21 世纪高职高专规划教材
SHIJI GAOZHI GAOZHUAN GUIHUA JIAOCAI

YINGYONG SHUXUE

应用数学

主　编　徐继军　王建锋
副主编　邵君舟　荆自体　李青阳
主　审　孟红玲

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

21 世纪高职高专规划教材

应用数学

主　编　徐继军　王建锋

副主编　邵君舟　荆自体　李青阳

主　审　孟红玲

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书依据“以职业能力为主线构建课程体系和教学内容”的指导思想，力求贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，在保证科学性的基础上注意讲清概念，减少理论证明，注重对学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养。

本书内容包括一元微积分、线性代数、概率论与数理统计三部分内容，共分为十一章，可供高职院校工科类和经济管理类专业不同学习层次的学生作为学习用书。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学/徐继军，王建锋主编. —北京：北京理工大学出版社，2009. 8
ISBN 978 - 7 - 5640 - 2642 - 4

Ⅰ. 应…　Ⅱ. ①徐…②王…　Ⅲ. 应用数学 - 高等学校：技术学校 - 教材　Ⅳ. O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 142942 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http：// www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米 × 960 毫米　1/16
印　　张 / 17. 5
字　　数 / 359 千字
版　　次 / 2009 年 8 月第 1 版　　2009 年 8 月第 1 次印刷
印　　数 / 1 ~ 3050 册　　责任校对 / 陈玉梅
定　　价 / 35. 00 元　　责任印制 / 边心超

前　　言

本书是根据高等院校文科类、管理类专业《大学数学课程教学大纲》，同时考虑到专业层次以及学时等的不同要求而编写的教材。

应用数学是高等院校一门重要的基础课程，具有较强的逻辑性、抽象性以及广泛的应用性。学习应用数学，除了获取必要的基础数学知识外，它的基本概念、基本思想与基本方法，对于培养学生的基本数学素质，锻炼抽象思维能力和逻辑推理能力，也是必不可少的。因此，本教材突出以“学生发展为本”的教育理念，以“必需、够用、好用、实用”为原则，以“培养学生的数学直觉思维、创新思维”为目的。

本书内容包括数学历史与文化、微积分、线性代数、应用概率四部分共十一章，并配备一定数量的习题。在内容的处理上，我们注意到文科类、管理类专业教学及成人高考和自学考试考点，力求取材适度、深入浅出、循序渐进，文字通俗易懂，条理清楚。同时注意保持教材自身体系的完整性和结构的合理性。为此我们根据多年的教学经验和研究，尽可能地结合文科类、管理类专业学生的实际需要精选内容，把重点放在基本概念、基本理论的阐述和学生对方法的掌握以及灵活应用上，培养学生的数学思想和运用数学方法的能力。

本书可作为高等院校文科类、管理类专业本科生和专科生的教材，也可供各类成人教育和自学考试等使用。

本书由徐继军、王建锋主编。第二、第七、第八章由徐继军编写，第四、第五章由王建锋编写，第六、第九章由邵君舟编写，第一、第三章由荆自体编写，第十、第十一章由李青阳编写。

本书由孟红玲教授任主审并统稿，并为本书的编写提出了许多有益的建议。周金玉老师在本书的编写中给予了极大的支持与帮助，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，错误与不妥之处在所难免，恳请广大读者与各位同行批评指正。

编　者

目　　录

第一章　数学史与数学文化 …… 1
　第一节　世界数学史 …… 1
　第二节　中国数学史 …… 8
　第三节　现代数学简介 …… 19
　第四节　数学的文化价值 …… 30
第二章　函数 …… 37
　第一节　函数的概念 …… 37
　第二节　函数的性质 …… 40
　第三节　反函数与复合函数 …… 41
　第四节　初等函数 …… 43
第三章　函数的极限 …… 46
　第一节　函数的极限 …… 46
　第二节　极限的运算法则与两个重要极限 …… 51
　第三节　无穷小量与无穷大量 …… 55
　第四节　函数的连续性 …… 59
第四章　导数与微分 …… 66
　第一节　导数的概念 …… 66
　第二节　函数的和、差、积、商的求导法则 …… 74
　第三节　复合函数的求导法则 …… 76
　第四节　隐函数、参数方程所确定的函数的导数 …… 77
　第五节　初等函数的导数 …… 78
　第六节　高阶导数 …… 80
　第七节　函数的微分 …… 82
第五章　导数的应用 …… 87
　第一节　微分中值定理 …… 87
　第二节　洛必达法则 …… 89
　第三节　函数的单调性 …… 92
　第四节　函数的极值与最值 …… 94
　第五节　函数的凹凸性及其判别法 …… 97
　第六节　曲线的渐近线与函数图像 …… 99
　第七节　导数在经济分析上的应用 …… 102

第八节 曲线的曲率……109
第六章 不定积分……113
第一节 不定积分的概念……113
第二节 换元积分法和分部积分法……120
第七章 定积分及其应用……125
第一节 定积分的概念……125
第二节 微积分的基本公式……133
第三节 定积分的换元积分法与分部积分法……137
第四节 无限区间上的广义积分……145
第五节 定积分在几何方面的应用……149
第六节 定积分在工程和经济上的应用……156
第八章 行列式与矩阵……162
第一节 行列式……162
第二节 矩阵……169
第三节 逆矩阵……181
第九章 线性方程组……189
第一节 线性方程组的矩阵表示……189
第二节 一般线性方程组解的讨论……190
第三节 齐次线性方程组解的讨论……200
第十章 概率论……203
第一节 随机事件……203
第二节 概率的定义与性质……210
第三节 概率乘法公式 事件的独立性……213
第四节 随机变量及其分布……217
第五节 随机变量的数字特征……227
第十一章 数理统计……234
第一节 总体、样本与统计量分布……234
第二节 参数估计……241
第三节 假设检验简介……246
第四节 回归分析……254
附录Ⅰ 常用积分简表……261
附录Ⅱ 概率分布表……267

第一章　数学史与数学文化

学习要求：

1. 了解世界数学发展史.
2. 了解中国数学发展史.
3. 了解现代数学的发展概况.
4. 了解数学的文化内涵.

第一节　世界数学史

一、巴比伦数学和古埃及数学

在科学的许多分支中，数学可能要算是最古老的一个学科了，它的历史和人类的历史几乎是同样的久远. 当然，它最初还只不过是一些数学知识的萌芽，在以万年为计量单位的漫长时间里，逐渐地积累着.

直到三四千年前，在人类文明的发源地——如埃及的尼罗河流域、伊拉克的两河流域、印度河流域、中国的黄河流域，开始出现了较高级的人类早期文化，伴随着奴隶制度的出现，社会劳动分工进一步成为可能，作为脑力劳动和体力劳动分工的具体成果，包括数学在内的科学知识的发展速度加快了. 到了公元前2000年左右的时候，已经出现了专门记录数学知识的史料，这些史料都是流传至今的所有数学史料中最早的一批.

巴比伦数学　自20世纪30年代起，由于一些学者的研究，使人们了解到巴比伦（建立在两河流域的一个奴隶制王国）的数学和天文学都已达到了较高水平，这个结论是对刻画在泥制土板上的楔形文字进行研究之后得出来的. 据考证，这批巴比伦泥板算术书，有一部分是属于公元前2000年左右的时期的，另外也有一部分是属于晚些时候的（公元前600—公元前300年）. 这些泥板算术书很可能是当时进行教学时使用的教科书. 通过对巴比伦泥板算术书进行研究，可以知道巴比伦数学的内容包含有：

四则运算. 他们记数是以60为基准的六十进位制，但有时也使用十进制和六十进制混合制，仅有 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$ 等特殊分数，但有六十进制的小数.

出现了平方、立方的数表以及平方根和立方根的数表.

能够做一些简单的面积和体积计算. 他们用到 $\pi=3$ 这一数值.

有人认为在解决一些较难的一些数学算题时需要求解三次方程. 出现了关于未知量的特殊记号.

巴比伦的数学是和当时的社会需要如编制历法、计算面积、粮仓和水利工程所需要的体积计算、政府行政管理所需要的各种计算问题密切联系着的.

古埃及数学 从公元前3 000多年的时候起,古埃及就创造了象形文字. 古埃及人在创造了神奇的金字塔和许多神庙、宫殿的同时,也创造了高度发达的数学. 流传至今的古埃及数学文献,就是以这种象形文字书写在尼罗河产的水草的叶子上的.

现在陈列在英国伦敦大英博物馆的东方展室里的许多珍贵展品之中,就有着这种古埃及的纸草算书. 因为它是兰德(H. Rhind)搜集到的,所以又被称为兰德纸草算书. 在苏联莫斯科博物馆,收藏着另一份古埃及纸草算书,通常被称为莫斯科纸草算书. 这两份纸草算书都是公元前2000年前后抄写的. 古埃及纸草算书都是记录一些数学问题的问题集. 兰德纸草算书(长544 cm,宽33 cm)共有85个问题,莫斯科纸草算书(长544 cm,宽8 cm)共有25个问题. 经过学者们的研究,它们都已被译成现代文字. 从数学的内容来看,古埃及人的数学知识有:

采用十进制记数,但却不是位值制,10和100都有特定的记写符号;产生了基于该记数法的四则运算.

分数只有分子为1的单分数,其他分数都必须化为单分数再进行计算.

能够进行简单的面积和体积计算.

有人认为古埃及人也有关于未知数的特殊符号,他们的一些问题,也可以看成是求解一次方程.

不论巴比伦数学还是古埃及数学,在以后的相当长的一段时期内,似乎都是处在一种停滞不前的状态.

二、古希腊数学

和古埃及、巴比伦数学相比,就其对数学发展的影响而言,古希腊数学无疑是更为重要的.

古希腊数学的准备时期 这一时期最早的一位数学家,要算是泰利斯. 据说他曾根据木杆和影长之比,再根据金字塔的影长,推算出了金字塔的高度.

继泰利斯而起的是毕达哥拉斯以及用这位创始人名字命名的毕达哥拉斯学派. 毕达哥拉斯学派研究了三角数、四角数、五边形数、六边形数等. 他们还研究了奇数、偶数和质数,以及算术平均、几何平均和黄金分割. 虽然毕达哥拉斯学派非常赞赏一切事物都是按照简单的整数比来安排的,但是他们却发现了1与$\sqrt{2}$之比就不是简单的整数比(可能是用归谬法证得

的). 这种不可公约量——无理数的存在,引起了古希腊数学的很大危机.

毕达哥拉斯定理(即中国古代的勾股定理)的发现,可能是这个学派在几何学方面的重要成就. 有人认为后来的几何学中关于直线形、圆、球的许多定理,也都是毕达哥拉斯学派的成就,至少"三角形内角和等于二直角"、"平面可被正方形、正六边形填满"等结论是他们的成果.

毕达哥拉斯学派所发现的无理数,以及稍后一些时候的埃利亚学派(以意大利南部城市埃利亚为中心)的芝诺所提出来的悖论,加深了古希腊数学的危机. 流传至今的芝诺悖论共有四条,现仅举其中一条为例:一个运动着的物体,在到达终点之前,一定要到达半途上的中点,为达到这中点,又必须达到中点的中点,而这样的中点是没有穷尽的,因此不可能在有限的时间内通过有限的线段. 很明显,这和中国战国时代提出的"一尺之棰,日取其半,万世不竭"的论题很类似.

比芝诺稍迟一些时候的雅典诡辩学派所提出的三大作图问题,在古希腊数学史上也非常有名. 这三个题目是:

作一正方形,令其面积等于已知圆的面积;

作一立方体,令其体积等于已知立方体的二倍;

用圆规、直尺三等分一个任意角.

古希腊数学的高度发展阶段　欧几里得所著的《几何原本》可以作为这个阶段开始的标志.

这部一直流传至今并且其中的某些内容仍然是今天中学数学教科书的主要内容的著名著作,经研究,它并不都是出自欧几里得个人之手,而是经过二三百年间许多古希腊数学家的努力才最后形成的.

《几何原本》全书共十三卷,其中1~6卷是平面几何学,11~13卷是立体几何学的内容. 这些内容和今天中学教科书的内容大致相同. 而7~10各卷所叙述的则是数论方面的内容,概略地说,其中比较重要的内容有:

求最大公约数的方法(欧几里得辗转相除法);

论证了素数的个数是无限的;

关于完全数(若一个自然数,它所有的真因子(即除了自身以外的约数)的和恰好等于它本身)的定理、等比级数求和公式;

$x^2 + y^2 = z^2$ 的整数解(即毕达哥拉斯数);

阿基米得公理;

正方形对角线与其一边之比是无理数,等等.

正如大家都非常熟知的那样,《几何原本》全书由定义(包括点、线、面等的定义)、公设(包括著名的关于平行线的第五公设在内)、公理(诸如等量加等量其和相等……)出发,把其他的数学命题都当做是定理. 这些定理的正确性,可以由前面的定义、公设、公理以及已得到证明

的定理推断得出. 当然,这种逻辑演绎推证的方法并不是由欧几里得开创的,但是他所著的《几何原本》一直被认为是这方面的典范. 这种方法是古希腊数学所独有的,它和中国古代的数学思想有很大的不同. 明代末年将《几何原本》译成中文(公元1607年)的徐光启,曾对欧几里得几何体系赞叹不已,徐光启认为《几何原本》"有四不必:不必疑、不必揣、不必试、不必改;有四不可得:欲脱之不可得、欲驳之不可得、欲减之不可得、欲前后更置之不可得". 这正是中国数学家首次遇到严密逻辑推理的欧几里得体系时的感想.

比欧几里得稍晚一些时候,但却同是公元前3世纪的古希腊数学家,我们还可以举出阿波罗尼和阿基米得两人.

阿波罗尼著有《圆锥曲线论》8卷,当然,和《几何原本》相类似,《圆锥曲线论》也是在综合前人研究的基础上写成的,是古希腊数学关于圆锥曲线研究方面的一部综合性的、集大成的著作.

阿基米得的生活年代和阿波罗尼几乎同时,如果从创造性的成果方面来进行评价,阿基米得可能是超越欧几里得和阿波罗尼之上,在古希腊数学史中首屈一指.

阿基米得计算了圆周率之值(用逐渐增加正多边形的边数,算至正96边形,利用内接和外切正多边形的周长和归谬法)为:$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$.

阿基米得还用力学上求重心的方法和归谬法,求解抛物弓形、球和截球的面积. 他还研究了"阿基米得螺线".

阿基米得还有着若干引进无穷小,无限分割概念的思想.

由于阿基米得的诸多创造,远远突破了欧几里得几何的体系,所以历来数学史家都对他有很高的评价,有人甚至认为:只要举出历史上最著名的三个数学家的名字,其中就应该包括阿基米得.

三、印度数学和阿拉伯数学

印度数学 现在通常被人们称作阿拉伯数字的十进位值制记数法,实际上更正确的提法应是印度-阿拉伯数字的十进位值制记数法. 这种记数法最早在印度出现,可推溯到公元6世纪. 之后传入阿拉伯地区,数码的记法又分成东阿拉伯和西阿拉伯两大体系. 西阿拉伯数码沿北非沿岸向西,再向北传过比利牛斯半岛,经西班牙再传至意大利和西欧各国,逐渐演变成为今天被广为利用的1,2,3,4,……

印度数学中也有负数概念和正负数运算法则出现,虽然比中国迟了几百年,但是对正负数的乘除法运算法则却要比中国早了几百年. 印度数学中关于0(零)的认识,在数学史上也是最早而且是有独到之处的.

印度数学中也有分数的运算,和古代中国一样,分子在上、分母在下(中间没有横线).

印度数学中也还有一次方程组解法、以辗转相除法求解一次不定式,甚至还出现了不少与中国古算书中的算题完全相同或相类似的算题,使人们联想到印度数学和中国数学之间的交流.这是个很有趣的问题.

印度数学的另一项重要成就是在三角学方面.中国唐代历法《九执历》(以介绍印度历法为主)在介绍印度数码的同时,也介绍了一种简单的正弦函数表.

阿拉伯数学 自从公元7世纪初伊斯兰教创立之后,在几十年之内,宗教、政治、军事相结合的势力,迅速扩展到阿拉伯半岛以外的广大地区,跨越了欧、亚、非三大洲.在这一广大地区之内,阿拉伯文是通用的官方文字.我们这里所叙述的阿拉伯数学,就是指用阿拉伯文所写的数学著作.

早在8世纪,印度天文学和数学著作就被译成阿拉伯文,自9世纪起,古希腊的一些著名的数学著作(欧几里得、阿基米得、阿波罗尼)都被译成阿拉伯文.正是由于这些译本传入了欧洲,才使得欧洲人重新认识这些古希腊著作.

阿拉伯数学,在9~15世纪取得了不少成就.先后出现了阿尔·花拉子米、阿尔·巴塔尼、阿卜尔·维法、海亚姆、阿尔·卡西等知名的数学家.阿拉伯数学在算术、代数学、几何学、三角学、圆周率计算等方面,都做出了杰出的贡献.

如前所述,印度——阿拉伯数码对世界数学以至人类文明所起的作用,无论给出如何高度的评价也不过分.

四、近代数学的开始(16世纪)

近代数学,和近代科学同样,大致上都是从16世纪开始的.而近代科学的开始,可以说,是以1543年哥白尼(N. Copernicus,波兰,1473—1543年)的《天体运行论》和维萨留斯(A. Vesalius,比利时,1514—1564)的《人体构造》两书的发表为标志的.

1202年,意大利人菲波那契出版了一部数学著作《算法之书》,其中引用了十进位值制记数法,“盈不足术”等,一般认为《算法之书》是西方近代数学的先声.

1535年意大利数学家塔塔利亚找到了三次方程的代数解法公式,1545年卡尔达诺进一步找到了四次方程的代数解法.16世纪的数学成就还有邦贝利引入的虚数概念(1572年)、斯蒂文提倡的十进小数(1586年)和在16世纪末编造的比较精细的三角函数表.

但是,16世纪西方数学的最大成就,乃是符号代数学的创立.法国数学家韦达写了一部数学著作,名为《分析术引论》(1591年),书中用辅音字母表示已知数,用元音字母表示未知数,并开始用这些文字间的计算代表具体数值间的计算,而这正是算术和代数之间的显著区别.后来,笛卡尔用拉丁字母开头的一些字母(a,b,c,...)表示已知数,用后面的一些字母(x,y,z,...)表示未知数,这就和现代通常在中学代数课程中常用的方法一致了.符号代数学的产生,在当时实在是了不起的创造,对以后数学发展的影响很大.

五、变量数学的建立(17 世纪)

17 世纪之后,西方近代数学开始了一个在本质上全新的阶段.

对数是 1614 年由英国数学家耐普尔所创立的. 对数的创立,为天文学当时的需要,提供了有力的计算方法和工具.

解析几何学是由法国数学家笛卡尔和费马等人创立的. 1637 年笛卡尔出版了他的著作《方法论》,该书有三个附录,其中之一名为《几何学》,解析几何的思想就包含在这个附录里.

17 世纪数学的最重要的成就是微积分的创立. 解析几何学,特别是微积分学的创立,完成了由常量数学到变量数学,由初等数学到高等数学的转变. 这在数学思想和在数学方法上都可以算得上是一次革命.

在用数学方法来研究力学问题方面,伽利略做了成功的尝试. 1604 年,在仔细研究了落体运动之后,他用数学的公式精确地、定量地描述了物理学的规律,获得首次成功.

关于微积分基本概念的严密化的工作,又经过了许多数学家一个多世纪的努力方才实现.

六、数学分析和近代数学的发展(18 世纪)

如果说微积分学的创立是 17 世纪数学的最伟大的成就,那么由于微积分学的创立而产生的一些分支:微分方程、无穷级数、微分几何学、变分学等的进一步发展,就成了 18 世纪数学的最重要的内容. 这些内容构成了今天数学各分支学科中比较重要的一个学科——数学分析. 除了实变函数之外,对复变函数的研究也贯穿了整个 18 世纪. 这使得数学分析这一学科的内容得到新的拓展.

新的数学分支,关于概率论的研究也开始了;由于测地工作的需要,关于误差的理论——最小二乘法也建立起来了.

18 世纪最多产的数学家要算是欧拉. 他毕生完成的项目共 886 种(其中专著不少于 530 种),这些著作在他去世 47 年后方才得以全部出版.

七、向现代数学的转变(19 世纪)

在 19 世纪,由上两个世纪一直延续下来的数学分析的各个分支仍在不断地发展着. 例如微分方程、复变函数论等都有所发展.

在 18 世纪,分析和代数经常被混淆在一起. 19 世纪,代数学的新发展还是由方程的代数解法开始的. 如前所述,三次、四次方程的解法(即可以用系数的加、减、乘、除和开方的有限次运算表示出根的公式)早已解决. 此后,人们便努力寻求五次或五次以上方程的代数解法,但

一直没有成功. 到了19世纪30年代,这个问题被两个青年数学家阿贝尔和伽罗瓦解决了. 答案是否定的,即这样的代数解法一般来说并不存在. 特别是伽罗瓦,还讨论了代数可解的条件,引入了"群"的概念. 他死后很久,数学家若当研究发展成代数学的一个新的分支——群论. 到现在,群论不但在数学和其他学科中得到很广泛的应用,而且它也成为近、现代物理学研究以及其他科学研究工作中有力的数学工具. 19世纪代数的新发展还表现在行列式论和矩阵论方面研究的开展.

19世纪几何学最重要的成就,当推30年代创立起来的非欧几何学. 这项工作是由高斯(1827年,但未写成文章)、波约依(1825年,虽写成论文但未及时发表)和罗巴切夫斯基(1826年,论文及时发表但当时未引起重视)三人几乎同时作出的. 古希腊的欧几里得几何学是在五条公理和五条公设基础上建立起来的逻辑严密的几何学. 但千百年来有许多数学家怀疑其中的第五条公设(平行公理)不是一条公理,怀疑它可由其他公理推证出来,因而有不少人花费很多精力试图证明这一点,可是均未获得成功. 非欧几何学就是用另一条新的公设换去欧氏几何中的第五公设而建立起来的几何学. 因为在当时还找不到现实世界中的任何模型能和非欧几何学所描述的几何性质相对应,因此它得不到当时数学界的重视. 但从数学思想的发展来说,它确实又是一次飞跃. 德国数学家黎曼对非欧几何学的发展作出了重大贡献. 到了20世纪初,1915年爱因斯坦创立一般相对性原理时,把非欧几何学应用到他的新理论中去. 非欧几何所描述的几何空间终于找到现实的模型. 到了现在,几乎可以毫不夸张地说,假如没有创立非欧几何学,许多现代科学的新发展都是不可能的.

公理化思想的发端从19世纪末开始,由于无理数论、集合论以及用公理化的思想来探讨总结各种几何学等方面的研究,从而开辟了一个数学的新时期.

1879—1884年,德国数学家康托尔发表了一系列集合论方面的著作,开始了对数学基础的新的和更深层次的探讨. 这一思想深深地影响到20世纪数学的发展. 康托尔对实数性质的讨论方面,也进行了不少工作. 他用基本数列,即算术化的方法建立了实数的理论.

在19世纪末,1899年希尔伯特发表了《几何基础论》一书,把欧氏几何整理为从公理化思想出发的纯粹演绎系统,并且注意公理系统的逻辑结构. 这种崭新的数学思想,可以说是数学思想发展进程中的一个重要的里程碑. 公理化的思想风行一时. 1908年集合论实现了公理化,20世纪20年代又出现了代数学的公理化等. 这一思想深刻地影响着现代数学在20世纪的发展.

经过了三四百年发展之后,数学进入了现代数学的新阶段.

八、数学发展的新时代(20世纪)

在20世纪前几十年的时间里,数学发展迅速. 它不仅不断改变着自己的面貌,而且不断地分化出更多的二级、三级,甚至更细小的学科. 在不同分科之间,几乎没有共同的"语言".

下面所给出的,只能是极其概略的叙述.

从20世纪初起,数学的抽象化、公理化的发展倾向一直很重,这当然是继承了19世纪70年代以来的发展趋势. 抽象代数学发展起来了,它以范·德·瓦尔登(Van der Waerden,1905年,~)在20世纪30年代写成的《近世代数学》一书为代表.

从20世纪30年代起,法国的一批青年数学家组成了一个匿名的数学团体,以布尔巴基(N. Bourbaki)为集体的笔名,陆续编写了一套数学丛书,名为《数学原本》. 布尔巴基想用"结构"的思想来统一地总结过去的一切成果. 这种思想,在一段时期内,形成了一股较强的潮流,具有较深的影响.

现代数学变得更加抽象化了,其应用领域也变得更加广泛了. 它不仅应用于天文、物理、力学等传统的领域,而且应用于化学,甚至于生物医学、农学以至于社会科学. 因此,数学在科学分类中的地位也在发生变化. 有人认为,数学不应再和天文、物理等列为同等的学科,而应该和社会科学、自然科学以及哲学相并列.

由于数学的迅速发展,人们对数学历史又有了各种不同的新看法. 有人认为可以把1870年以前看成是"算学时期",而把这以后看成是"结构时期". 还有人认为可以把数学的发展依次分为:"准确数学时期"、"概率数学时期"、"模糊数学时期"(模糊数学是20世纪70年代发展起来的一个新的领域).

关于第二次世界大战结束后才开始出现的电子计算机,有人认为它标志着一个数学新时期的到来,但也有人反对. 无论如何,电子计算机对整个人类的生活,包括数学的发展在内,都将继续起着重大的影响.

第二节 中国数学史

一、中国古代数学的起源、积累和数学体系的形成

早在远古时代,人们通过生产和生活的实践活动,逐渐积累了大量关于事物数量和物体形状的知识,形成了数与形的原始概念.

汉代以后,记数文字已经与现代基本一致了.

"规矩"是现在常用的词汇. 古代的"规"相当于圆规,"矩"类似木工用的曲尺. 规和矩是我国早就发明的简单绘图工具和测量仪器. 古书记载夏禹治水时"左准绳、右规矩"(《史记》),反映了规、矩、准、绳作为测量和绘图工具在兴修水利时受到的重视程度.

算筹和筹算,十进位置制记数法 算筹是一种特制的小竹棍,也有用木、骨、铁等材料制作的,是我国古代长期使用的计算工具.

算筹记数法则是"一纵十横,百立千僵. 千、十相望,万、百相当……"(《孙子算经》),把同

一个数码放在十位就代表几十，放在百位就代表几百，并且纵横两式交错放置，以免混淆．用空位表示零．这就是十进位置制记数法．到了汉代，还出现了红色的算筹，用以表示正数，而用黑色的算筹表示负数．古巴比伦人知道位置制，但用的是六十进制．中美洲的玛雅人也知道位置制的道理，但用的是二十进制．古埃及使用的记数法虽是十进制，但不是位置制．既用十进制，又用位置制的记数法，以中国为最早．直到公元六七世纪，印度才采用十进位置制记数法，而其他国家更要晚得多．10世纪后，印度记数法经阿拉伯传到地中海国家和西欧各国，并被称为“阿拉伯数码”．实际上，这种记数法很可能起源于中国．

用算筹进行计算，叫做“筹算”．在春秋早期，“九九”歌诀（古代乘法表从“九九八十一”开始，到“一一得一”为止，所以也叫“九九”）已经成为很普通的常识．根据这些情况来看，算筹记数和简单的四则运算，很可能在西周或更早的时期就已产生了．十进位置制记数法、算筹和筹算是中国古代极其出色的创造．到15世纪元朝末年珠算法逐渐推广之前，筹算制度沿用了两千多年．中国古代数学正是在筹算的基础上取得了辉煌的成就．

数学思想的丰富和深化　春秋战国时期，百家争鸣，学术繁荣．废除井田，“履亩而税”，需要丈量土地面积；建筑城堡，兴修水利，计算人工，需要知道体积和比例分配；制订历法，制造器具，需要认识部分与整体的关系，掌握分数的概念．因此，数学获得了相应的发展．

在这一时期，一些学派还总结和概括出与数学有关的许多抽象概念．其中著名的有《墨经》中关于某些几何名词的定义和几何命题．如“圆，一中同长也”，“平，同高也”，“直，参也”（用三点共线定义“直”），“中，同长也”．“一少于二而多于五，说在建位”（1比12小，但却比5大，这是由于数位的不同），显然指的是位置制记数法．辩者公孙龙提出“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，这个著名的论断，现在讲数列极限时仍然常常被引用．这些关于圆的定义，简单的极限概念和其他各种数学命题，是在大量感性认识的基础上总结和抽象出来的理性认识，是相当精彩和可贵的数学思想．

《算数书》　《算数书》抄写于西汉初年（约公元前2世纪），成书时间应该更早，大约在战国时期．这是一部比较完整的，也是目前可以见到的中国最早的数学专著．全书采用问题集形式，共有六十多个小标题，九十多个题目，包括整数和分数四则运算、比例问题、面积和体积问题等．

《周髀算经》　该书是解释盖天说的天文学著作，大约成书于公元前1世纪，而其中很多内容可能要早得多．在数学方面，《周髀算经》记述了矩的用途、勾股定理及其在测量上的应用，其中也包含了相似直角三角形对应边成比例的定理．《周髀算经》开篇就以商高回答周公问题的形式提出“故折矩以为勾广三，股修四，径隅五”，这是勾股定理的一个特例．接着，又在陈子回答荣方的问题中提出“以日下为勾，日高为股．勾、股各自乘，并而开方除之，得邪至日（太阳到观测者的距离）”，这是勾股定理的普遍形式．《周髀算经》中还有开平方的问题、等差级数问题，以及应用于古“四分历”计算的相当复杂的分数运算．对研究古代天文学史和数学史来说，《周髀算经》是重要的和较完整的宝贵文献．

《九章算术》 同《周髀算经》一样,《九章算术》也不是一人一时写成的. 它经历了多次的整理、删补和修订,是几代人共同劳动的结晶. 大约成书于东汉初年(公元1世纪).《九章算术》采用问题集的形式,列举了246个数学问题,并在若干具体问题之后,叙述了这类问题的解题方法. 全书分为九章:

第一章"方田",是关于土地面积的计算. 包括有正方形、矩形、三角形、梯形、圆、环等面积公式,以及弓形面积和球冠表面积的近似公式.

第二章"粟米",主要讲各种粮食折算的比例问题. 所用方法称为"今有术",即在成比例的四个数中,由三个已知数求出第四个数的算法.

第三章"衰(cuī)分",是按等级分配物资或按一定标准摊派税收的比例分配问题. 在这一章中还有等差数列和等比数列问题,但都用比例方法来解决.

第四章"少广",讲的是已知正方形面积或正方体体积反求边长,即开平方和开立方的方法. 其具体运算过程是世界上最早的关于开平方和开立方法则的记载.

第五章"商功",主要是各种立体体积的计算. 这些问题大都来源于营筑城垣、开凿沟渠、修造仓窖等工程实际.

第六章"均输",是计算如何按人口多少、物价高低、路途远近等条件,合理摊派税收和民工等问题. 包括正比、反比、复比例、连比例、等差级数等.

第七章"盈不足",即盈亏类问题算法. 例如,有若干人共买东西,每人出 a 就多 b,每人出 a' 就少 b',问人数和物价各多少?

第八章"方程",是一次联立方程(线性方程组)问题. 用算筹表示一次联立方程组,类似于由方程组各系数构成的矩阵,其解法和现在中学代数中的消元法基本相同. 这是中国古代数学的一项重大成就.

第九章"勾股",主要内容是勾股定理的应用和简单测量问题. 其中包括勾股容法和勾股容圆问题,以及二次方程 $x^2+ax=b$ 的解法等. 本章原术及刘徽注中有关勾股数的公式,是对整数论的重要贡献,也是世界数学史上关于整数勾股数研究的较早成果之一.

《九章算术》系统地总结了西周至秦汉时期我国数学的重大成就,是中国古代数学体系形成的显著标志.《九章算术》对中国数学的影响,正像欧几里得《几何原本》对西方数学的影响一样,是非常深刻的.

二、中国古代数学的发展和繁荣

从三国到唐末七百年中,数学研究和数学教育都有了显著的发展. 在这一期间撰写的数学书不下数十种,仅《隋书·经籍志》就记载有27种,宋初欧阳修等编纂的《新唐书·艺文志》著录有35种. 其中赵爽的《勾股圆方图注》、刘徽的《九章算术注》和《海岛算经》、《五曹算经》、《孙子算经》、《张邱建算经》、甄鸾的《五经算术》、《数术记遗》、《夏侯阳算经》等,一直流

传至今.

勾股定理和重差术　勾股定理是中国古代几何学中一个最基本的定理.《周髀算经》已有勾股定理($a^2+b^2=c^2$)的一般形式.《九章算术》进一步给出计算勾股数的一组公式,$a:b:c=\frac{1}{2}(m^2-n^2):mn:\frac{1}{2}(m^2+n^2)$,其中 $m:n=(c+a):b, m>n>0$. 这是整数论的重要成果.

《周髀算经》里记载的陈子测日法,通过两次测量结果进行推算,发展了勾股测量方法. 这实质上就是东汉时期的天文学家和数学家所创立的重差术. 把重差术用于测算太阳的高度和距离,当然不可能得到正确的结果. 但是,如果用于测量和推算远处目标的高度、深度、宽度和距离,无疑是一种有效的方法. 刘徽在《海岛算经》中通过九个实例,对重差术做了系统的总结,并且提出了根据三次和四次测量结果的推算公式. 后来,南宋时期秦九韶又解决了更复杂的重差问题. 重差术是当时世界上最先进的用于测量的数学方法.

刘徽割圆术和祖冲之圆周率　中国在两汉之前,一般采用的圆周率是"周三径一",即 $\pi=3$. 这个数值与文化发达较早的其他国家所用的圆周率是相同的. 但是,这个数值误差很大,后来的数学家不断努力去探求更精确的结果.

最突出的是魏晋之际的杰出数学家刘徽. 他在《九章算术注》中创造了"割圆术",为圆周率研究工作奠定了理论基础和提供了科学的算法. 刘徽割圆术的基本思想是用圆内接正多边形的周长和面积逼近圆周长和圆面积. 逼近的最终结果,正如他所指出的"割之弥细,所失弥少. 割之又割,以至不可割,则与圆合体而无所失矣",即极限情形是两者完全重合. 刘徽从圆内接正六边形算起,一直到求出圆内接正 96 边形边长和正 192 边形的面积,得到 $\pi=\frac{157}{50}=3.14$,继续求出圆内接正 3072 边形的面积,得到 $\pi=\frac{3\,927}{1\,250}=3.141\,6$. 这两个结果是比较好的,现在还经常使用,其计算程序也比古希腊数学家阿基米得的类似方法简便得多. 继刘徽之后,南北朝时祖冲之,把圆周率推算到更加精确的程度. 据《隋书·律历志》记载,祖冲之求出 π 的不足近似值 3.141 592 6 和过剩近似值 3.141 592 7,并确定 π 的真值在这两个近似值之间,即

$$3.141\,592\,6<\pi<3.141\,592\,7$$

精确到小数七位. 这是当时世界上最先进的成果,直到约一千年后才被 15 世纪中亚数学家阿尔·卡西和 16 世纪法国数学家韦达超过. 祖冲之还确定了 π 的两个分数形式的近似值:约率 $\pi=\frac{22}{7}\approx3.14$,密率 $\pi=\frac{355}{113}\approx3.141\,592\,9$. 这两个值都是 π 的渐近分数. 其中约率$\frac{22}{7}$早已为阿基米得和何承天所知,密率$\frac{355}{113}$则是祖冲之首创. 在欧洲,$\pi=\frac{355}{113}$是 16 世纪由德国数学家奥托和荷兰工程师安托尼兹分别得到的,并被通称为"安托尼兹率". 但这已是祖冲之以后一千