

全国高等院校 **海岸和海洋工程专业** 研究生教材



李玉成 滕斌 编著

波浪对海上建筑物的作用

Wave Action on Maritime Structures

(第3版)

(3rd Edition)



海洋出版社

全国高等院校 **海岸和海洋工程专业** 研究生教材

波浪对海上建筑物的作用

Wave Action on Maritime Structures

(第3版)

(3rd Edition)

李玉成 滕斌 编著

海洋出版社

2015年·北京

图书在版编目 (C I P) 数据

波浪对海上建筑物的作用 / 李玉成, 滕斌编著.

——北京: 海洋出版社, 2015.12

ISBN 978-7-5027-9295-4

I. ①波… II. ①李… ②滕…

III. ①波浪-作用-海洋建筑物-研究

IV. ①TV139.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 283747 号

责任编辑: 赵 武

责任印制: 赵麟苏

海洋出版社 出版发行

<http://www.oceanpress.com.cn>

北京市海淀区大慧寺路 8 号 邮编: 100081

北京朝阳印刷厂有限责任公司印制

新华书店发行所经销

2015 年 12 月 第 3 版 2015 年 12 月北京第 3 次印刷

开本: 787mm×1092mm 1/16 印张: 19.5

字数: 360 千字 定价: 48.00 元

发行部: 62147016 邮购部: 68038093 总编室: 62114335

海洋版图书印装错误可随时退换

序 言

近几十年以来，港口、海岸及海洋工程的发展极为迅速。波浪是海上建筑物所经受的最主要的动力荷载，是设计海上工程时所需考虑的关键因素。随着海上工程技术的发展，这方面的科学研究工作也得到了很大发展，然而迄今国内外，特别是国内，还很少有论著专门阐述波浪对海上建筑物的作用。

本书的目的旨在比较系统地介绍国内外学者在这方面的的工作，特别是近期的新成果以及它们的实际应用。一方面将就所论述问题的理论基础、历史沿革、各国的研究成果作一个综合论述，以利读者对其有一个历史的全面了解，另一方面也着重叙述它们在工程上的实际应用方法。作者希望此书有助于读者在了解已有成果的基础上进行新的研究和探索，并有助于读者在工程实际中正确地理解和应用现有的研究成果。

近 20 年来，波浪理论、它的数值计算及模拟技术有了迅速的发展，在本书的第 1 至第 4 章就此作了比较全面的阐述。防波堤、开敞式码头、海堤及海上平台是目前国内最常见的海上建筑物。就其结构型式而言，它们分别属于直立堤、混成堤、斜坡堤，以及各种布置型式的柱状结构。由于结构型式的不同，建筑物前的波浪形态和波浪对建筑物的作用也各异。在本书的第 7、第 8 和第 9 章中讨论了波浪对直立堤（包括混成堤）、斜坡堤和柱状结构物的作用。此外，波浪在传播过程中的能量损失问题、波浪与水流的相互作用问题也是在海上工程问题中经常遇到而在文献中系统论述不多的问题。在本书第 5 章中对波浪传播过程中的能量损耗及遇障碍的反射量问题进行了论述。在第 6 章中对波浪与水流共同作用下的诸问题作了分析。同时，为了便于读者的理解和应用，在每章的最后部分均附有典型算例或思考题。

本书的第 1 至第 4 章由滕斌编写，第 5 至第 9 章由李玉成编写。

在本书的编写过程中得到了大连理工大学和各兄弟单位的大力支持及帮助，在此一并深致谢意。

最后，要说明的是本版是 2002 年第二版的修订版，在内容上做了些补充和修正。

作 者

2014 年 7 月 5 日

目 次

第 1 章 基本数学方程和近似方法	(1)
1.1 理想流体的控制方程	(1)
1.2 水波问题的边界条件	(3)
1.3 小振幅波近似	(5)
1.4 等水深中的线性行进波	(7)
1.5 波能量、波能流和群速度	(9)
参考文献	(11)
第 2 章 波浪与二维物体作用的频域解	(12)
2.1 二维直角坐标系中拉普拉斯方程的分离变量法	(12)
2.2 直墙前波浪的反射	(15)
2.3 造波机理论	(18)
2.4 水平台阶对波浪的反射和透射	(21)
2.5 水面方箱对波浪的反射和透射	(27)
2.6 漂浮方箱运动产生的辐射势	(34)
2.7 波浪对垂直薄板的作用	(39)
2.8 波浪对透空薄板的作用	(41)
2.9 波浪对水面半无限弹性板的作用	(44)
参考文献	(49)
第 3 章 波浪与三维物体作用的频域解	(50)
3.1 三维柱坐标系下的分离变量法	(50)
3.2 波浪关于直立圆柱的绕射	(53)
3.3 波浪关于截断圆柱的绕射	(56)
3.4 波浪与垂直桩群的相互作用	(60)
3.5 波浪对任意三维物体的作用	(63)
3.6 漂浮物体在波浪作用下的运动响应	(67)
3.7 满足波浪条件的格林函数	(73)
3.8 固定物体上的二阶波浪力	(76)
3.9 二阶平均漂移力的远场方法	(82)
3.10 不规则频率问题	(86)
参考文献	(91)
第 4 章 波浪与结构物作用的时域理论	(94)
4.1 浮体-锚链系统的静力分析	(94)

4.2 频域解的傅氏变换法·····	(96)
4.3 摄动展开下的简单格林函数法·····	(101)
4.4 满足自由水面条件的格林函数方法·····	(105)
4.5 波浪水槽——时域内完全非线性波浪的模拟·····	(108)
参考文献·····	(112)
第5章 波浪传播过程中的能量损耗及遇障碍的反射计算·····	(114)
5.1 紊动损失的计算·····	(114)
5.2 底摩阻损失的计算·····	(115)
5.3 底部渗透所造成的能量损失·····	(117)
5.4 障碍物的反射波的分离计算法·····	(118)
参考文献·····	(126)
第6章 波浪与水流共同作用·····	(127)
6.1 概述·····	(127)
6.2 二元问题的规则波变形·····	(127)
6.3 二元问题规则波的速度场·····	(134)
6.4 波与流斜交时规则波的变形·····	(138)
6.5 平缓海底上规则波变形的二元问题·····	(141)
6.6 平直海岸上波与流共同作用下的规则波变形·····	(146)
6.7 水流影响下的波浪谱变形·····	(150)
6.8 平直海岸上波浪频率谱在水流作用下的变形·····	(158)
6.9 岸坡上波浪的破碎指标·····	(161)
参考文献·····	(165)
第7章 直立堤前的波浪形态和波浪力·····	(168)
7.1 直立堤及混成堤前的波浪形态·····	(168)
7.2 立波波浪力·····	(172)
7.3 破波波浪力·····	(184)
7.4 直立堤不规则波波浪力的计算·····	(197)
7.5 直立堤堤顶越波量的计算·····	(206)
7.6 开孔消浪结构·····	(210)
参考文献·····	(219)
第8章 斜坡堤上的波浪作用·····	(222)
8.1 概述·····	(222)
8.2 护面块体重量的确定·····	(224)
8.3 斜坡堤的爬高计算·····	(231)
8.4 斜坡堤越波量的估算·····	(237)

8.5 斜向波对斜坡堤的作用	(241)
8.6 宽肩台斜坡式防波堤	(243)
8.7 混成堤基础块石稳定重量的计算	(251)
参考文献	(256)
第 9 章 波浪对柱状结构物的作用	(258)
9.1 概述	(258)
9.2 柱体的绕流现象	(259)
9.3 作用于小直径柱体上的波浪力——莫里森方程	(261)
9.4 速度力系数 C_d 与惯性力系数 C_m 的确定	(264)
9.5 作用于柱体上的横向力及 Strouhal 数 (St)	(276)
9.6 固定边界对柱体受力系数的影响	(278)
9.7 波与流共同作用下的杆件受力	(281)
9.8 小直径柱群上所受的波浪力	(284)
9.9 作用于柱体上的不规则波波浪力	(286)
9.10 倾斜桩柱上的受力系数	(292)
9.11 破波作用下的桩柱受力	(292)
参考文献	(296)
附录 A 驻相法	(298)
附录 B 傅氏级数的乘积	(300)
中外文人名对照表	(301)

第 1 章 基本数学方程和近似方法

波浪与结构物相互作用的理论基础是流体力学与波浪理论。为此,简单地叙述一下理想流体力学的控制方程、波动问题所满足的自由水面和物面条件、水波问题的近似求解技术和水平海床上线性行波的简单特性,将会有助于问题的深入讨论。对于那些希望系统了解这些理论的读者可参考 Batchelor (1967), Paterson (1983), 吴望一 (1998), Johnson (1997), Crapper (1984), 刘应中和缪国平 (1991), 邹志利 (2005) 等的著作。

1.1 理想流体的控制方程

在流体力学中一般有两种研究方法:一种是研究流体的质点在不同时刻所处的位置及其所具有的速度和加速度等运动要素的方法,称之为拉格朗日法 (Lagrange method);另一种是在空间中任意取一个定点,研究在不同时刻通过这个定点的不同流体质点所具有的速度和加速度的方法,称之为欧拉法 (Euler method)。由于在实际问题中,常常只需要求得空间各点的运动情况及其随时间的变化规律,而不需要求出个别流体质点的运动过程,因此欧拉法在流体力学中得到了更广泛的应用。在本书中除单独指明外,均采用欧拉方法进行分析。

在重力水波与海洋工程结构物相互作用的问题中,水密度的变化通常可忽略不计,因此基本的流体质量守恒 (mass conservation) 和动量守恒 (momentum conservation) 定律为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.2)$$

式中: $\mathbf{u}(x, t) = (u, v, w)$ 为速度矢量; $p(x, t)$ ——压力;

ρ ——密度; g ——重力加速度;

ν ——运动黏性系数 (常数); $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ——坐标矢量;

z 轴铅垂向上。

(1.2) 式称为耐维-斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程。

定义涡量矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 为速度矢量的旋度

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (1.3)$$

它是当地转动速率的2倍。取(1.2)式的旋度,利用(1.1)式,可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \quad (1.4)$$

从物理上来看,这一方程意味着:跟随着运动流体的涡量的变化率分别由涡线的伸缩扭曲(右端第一项)、黏性扩散(右端第二项)产生。在水中, ν 值很小($\sim 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$),除了在速度梯度很大和涡量很大的区域中以外,(1.4)式的末项可以忽略;也就是说,除了在很薄的边界层中以外,忽略黏性是良好的近似,这时(1.4)式变成

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (1.5)$$

以涡量矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 点乘(1.5)式,得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \frac{\boldsymbol{\Omega}^2}{2} = \boldsymbol{\Omega}^2 [\mathbf{e}_{\boldsymbol{\Omega}} \cdot (\mathbf{e}_{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \nabla \mathbf{u})] \quad (1.6)$$

其中 $\mathbf{e}_{\boldsymbol{\Omega}}$ 为沿 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向的单位矢量。因为在有实际物理意义的场合下速度梯度是有限的,所以 $\mathbf{e}_{\boldsymbol{\Omega}} \cdot (\mathbf{e}_{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \nabla \mathbf{u})$ 的最大值必定是有限值,我们设它为 $M/2$,跟随流体质点的 $\boldsymbol{\Omega}^2(\mathbf{x}, t)$ 的大小不会超过 $\boldsymbol{\Omega}^2(\mathbf{x}, 0)e^{Mt}$ 。因此,如果 $t=0$ 时刻的涡量处处为0,则流动永远保持为无旋的。

$\boldsymbol{\Omega}=0$ 是一类重要的情形,相应的流动称作无旋流。对于无黏无旋流动来说,速度 $\mathbf{u}$ 可表示成标势——速度势 Φ (velocity potential) 的梯度

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi \quad (1.7)$$

于是,质量守恒要求速度势 Φ 满足拉普拉斯(Laplace)方程

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (1.8)$$

如果速度势已知,则可由动量方程式(1.2)求得压力场。

利用矢量恒等式

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \frac{u^2}{2} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

和无旋、无黏的假定,(1.2)式可改写成

$$\nabla \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi) \right] = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz \right)$$

关于空间变量进行积分之后,得到

$$-\frac{p}{\rho} = gz + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + C(t) \quad (1.9)$$

其中 $C(t)$ 为 t 的任意函数。一般可在不影响速度场的情况下重新定义 Φ ,使 $C(t)$ 为0。因此,不失一般性,可令(1.9)式中 $C(t)=0$,则有

$$-\frac{p}{\rho} = gz + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \quad (1.10)$$

(1.10) 式或 (1.9) 式称为伯努利 (Bernoulli) 方程。(1.10) 式右端的第一项 gz 为对 p 的流体静压贡献, 而其余的项为对 p 的流体动压贡献。

1.2 水波问题的边界条件

在不可渗透的固体边界 S_b 上, 如果流体运动不脱离物体表面而形成空隙的话, 在固体表面的法线方向上, 流体速度应等于固体的运动速度:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = U_n \quad (\text{在 } S_b \text{ 上}) \quad (1.11)$$

式中: $\mathbf{n}$ —— S_b 的单位法矢量;

U_n ——物体表面在该点的法向运动速度。物面法线的方向在本书中以指出流体为正。在固定的固体边界 S_b 上, 法向速度必须为 0, 即

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (\text{在 } S_b \text{ 上}) \quad (1.12)$$

把这个条件用于深度为 $d(x, y)$ 的海床底部, 可把它写成为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial d}{\partial y} \quad [\text{在 } z = -d(x, y) \text{ 上}] \quad (1.13)$$

现在考虑与大气接界的自由面上的边界条件。设自由面的铅垂位移为 $\zeta(x, y, t)$, 则自由面的方程为

$$F(\mathbf{x}, t) = z - \zeta(x, y, t) = 0 \quad (1.14)$$

令运动着的自由面上一几何点 $\mathbf{x}$ 的速度为 $\mathbf{q}$, 经过短时间 dt 后, 自由面的方程变为

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{q}dt, t + dt) = F(\mathbf{x}, t) + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla F \right) dt + O[(dt)^2] = 0 \quad (1.15)$$

利用 (1.14) 式后得到, 对于任意的小 dt 有

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla F = 0 \quad (1.16)$$

流体质点在自由面上并不是单独地运动的, 而是要保持与邻近质点的连续性。考虑控制体积 ΔV_f , 它是一个薄层, 上表面为一小块自由面 ΔS_f , 倘若 ΔV_f 中流体质点的法向速度与 ΔS_f 的法向速度不同, 那么,

流体就得通过 ΔV_f 的底面以有限的速率损失或获得；由于 ΔS_f 是物质面，流体必须通过 ΔV_f 的侧缘以无限大的速度补充或流失，而这在物理上是不可能的。因此，自由面上流体的法向速度必定与自由面的法向速度相同，也就是说，自由面上的所有流体质点除了随自由面整体移动外，只能作切向移动，有

$$\mathbf{u} \cdot \nabla F / |\nabla F| = \mathbf{q} \cdot \nabla F / |\nabla F|$$

从而得到

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F = 0 \quad (1.17)$$

它等价于

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \Phi_x \zeta_x + \Phi_y \zeta_y = \Phi_z \quad (1.18)$$

(1.17) 式或 (1.18) 式称作自由面上的运动学边界条件。显然，如果 $z = \zeta$ 是运动物体的不可穿透的表面，上述条件也是适用的。

上述运动学条件未涉及作用力，下面考虑与作用力有关的动力学条件。对于重力波与海洋结构物相互作用问题，所考虑波浪的波长很大，因而表面张力不起重要作用，紧接自由面之下处的压力必定等于自由面上的大气压力 p_a （通常取 $p_a = \text{const} = 0$ ），把伯努利方程应用到自由面上，得到

$$-\frac{p_a}{\rho} = g\zeta + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \quad (1.19)$$

这就是自由面上的动力学边界条件。

取大气压强 $p_a = 0$ ，上式可写为

$$g\zeta + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 = 0 \quad (1.20)$$

这一方程通常称为波面方程。

从上述的运动学和动力学方程中消去波面高度 ζ ，可得到一个新的仅含速度势的自由水面条件为

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} |\nabla \Phi|^2 + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla |\nabla \Phi|^2 = 0 \quad (1.21)$$

应当注意，在未知自由水面上的边界条件都是非线性的，且在未知的自由水面 $z = \zeta$ 上满足。正是自由面上边界条件 (1.18) 式和 (1.19) 式或 (1.20) 式的这些非线性性质成了求解水波问题的数学困难的根源。

还应指出，当海面之上的空气运动起重要作用时，大气压力不能事先规定；空气的运动一般是与水的运动相耦合的。事实上，空气与海水

的动量交换和能量交换是风场中产生表面波的关键因素, 不过我们仅限于讨论较为局部化的问题, 其中只涉及遥远的风暴所产生的波浪与结构物的作用问题。由于空气的密度远小于水的密度, 且作用的区域较小, 可以把空气的作用忽略不计。

1.3 小振幅波近似

上节推导的自由水面条件都是非线性的, 且在未知的瞬时水面上满足。求解时通常采用级数展开方法, 将边界条件按其小参数在平均边界上做近似展开, 然后利用摄动方法建立各阶近似下的控制方程和边界条件, 求得各阶近似下的近似解。

对于有限水深中运动的波浪, 一般假定波陡 $\epsilon = kA$ (k 为波数, A 为波幅) 较小。速度势、波面和流体压强可按波陡 ϵ 展开为

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \epsilon \Phi^{(1)} + \epsilon^2 \Phi^{(2)} + O(\epsilon^3) \\ \zeta &= \epsilon \zeta^{(1)} + \epsilon^2 \zeta^{(2)} + O(\epsilon^3) \\ p &= p^{(0)} + \epsilon p^{(1)} + \epsilon^2 p^{(2)} + O(\epsilon^3) \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

$\zeta^{(i)}$ 是水平坐标 (x, y) 和时间 t 的函数, 而 $\Phi^{(i)}$ 是三维坐标 (x, y, z) 和时间 t 的函数。将速度势的展开式代入拉普拉斯方程可得到

$$\epsilon \nabla^2 \Phi^{(1)} + \epsilon^2 \nabla^2 \Phi^{(2)} + O(\epsilon^3) = 0 \quad (1.23)$$

因为无论当波陡为何值, 拉普拉斯方程总能成立, 各阶速度势也应满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \Phi^{(i)} = 0 \quad (i=1, 2, \dots) \quad (1.24)$$

将速度势和压强的展开式 (1.22) 代入伯努利方程 (1.10), 可得到

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} (p^{(0)} + \epsilon p^{(1)} + \epsilon^2 p^{(2)}) &= gz + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \Phi^{(1)} + \epsilon^2 \Phi^{(2)}) + \\ &\quad \frac{\epsilon^2}{2} \nabla \Phi^{(1)} \cdot \nabla \Phi^{(1)} + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (1.25)$$

按波陡 ϵ 的阶数整理后, 可得到不同阶数下流体压强的表达式为

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} p^{(0)} &= gz \\ -\frac{1}{\rho} p^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial t} \Phi^{(1)} \\ -\frac{1}{\rho} p^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial t} \Phi^{(2)} + \frac{1}{2} \nabla \Phi^{(1)} \cdot \nabla \Phi^{(1)} \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

将波面和速度势的摄动展开式代入自由水面边界条件, 得到的自由

水面条件是在未知的瞬时水面 ζ 上满足的, 应用起来十分不便。为了克服这一问题, 我们应用泰勒 (Taylor) 级数展开方法, 可得到在平均水面 $z=0$ 上满足的自由水面条件。

对于一个任意函数 $f(x, y, \zeta, t)$, 可展开成泰勒级数为

$$f(x, y, \zeta, t) = f(x, y, 0, t) + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, 0, t) + \frac{\zeta^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, 0, t) + \dots$$

这样, 自由水面条件(1.21)式可近似为

$$\begin{aligned} & (\epsilon \Phi_{tt}^{(1)} + \epsilon^2 \Phi_{tt}^{(2)} + \epsilon^2 \zeta^{(1)} \Phi_{tzz}^{(1)}) + g(\epsilon \Phi_z^{(1)} + \epsilon^2 \Phi_z^{(2)} + \epsilon^2 \zeta^{(1)} \Phi_{zz}^{(1)}) \\ & + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi^{(1)} \cdot \nabla \Phi^{(1)}) + O(\epsilon^3) = 0 \quad (\text{在 } z=0 \text{ 上}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

整理后可得一阶近似下的自由水面边界条件为

$$\Phi_{tt}^{(1)} + g \Phi_z^{(1)} = 0 \quad (\text{在 } z=0 \text{ 上}) \quad (1.28)$$

二阶近似下的自由水面边界条件为

$$\begin{aligned} \Phi_{tt}^{(2)} + g \Phi_z^{(2)} = & -\zeta^{(1)} \Phi_{tzz}^{(1)} - g \zeta^{(1)} \Phi_{zz}^{(1)} \\ & - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi^{(1)} \cdot \nabla \Phi^{(1)}) \quad (\text{在 } z=0 \text{ 上}) \end{aligned} \quad (1.29)$$

...

类似地, 波面方程式 (1.20) 可近似为

$$\begin{aligned} & g(\epsilon \zeta^{(1)} + \epsilon^2 \zeta^{(2)}) + (\epsilon \Phi_t^{(1)} + \epsilon^2 \Phi_t^{(2)} + \epsilon^2 \zeta_{tz}^{(1)} \Phi_{tz}^{(1)}) \\ & + \epsilon^2 \frac{1}{2} (\nabla \Phi^{(1)} \cdot \nabla \Phi^{(1)}) + O(\epsilon^3) = 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

(在 $z=0$ 上)

整理后可得一阶近似下的波面高度为

$$\zeta^{(1)} = -\frac{1}{g} \Phi_t^{(1)} \Big|_{z=0} \quad (1.31)$$

二阶近似下的波面高度为

$$\zeta^{(2)} = -\frac{1}{g} \left[\Phi_t^{(2)} + \zeta^{(1)} \Phi_{tzz}^{(1)} + \frac{1}{2} \nabla \Phi^{(1)} \cdot \nabla \Phi^{(1)} \right]_{z=0} \quad (1.32)$$

对于在物体表面上满足的物面条件 (1.11) 式, 对固定物体该物面是已知的, 该条件是十分简单的; 对于运动物体, 该条件是在瞬时物体表面上满足的。对于漂浮的、受波浪作用而产生运动响应的物体的表面, 该表面的瞬时位置是未知的, 与自由水面上边界条件的处理方法相同, 需要应用泰勒级数展开的方法, 求得在平均物面上满足的近似物面条件。对于以平动运动矢量为 Ξ (Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3), 转动运动矢量为 A (A_1, A_2, A_3) 运动的物体, 其一阶近似下的物面条件可写为一阶运动分量的时间导数的表达式为

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n} = \dot{\mathbf{E}}^{(1)} \cdot \mathbf{n} + \dot{\mathbf{A}}^{(1)} \cdot [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{n}] \quad (\text{在 } S_m \text{ 上}) \quad (1.33)$$

式中: S_m ——物体表面的平均位置;

$\mathbf{x}_0$ ——物体的转动中心。

关于物面条件的详细推导, 我们留在第 3 章中讲述。

根据一阶近似下的控制方程和边界条件, 可以求得一阶近似下的线性近似解。线性解是最简单而实际中应用最广泛的形式, 也是本书介绍的重点。求得了一阶解后, 代入 (1.29) 式可求得二阶解的边界条件, 从而求得二阶近似解。

1.4 等水深中的线性行进波

我们考虑线性近似下在等水深 d 中传播的立面二维行进波问题, 并且讨论频率为 ω 的简谐运动。由于问题是线性的, 波面 $\zeta(x, t)$, $\Phi(x, z, t)$ 和波压力 $P(x, z, t)$ 等物理量将都是频率为 ω 的简谐函数。这样, 我们可分离出时间因子 $e^{-i\omega t}$:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \text{Re}[\eta(x)e^{-i\omega t}] \\ \Phi &= \text{Re}[\phi(x, z)e^{-i\omega t}] \\ P &= \text{Re}[p(x, z)e^{-i\omega t}] \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

当仅考虑线性问题时, 为了书写简单, 在本节及以后的各章中将忽略摄动展开阶数的上标标记。对于复速度势 $\phi(x, z)$ 和波面 $\eta(x)$, 线性化的控制方程和边界条件可写为

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (-d < z < 0) \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (z = -d) \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \phi \quad (z = 0) \quad (1.37)$$

$$\eta = \frac{i\omega}{g} \phi \Big|_{z=0} \quad (1.38)$$

对于波面为

$$\eta(x) = A e^{ikx} \quad (1.39)$$

的右行波, 式中 A 为波浪幅值, 一般为复数, 为简便本书取入射波的初相位为 0, 这样 A 为实数。应用分离变量法 (见 2.1 节) 容易求得满足 (1.35) 式和 (1.36) 式的解为

$$\phi = B \cosh k(z + d) e^{ikx} \quad (1.40)$$

由 (1.38) 式得

$$B = -\frac{igA}{\omega} \frac{1}{\cosh kd}$$

由 (1.37) 式得波浪频率与波数 k 的关系为

$$\omega^2 = gk \tanh kd \quad (1.41)$$

从而有

$$\phi = -\frac{igA}{\omega} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} e^{ikx} \quad (1.42)$$

由上述可见, 对一给定的频率 ω , 行波一定有由 (1.41) 式确定的恰当的波数。

水面波与声波等的不同之处也在于水波频率与波数之间有复杂的关系 (1.41) 式。把它写成无量纲形式

$$\omega^2 d / gkd = \tanh kd$$

并绘制上式左右两部分与无量纲波数 kd 的变化关系 (图 1.1)。从图中可以看到, 两曲线只有一处相交, 即方程的解是惟一的。

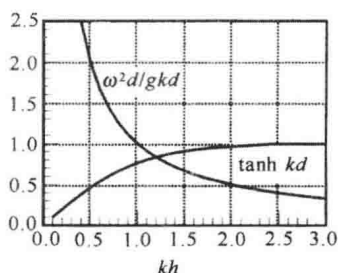


图 1.1 (1.41) 式单根的示意图 ($\omega^2 d / g = 1$)

一般情况下是已知波浪频率 (或周期), 利用色散关系 (1.41) 式计算波数 (或波长), 在有限水深条件下必须采用迭代方法求解。为了加快计算速度, 可以先给定波数, 计算出波浪频率, 从而建立起波浪频率与波数间的关系, 再通过拟合方式找到无因次波数 kd 与无因次波浪频率 $\omega^2 d / g$ 间的近似关系, 从而可以由波浪频率直接求得波数。Hunt (1979) 利用分数函数做了拟合, 得到了下述6位精度拟合计算公式

$$(kd)^2 = y^2 + \frac{y}{1 + \sum_{n=1}^6 C_n y^n}$$

式中 $y = \omega^2 d / g$, $C_1 = 0.666$, $C_2 = 0.355$, $C_3 = 0.1608465608$, $C_4 =$

0.0632098765, $C_5 = 0.0217540484$, $C_6 = 0.0065407983$ 。

波浪运动的相速度为

$$C = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{g}{k} \tanh kd \right)^{1/2} \quad (1.43)$$

在同样的深度下, 较长的波浪具有较快的传播速度。对于具有连续谱密度的傅里叶 (Fourier) 叠加的随机波列, 随着时间的推移, 波浪在传播过程中, 较长的波将领先于较短的波, 这种不同频率的波以不同的速度行进从而导致波的分散的现象称作色散 (弥散), 而 (1.41) 式称作色散或弥散方程 (dispersion equation)。

由线性化的压力方程 (1.26) 式求得一阶动压力为

$$\frac{p}{\rho} = i\omega\phi = gA \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} e^{ikx} = g\eta \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \quad (1.44)$$

速度场为

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{gkA}{\omega} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} e^{ikx} \quad (1.45)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{ikgA}{\omega} \frac{\sinh k(z+d)}{\cosh kd} e^{ikx} \quad (1.46)$$

由此可见, 流体速度和动压力随深度减小, 水平方向和铅垂方向速度的相位差为 90° , 在有限水深下水质点的轨迹是椭圆的, 越往深处, 此种椭圆越小。

1.5 波能量、波能流和群速度

波浪运动中的波能量可分为动能和势能两个部分。对于常深度水中行进波波列, 水平面单位面积上的动能, 在一个波浪周期内的平均值为

$$K.E. = \frac{\rho}{2} \int_{-d}^{\xi} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 dz \quad (1.47)$$

近似到二阶波陡 $O(\epsilon^2)$ 时, 上式可近似写为

$$K.E. = \frac{\rho}{2} \int_{-d}^0 |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 dz + O(\epsilon^3) \quad (1.48)$$

这里积分上限换成了 $z=0$, $\mathbf{u}$ 可用一阶线性结果来作近似。为了计算两正弦函数乘积的时均值, 以及以后求解二阶问题, 下述的复数乘积公式是十分有用的。若

$$a = \text{Re} [A e^{-i\omega t}], \quad b = \text{Re} [B e^{-i\omega t}]$$

式中: A, B ——复变量, 则

$$ab = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[A B e^{-2i\omega t}] + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[A B^*] \quad (1.49)$$

式中上标*表示共轭复数。利用(1.49)式,(1.48)式可写为

$$K.E. = \frac{\rho}{4} \int_{-d}^0 (\operatorname{Re}[uu^*] + \operatorname{Re}[ww^*]) dz \quad (1.50)$$

将(1.45)式和(1.46)式表示的水平 and 垂向速度代入上式,对 z 积分并利用色散关系式(1.41)后可得

$$K.E. = \frac{\rho}{4} \left(\frac{gkA}{\omega} \right)^2 \int_{-d}^0 \frac{\cosh^2 k(z+d) + \sinh^2 k(z+d)}{\cosh^2 kd} dz = \frac{1}{4} \rho g A^2 \quad (1.51)$$

另一方面,由波动产生的单位水面上一个周期内的平均势能为

$$P.E. = \overline{\int_{-d}^{\xi} \rho g z dz} - \int_{-d}^0 \rho g z dz = \frac{1}{2} \rho g \overline{\xi^2} = \frac{1}{4} \rho g A^2 \quad (1.52)$$

于是总的波能量为

$$E = K.E. + P.E. = \frac{1}{2} \rho g A^2 \quad (1.53)$$

注意,动能与势能是相等的。

现在考虑沿着波峰的单位宽度的铅垂截面。通过这一截面的波能流速率等于波浪动压力做功的平均速率:

$$\begin{aligned} F &= \overline{\int_{-d}^{\xi} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) dz} = - \overline{\int_{-d}^{\xi} \rho (gz + \Phi_t + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi) \Phi_x dz} \\ &\approx - \rho \overline{\int_{-d}^0 \Phi_t \Phi_x dz} = - \frac{\rho \omega}{2} \operatorname{Im} \int_{-d}^0 [\phi \phi_x^*] dz \end{aligned} \quad (1.54)$$

代入速度势的线性表达式,由上式可算得

$$F = \frac{1}{2} \rho g A^2 C \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right) \right] \quad (1.55)$$

定义

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right) \quad (1.56)$$

$$C_g = Cn \quad (1.57)$$

为波浪的群速度。由上式可见它具有能量输运速度这一动力学意义,即