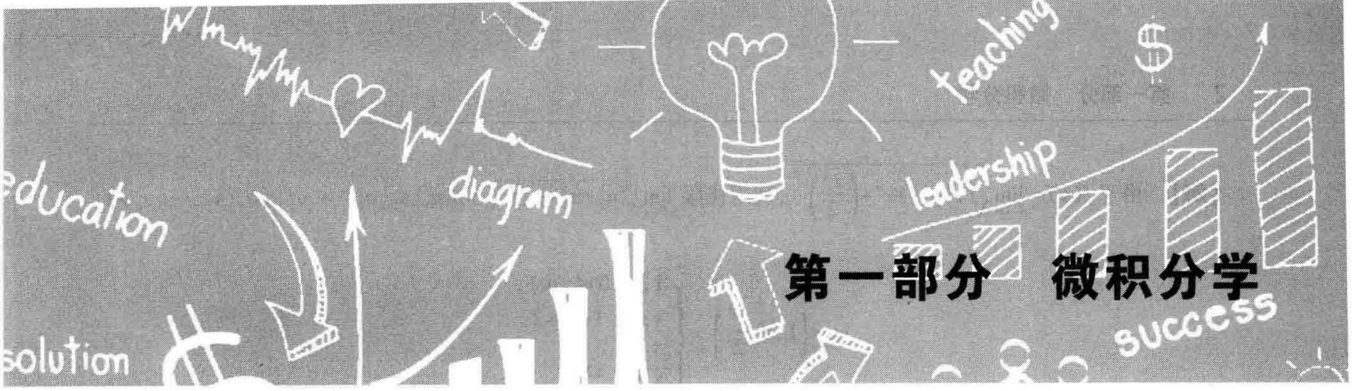
2015年8月

目　录

第一部分　微积分学

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计



第一部分　微积分学

第一章　函数、极限、连续

1. 函数$f(x)=\sin\left(\ln\dfrac{x-1}{x+1}\right)\quad(x>1)$是(　　)

(A) 单调函数.　　(B) 有界函数.　　(C) 周期函数.　　(D) 非奇非偶函数.

【分析】 本题考查判断函数特性的方法.

【解】 应选(B).

显然,$f(x)$不是单调函数,也不是周期函数,故(A)、(C)是错误的.

又因为当$x>1$时,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\ln\dfrac{x-1}{x+1}\right)=0$,故$f(x)$当$x>1$时是有界函数,故(B)是正确的.

另外,$f(-x)=\sin\left(\ln\dfrac{-x-1}{-x+1}\right)=\sin\left(\ln\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\sin\left(-\ln\dfrac{x-1}{x+1}\right)=-\sin\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|=-f(x)$,即$f(x)$是奇函数,故(D)也是错误的.

2. 若已知$2f(x)+f(1-x)=x^2$,试求$f(x)$的表达式.

【解法1】 由已知等式,我们猜测$f(x)$的函数类型,设

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

则

$$2ax^2+2bx+2c+a(1-x)^2+b(1-x)+c=x^2,$$

比较两边的系数得

$$\begin{cases}3a=1,\\2b-2a-b=0,\\3c+b+a=0,\end{cases}$$

解得　$a=c=\dfrac{1}{3},b=\dfrac{2}{3}$. 故所求函数为

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}.$$

【解法2】 由已知等式易见,作换元$x=1-t$,得

$$2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2,$$

由于函数与自变量的记号无关,上式即为

$$2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2,$$

将此式与已知式联立,消去$f(1-x)$,即得

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}.$$

3. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$,$x\geqslant0$,判断$f(x)$是否单调,是否有界?

【分析】 本题综合考查极限存在准则和分段函数的单调性的判断. 由于没有给出函数的显式表达式,而是用幂指函数的极限形式定义了函数,因此本题的关键是利用准则法先确定函数的表达式,再判断单调性.

【解】 由于$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+1^n+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$,利用极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}(a_1,a_2,\cdots,a_k>0)$及

$$\max\left\{1,x,\frac{x^2}{2}\right\}=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 1<x\leqslant 2,\\ \dfrac{x^2}{2}, & x>2.\end{cases}$$

分三个区间讨论.

当$0\leqslant x\leqslant 1$时,

$$1\leqslant\sqrt[n]{1^n+1^n+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{4},$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}=1$,由夹逼准则知,$f(x)=1$.

当$1<x\leqslant 2$时,

$$x\leqslant\sqrt[n]{1^n+1^n+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{4}\ x,$$

令$n\to\infty$,得$f(x)=x$.

当$x>2$时,

$$\frac{x^2}{2}\leqslant\sqrt[n]{1^2+1^2+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{4}\ \frac{x^2}{2},$$

令$n\to\infty$,得$f(x)=\frac{x^2}{2}$.

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 1<x\leqslant 2,\\ \dfrac{x^2}{2}, & x>2.\end{cases}$$

显然,当$x\geqslant 0$时,$f(x)$单调递增,是无界的.

【小结】 1—3题练习讨论函数特性的主要方法.奇偶性和周期性主要依据定义判定,单调性可用导数的符号判断,有界性通常要根据函数的具体形式结合定义、性质、极限和几何图形判定.考试中的函数常为分段函数、积分上限函数或由极限、积分、级数等定义的函数形式,需要综合利用定义、性质和结论进行讨论.

4. 设$a\neq\frac{1}{2}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$(　　)

(A) $\frac{1}{1-2a}$.　　(B) $1-2a$.　　(C) $\frac{1}{1+2a}$.　　(D) $1+2a$.

【分析】 本题考查数列未定式1^∞型的极限.可利用重要极限结合等价无穷小量代换求极限值.

【解】 应选(A).

$$\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n=n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right],$$

利用等价无穷小量代换,有

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$$

5. 求$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}\right)$.

【分析】 本题考查数列未定式$0\cdot\infty$型的极限.可利用海涅定理先将数列极限化为函数极限,再利用洛必达法则求极限值.

【解】 由海涅定理,

$$原式=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\arctan\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\xlongequal{令x=\frac{1}{t}}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^2}\left(\arctan t-\arctan\frac{t}{1+t}\right)$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\arctan t-\arctan\frac{t}{1+t}}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{t}{1+t}\right)^2}\cdot\frac{(1+t)-t}{(1+t)^2}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{1+2t+2t^2}}{2t}=\lim_{t\to0^+}\frac{(1+2t+2t^2)-(1+t^2)}{2t(1+t^2)(1+2t+2t^2)}=\lim_{t\to0^+}\frac{2t+t^2}{2t}=1.$$

【小结】 4—5 题是求数列极限的常规题型，数列是定义在正整数集合上的特殊函数，因此求数列未定式的极限可以转化为求函数未定式的极限.

6. 设 $x_1>a>0$，且 $x_{n+1}=\sqrt{ax_n}\ (n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

【分析】 本题考查利用单调有界准则证明数列极限存在性的方法. 题设条件给出了数列的递推关系，并要求证明数列极限的存在性，因此考虑利用单调有界准则. 先利用数学归纳法证明单调性和有界性，最后利用递推关系求出极限.

【解】 显然 $x_2=\sqrt{ax_1}<\sqrt{x_1\cdot x_1}=x_1$. 假设 $x_n<x_{n-1}$，则 $x_{n+1}=\sqrt{ax_n}<\sqrt{ax_{n-1}}=x_n$. 故数列 $\{x_n\}$ 单调递减.

又因为 $x_1>a$，假设 $x_n>a$. 则 $x_{n+1}=\sqrt{ax_n}>\sqrt{a\cdot a}=a$. 从而数列 $\{x_n\}$ 有下界 a.

因此，由单调有界准则可知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对等式 $x_{n+1}=\sqrt{ax_n}$ 两边取极限，得 $A=\sqrt{aA}$，

解得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=a$.

7. 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=1-e^{-x_n}$，$n=1,2,\cdots$. (1) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限；(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}$.

【解】 (1) 因为 $x_1>0$，所以 $x_2=1-e^{-x_1}>0$.

设 $x_n>0$，则 $x_{n+1}=1-e^{-x_n}>0$，从而 $\{x_n\}$ 有下界.

令 $f(x)=x-(1-e^{-x})$，则 $f'(x)=1-e^{-x}$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，从而 $f(x)>f(0)=0$，即 $x>1-e^{-x}$，于是 $x_n>1-e^{-x_n}=x_{n+1}$，即 $\{x_n\}$ 单调递减.

由单调有界准则，$\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $a=1-e^{-a}$，得 $a=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n\,x_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x(1-e^{-x})}{x-(1-e^{-x})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^{-x}+xe^{-x}}{1-e^{-x}}=2.$

【小结】 6—7 题练习利用单调有界准则讨论数列极限. 这类问题的典型特征是：

(1) 容易建立或题中给出递推关系的数列的极限，要求证明数列极限的存在性，一般考虑使用单调有界准则；

(2) 一般用归纳法或对数列一般项利用一些常用不等式进行放缩去证有界性，利用加法、除法或利用导数符号等方法判定单调性，证明单调性和有界性的先后顺序要视题而定；

(3) 利用递推关系求极限值，解方程时产生的增根要根据数列的特征舍去.

8. 设 $x_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【分析】 本题考查利用夹逼准则求数列极限的方法. 题中所给数列的一般项是“和”的形式，又难以写成定积分定义中和式的形式，因此考虑利用夹逼准则. 通过对数列的一般项进行恰当地放缩得到两个极限相等的数列，从而得到所求数列的极限.

【解】 对一切 n，显然有

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant x_n\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，

故由夹逼准则，有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1.$$

9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}$.

【分析】 本题考查求数列极限的准则法和利用定积分求极限的方法. 数列一般项由"和式"给出，考虑用定积分的定义，但不是积分和的形式，应先将一般项放缩，得到两个积分和的形式，由积分的定义得到两个数列的极限，再由夹逼准则求出极限.

【解】 因为 $\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}=\frac{1}{n}\sqrt{\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)}$，所以

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)<\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}<\frac{1}{n}\left(1+\frac{k+1}{n}\right),$$

于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)<\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{k+1}{n}\right)+\frac{1}{n^2}$，而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{k+1}{n}\right)+\frac{1}{n^2}\right]=\int_0^1(1+x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2},$$

故由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}=\frac{3}{2}$.

【小结】 8—9 题是综合利用准则法求数列极限的习题，是难度较大的内容，涉及的知识点比较多. 考生由于基础知识不扎实，缺少前后知识贯通的能力，在解决这类问题时感到无从下手，非常困难. 求数列和式的极限主要是利用夹逼准则或定积分的定义进行求解，它们之间的区别主要表现为难以通过简单变形写成"积分和"形式的数列，主要利用夹逼准则；能够写成"积分和"形式的，则考虑利用定积分定义，但要灵活运用.（见第三章）

10. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^x-1}{x\ln(1+x^2)}$； (2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{2}{x}}$； (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【分析】 本题考查函数未定式的极限，可利用等价无穷小量代换和洛必达法则求极限. 对(3)、(5)题先"指数对数化"，再利用洛必达法则，对(4)题先做变量代换 $x=\frac{1}{t}$，再利用泰勒公式求极限.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^x-1}{x\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln\frac{1+\cos x}{2}}-1}{x\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln\frac{1+\cos x}{2}}{x\cdot x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x-1}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x^2}=-\frac{1}{4}.$$

(2) 因 $(x^x)'=(\mathrm{e}^{x\ln x})'=\mathrm{e}^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$，所以

$$\lim_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{1-x^x(\ln x+1)}{-1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{-x^x(\ln x+1)^2-x^x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{-1-1}{-1}=2.$$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}}=e^0=1.$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}=e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}}=e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}}=e^{-1}.$

11. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为正常数.

【分析】 本题考查幂指函数的 1^∞ 型未定式的极限. 先"指数对数化"，再利用洛必达法则求极限；也可利用重要极限 $\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$ 求极限.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$

或 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\lim\limits_{x\to0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{n}{x}\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{n[\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n]}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}n\cdot\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}}$

$=e^{n\cdot\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}}=e^{\ln(a_1a_2\cdots a_n)}=a_1a_2\cdots a_n.$

或 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{n}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}\cdot\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\cdot\frac{n}{x}\right)}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{(a_1^x-1)+(a_2^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{x}}=e^{\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{a_1^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{a_2^x-1}{x}+\cdots+\lim\limits_{x\to0}\frac{a_n^x-1}{x}\right)}=e^{(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)}=a_1a_2\cdots a_n.$

12. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x}\right)$；　(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[2x+\ln(1-2x)]}$.

【分析】 本题考查利用泰勒公式求函数未定式极限. 若直接利用洛必达法则不易求出其极限，可利用泰勒公式计算. (1)题应先利用代换 $t=\frac{1}{x}$ 转化为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，再利用泰勒公式.

【解】 (1) 令 $\frac{1}{x}=t$，则

$$\lim_{x\to\infty}x^3\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x}\right)=\lim_{t\to0}\frac{\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{t-\frac{1}{3!}t^3-\frac{1}{2}\left[2t-\frac{(2t)^3}{3!}\right]+o(t^3)}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t^3}{2}+o(t^3)}{t^3}=\frac{1}{2}.$$

(2) 因为 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$，

$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)$，

$\ln(1-2x)=-2x-\frac{1}{2}(-2x)^2+o(x^2)=-2x-2x^2+o(x^2)$，

所以 $$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[2x+\ln(1-2x)]}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right]}{x^2[2x-2x-2x^2+o(x^2)]}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{-2x^4+o(x^4)}=\frac{1}{24}.$$

【小结】 10—12 题是求具体函数未定式的极限问题,洛必达法则是重要并且有效的方法,但是要注意以下几点:

(1) 对于 $0\cdot\infty$ 型、$\infty-\infty$ 型、0^0 型、∞^0 型和 1^∞ 型未定式要转化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式,再使用洛必达法则.

(2) 要注意与等价无穷小量代换等方法结合起来,计算过程中要随时化简.

(3) 当 $x\to0$ 时,函数中含有 $\sin\frac{1}{x}$,$\cos\frac{1}{x}$ 等形式时不宜用洛必达法则.

(4) 函数表达式比较复杂,又含加减运算或是抽象函数的极限的局部逆问题,要慎用洛必达法则. 一般要使用泰勒公式(或麦克劳林公式)确定极限,以避免错误.

13. 已知极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^n}=c\neq0$,试确定常数 n 和 c 的值.

【解法 1】 由洛必达法则,得

$$\lim_{x\to0}\frac{2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{1-x}{1+x}\cdot\dfrac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}}{nx^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{2}{(1+x)(1-x)}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{2(-2x^2)}{1-x^4}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to0}\frac{-4x^2}{nx^{n-1}(1-x^4)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-4}{1-x^4}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{nx^{n-3}}=-4\lim_{x\to0}\frac{1}{nx^{n-3}}=c,$$

故有 $n=3$, $c=-\dfrac{4}{3}$.

【解法 2】 因为 $\arctan x=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

所以 $2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}=2\arctan x-\ln(1+x)+\ln(1-x)=-\dfrac{4}{3}x^3+o(x^3)$,

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{4}{3}x^3+o(x^3)}{x^n}=c\neq0$. 从而有 $n=3,c=-\dfrac{4}{3}$.

14. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(x)-1}{\tan x}-\dfrac{e^x\sin x}{\tan^2 x}\right)=2$,求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

【解】 由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x}{\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\cdot x}{x^2}=\infty$,故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{\tan x}=\infty$.

又由 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(x)-1}{\tan x}-\dfrac{e^x\sin x}{\tan^2 x}\right)=2$,知存在 $x\to0$ 时的无穷小量 $\alpha(x)$,使得

$$\frac{f(x)-1}{\tan x}-\frac{e^x\sin x}{\tan^2 x}=2+\alpha(x)$$

成立. 则 $f(x)=2\tan x+\alpha(x)\tan x+\dfrac{e^x\sin x}{\tan x}+1$,

从而 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(2\tan x+\alpha(x)\tan x+\dfrac{e^x\sin x}{\tan x}+1\right)=2.$

15. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^4+ax^2}-(x^2+bx)e^{-\frac{2}{x}}\right]=1$,试确定 a,b 的值.

【解】 令 $x=\dfrac{1}{t}$,则

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^4+ax^2}-(x^2+bx)e^{-\frac{2}{x}}\right]$$
$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+at^2}-(1+bt)e^{-2t}}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(\sqrt{1+at^2}-1\right)-\left[(1+bt)e^{-2t}-1\right]}{t^2}$$
$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+at^2}-1}{t^2}-\lim_{t\to0^+}\frac{(1+bt)e^{-2t}-1}{t^2}$$
$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{2at}{2\sqrt{1+at^2}}}{2t}-\lim_{t\to0^+}\frac{be^{-2t}+(1+bt)e^{-2t}(-2)}{2t}=\lim_{t\to0^+}\frac{a}{2\sqrt{1+at^2}}-\lim_{t\to0^+}\frac{(b-2-2bt)e^{-2t}}{2t}$$
$$=\frac{a}{2}-\lim_{t\to0^+}\frac{-2be^{-2t}-2(b-2-2bt)e^{-2t}}{2}=\frac{a}{2}+\frac{2b+2(b-2)}{2}=\frac{a}{2}+2b-2=1,$$

故有 $b-2=0$, $\frac{a}{2}+2b-2=1$,即 $a=-2,b=2$.

16. 设$f(x)$在$0<|x|<\delta$时有定义,其中δ为正常数,且

$$\lim_{x\to0}\left[\cos x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}=e,$$

求极限$\frac{f(x)}{x^3}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to0}\left[\cos x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left[1+\left(\cos x-1+\frac{f(x)}{x}\right)\right]^{\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to0}\left[1+\left(\cos x-1+\frac{f(x)}{x}\right)\right]^{\frac{1}{\cos x-1+\frac{f(x)}{x}}\cdot\frac{\cos x-1+\frac{f(x)}{x}}{x^2}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\cos x-1}{x^2}+\frac{f(x)}{x^3}\right]}=e,$$

即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=1$,而

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=\frac{3}{2}$.

17. 设$f(x)$在$x=0$的某邻域内二阶可导,且$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=0$,求$f(0)$,$f'(0)$,$f''(0)$及$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+3}{x^2}$.

【解】 因为$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}+f(x)}{x^2}=0$,

所以$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{x}+f(x)\right)=0$.

又$f(x)$在$x=0$的某邻域内二阶可导,因此$f(x)$,$f'(x)$在$x=0$处连续.

从而$f(0)=-3$.

因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}+f(x)}{x^2}=0$,所以$\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}-3+f(x)+3}{x^2}=0$,

故
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3-\frac{\sin 3x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{3-3\cos 3x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3\sin 3x}{2x}=\frac{9}{2}.$$

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{x}=\lim_{x\to0}x\cdot\frac{f(x)+3}{x^2}=0\times\frac{9}{2}=0.$$

由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+3}{x^2}=\dfrac{9}{2}$,将$f(x)$麦克劳林展开,得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)+3}{x^2}=\frac{9}{2},$$

因此$\dfrac{1}{2}f''(0)=\dfrac{9}{2}$,于是$f''(0)=9$.

18. 设函数$f(x)$在x_0处可导,且$f(x_0)\neq0$,求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)}{f(x_0)}\right]^n$.

【解】 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)}{f(x_0)}\right]^n=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x_0+x)}{f(x_0)}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{f(x_0)}\right]^{\frac{f(x_0)}{f(x_0+x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{xf(x_0)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{xf(x_0)}}=e^{\frac{1}{f(x_0)}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x}}$$

$$=e^{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}}.$$

【小结】 13—18 题是极限的局部逆问题,是考试的重点题型之一,部分考生由于缺乏逆向思维,在解答这类习题时感到比较困难. 极限的逆问题是在已知极限的情况下,反求表达式中的未知参数或其他形式函数的极限,关键是使式子符合未定式的形式. 而对于抽象函数,则要注意已知条件是否充分,如果充分,用洛必达法则;如果已知条件不够充分,常用方法是利用泰勒公式求出未知极限.

19. 设$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=c$,求$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x-1)]$.

【解】 由微分中值定理,存在$\xi\in(x-1,x+1)$,使

$$f(x+1)-f(x-1)=2f'(\xi).$$

注意到当$x\to\infty$时,$\xi\to\infty$,从而

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x-1)]=\lim_{x\to\infty}2f'(\xi)=2\lim_{\xi\to\infty}f'(\xi)=2c.$$

【小结】 19 题练习利用微分中值定理求极限. 如果出现同一函数在不同的两点处函数值之差的极限问题,则利用微分中值定理先对式子进行处理,再利用已知条件求出极限.

20. $[x]$表示不超过x的最大整数,试确定常数a的值,使$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right]$存在,并求出此极限.

【解】 $$\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to-\infty}\frac{\ln(1+e^{2u})}{\ln(1+e^u)}=\lim_{u\to-\infty}\frac{\frac{2e^{2u}}{1+e^{2u}}}{\frac{e^u}{1+e^u}}=\lim_{u\to-\infty}\frac{2(1+e^u)e^{2u}}{(1+e^{2u})e^u}=0,$$

$$\lim_{x\to0^-}a[x]=-a.$$

又 $$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{2u})}{\ln(1+e^u)}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2e^u(1+e^u)}{1+e^{2u}}=2,$$

$$\lim_{x\to0^+}a[x]=0.$$

故 $-a=2$,即 $a=-2$ 时上述极限存在,并且

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right]=2.$$

【小结】 20 题是分段函数的极限问题. 解题关键是在分段点处利用极限存在的充分必要条件,即左、右极限存在且相等来讨论. 当 $x\to\infty$ 时,表达式中含有 e^x, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$ 等形式时,要注意讨论 $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ 时的极限.

21. 若 $x\to0$ 时 $(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小量,试求常数 a.

【分析】 本题考查等价无穷小量的定义.

【解法 1】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{4}ax^2}{x^2}=-\dfrac{a}{4}$.

由等价无穷小的定义知 $-\dfrac{1}{4}a=1$,即 $a=-4$.

【解法 2】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{4}(1-ax^2)^{-\frac{3}{4}}(-2ax)}{\sin x+x\cos x}=-\dfrac{a}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(1-ax^2)^{-\frac{3}{4}}}{\sin x+x\cos x}$

$$=-\frac{a}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+\cos x}=-\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{a}{4}=1,\text{即 } a=-4.$$

22. 当 $x\to0$ 时,$e^{x^3}-e^{\sin^3x}$ 与 x^m 是同阶无穷小量,试求常数 m.

【解】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-e^{\sin^3x}}{x^m}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}(1-e^{\sin^3x-x^3})}{x^m}=\lim\limits_{x\to0}e^{x^3}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{\sin^3x-x^3}}{x^m}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-e^{\sin^3x-x^3}}{x^m}=-\lim_{x\to0}\frac{\sin^3x-x^3}{x^m}=\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)(x^2+x\sin x+\sin^2x)}{x^m}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)\left(1+\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin^2x}{x^2}\right)}{x^{m-2}}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin^2x}{x^2}\right)\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^{m-2}}$$

$$=3\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{(m-2)x^{m-3}}=3\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{(m-2)x^{m-3}}.$$

由同阶无穷小量的定义知 $m-3=2$,即 $m=5$ 时,$e^{x^3}-e^{\sin^3x}$ 与 x^m 是 $x\to0$ 时的同阶无穷小量.

23. 当 $x\to0$ 时 $3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与 x^n 为同阶无穷小量,试求 n.

【解】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x-4\sin x+\sin x\cos x}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x-4\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x}{x^n}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3-4\cos x+\cos 2x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to0}\frac{4\sin x-2\sin 2x}{n(n-1)x^{n-2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\cos x-4\cos 2x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}=\lim_{x\to0}\frac{-4\sin x+8\sin 2x}{n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-4\cos x+16\cos 2x}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}}.$$

故当 $n=5$ 时上述极限存在并且等于 $\dfrac{1}{10}$,即 $n=5$ 时 $3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与 x^n 是 $x\to0$ 时的同阶无穷小.

24. 设当 $x\to0$ 时,$\ln(1+x)-(ax^2+bx)$ 是比 $x\arcsin x$ 高阶的无穷小量,试求常数 a 和 b.

【分析】 本题考查高阶无穷小量的定义,其中 $\ln(1+x)$ 要利用泰勒公式展开.

【解】 当 $x\to0$ 时 $x\arcsin x\sim x^2$. 而

$$\ln(1+x)-(ax^2+bx)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(ax^2+bx)$$

$$=(1-b)x-\left(\frac{1}{2}+a\right)x^2+o(x^2).$$

由条件知 $1-b=0,\frac{1}{2}+a=0$,即 $a=-\frac{1}{2}$, $b=1$ 时,$\ln(1+x)-(ax^2+bx)$ 是 $x\to0$ 时的比 $x\arcsin x$ 高阶的无穷小量.

25. 设 $x\to0$ 时,$f(x)=\ln(x^2+\sqrt{1+x^2})$ 与 $g(x)=\sqrt[3]{1-ax^k}-1$ 是等价的无穷小量,试求常数 a 和 k 的值.

【分析】 本题考查等价无穷小量,利用求导定阶法求 $f(x)$ 的等价无穷小量,利用等价无穷小量代换求 $g(x)$ 的等价无穷小量.

【解】 因 $x\to0$ 时有 $f'(x)=\frac{1}{x^2+\sqrt{1+x^2}}\left(2x+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\sim x\left(2+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\sim3x$,故

$$f(x)\sim\int_0^x 3t\mathrm{d}t=\frac{3}{2}x^2.$$

又 $g(x)=\sqrt[3]{1-ax^k}-1\sim-\frac{a}{3}x^k$,

由 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $x\to0$ 时的等价无穷小量,可得 $a=-\frac{9}{2},k=2$.

【小结】 21—25 题主要练习无穷小量的比较,主要是按照定义进行比较,实质仍是求极限问题.

确定无穷小量阶的方法有等价无穷小量替换定阶法,泰勒公式定阶法,求导定阶法等.

(1) 等价无穷小量替换定阶法,就是利用常用的无穷小量确定无穷小量的阶数;

(2) 泰勒公式定阶法,就是利用常用的泰勒公式确定无穷小量的阶数;

(3) 在确定无穷小量阶或无穷小量比较问题中,如果等价无穷小量替换法和泰勒公式法失效,或待定阶的无穷小量是变限积分函数时,应利用求导定阶法,也就是通过求导数确定无穷小量的阶.

26. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}, & 若\ x\neq1,\\ 1, & 若\ x=1.\end{cases}$ 问 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续?若不连续,修改 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的定义,使之连续.

【分析】 本题考查分段函数在分段点处的连续性.

【解】 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{-\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\tan(x-1)}{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\frac{4}{\pi^2}\neq1$. 即 $\lim\limits_{x\to1}f(x)\neq f(1)$,

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续.

令 $f(1)=-\frac{4}{\pi^2}$,则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

27. 设函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x^2}, & x\neq0,\\ f(0), & x=0,\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导,$f''(0)\neq0,f'(0)=0,f(0)=0$,则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的( )

(A) 第一类间断点. (B) 连续点.

(C) 第二类间断点. (D) 连续点或间断点不能由此确定.

【解】 应选(A).

$$\lim_{x\to0}F(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)\neq F(0),$$

所以 $x=0$ 是 $F(x)$ 的第一类(可去)间断点.

28. 设$f(x)$连续，且$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f(x)-1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right]=3$，求$f(0)$.

【解】　由$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f(x)-1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right]=3$知

$$\frac{f(x)-1}{x}-\frac{\sin x}{x^2}=3+\alpha(x)\text{，其中}\lim_{x\to0}\alpha(x)=0.$$

$$xf(x)-x-\sin x=3x^2+\alpha(x)\cdot x^2,$$

$$f(x)=3x+1+\frac{\sin x}{x}+\alpha(x)\cdot x.$$

等式两边取极限，得

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left[3x+1+\frac{\sin x}{x}+\alpha(x)\cdot x\right]=2.$$

由于$f(x)$在$x=0$处连续，所以$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$.

29. 求函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\arctan\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}$的间断点，并判别其类型.

【解】　$f(x)$的间断点为$x=0$以及$x-\dfrac{1}{x}=0$，即$x=1$和$x=-1$.

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{1}{x-\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\arctan\dfrac{x}{x^2-1}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x}{x^2-1}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x(x^2-1)}=\infty,$$

故　$x=0$是$f(x)$的第二类间断点，且是无穷间断点.

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to1^-}\arctan\frac{x}{x^2-1}=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to1^+}\arctan\frac{x}{x^2-1}=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to(-1)^-}\arctan\frac{x}{x^2-1}=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\arctan\frac{x}{x^2-1}=\frac{\pi}{2}.$$

故　$x=1$和$x=-1$是$f(x)$的第一类间断点，且是跳跃间断点.

30. 设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(e^{nx}+1)}{1+x^2e^{nx}}$，讨论$f(x)$的间断点，其结论为(　　)

(A) 不存在间断点.　　　　(B) $x=0$是可去间断点.

(C) $x=0$是跳跃间断点.　　(D) $x=0$是无穷间断点.

【解】　应选(D).

当$x=0$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0\cdot2}{1}=0$，

当$x<0$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(e^{nx}+1)}{1+x^2e^{nx}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+0}=x$，

当$x>0$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(e^{nx}+1)}{1+x^2e^{nx}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(1+e^{-nx})}{e^{-nx}+x^2}=\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}$，

即　$f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$