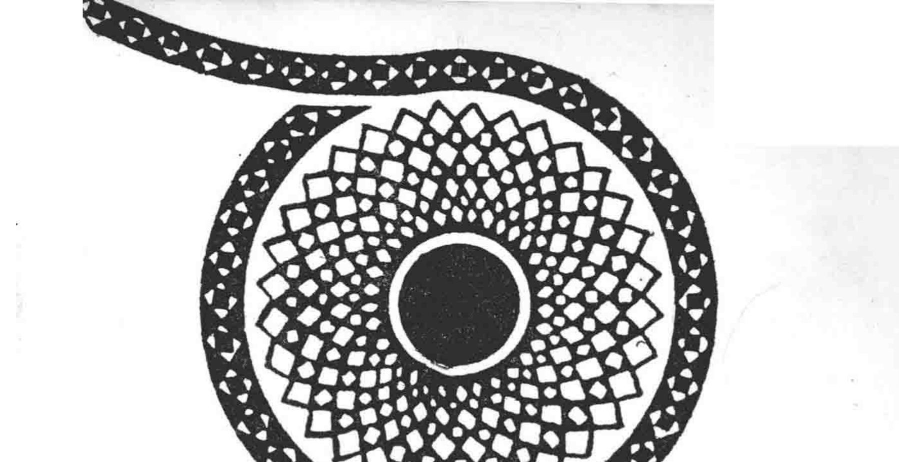
GAODENGDAISHU

高等代数简明教程

JIANMINGJIAOCHENG

熊廷煌 主编 郝钢新 审

湖北教育出版社



等代数简明教程

熊廷煌 主编 郝钢新 审

湖北教育出版社

高等代数简明教程
熊廷煌 主编
郝锅新 审
*
湖北教育出版社出版、发行
湖北省新华印刷厂印刷
850×1168毫米32开本 15.5印张 2插页 383 000字
1987年10月第1版 1987年10月第1次印刷
印数：1—8 000
ISBN 7—5351—0120—8/G·109
统一书号：7306·685 定价：3.65元

内容提要

本书是以1982年师专高等代数教学大纲为基本依据编写的。内容包括线性代数，多项式理论和近世代数基本概念。本书取材精要，结构简明，文字通俗，并附有习题解答或较详细的提示。

本书可作为师专、教院、高师函授或其他成人高校的教材，亦可作为本科师范院校的教材或参考书，以及青年自学用书。

前　言

本书是为适应师专、教院及高师函授等教学的需要，由湖北省教委组织，湖北省师专数学协作组安排编写的。参加编写者及其分工如下：

主编：熊廷煌

副主编：陈良植

常务编委：李耀昭、聂贻俊

编委：（以姓氏笔划为序）

马达才（江西上饶师范学院）

甘良仕（宜昌师专）　叶启云（鄂西大学）

朱有仁（陕西宝鸡师范学院）

李耀昭（咸宁师专）　陈汉藻（黄冈师专）

陈良植（襄樊市教师进修学院）

何彻之（襄阳师专）　郑格于（郧阳师专）

贺家乐（十堰大学）　聂贻俊（荆州师专）

曹楷书（孝感师专）　谭必先（黄冈师专）

熊廷煌（荆州师专）

本书是长期教学实践的产物。自1981年形成初稿以来，曾连在师专、高师函授及夜大教学中全面试用，并经协编组三次讨论，四易其稿。本书在编写中注意了下述几点：体系力求新颖，同时兼顾习惯；结构力求简明，主干中心突出；论证尽可能选用最捷途径；表达尽可能采用最简形式；交待尽可能详尽而又不乏思考余味；对重点内容和方法，着意提炼规律和要领；对例题、习题，着重基本训练，培养素质和能力。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

使用本书教学，约需160～170学时(包括习题课)．对打星号的内容可酌情删减．

北京师范大学郝钢新教授对本书的编写给予了热情的扶植和指导，并作了详细的审校．对于郝钢新先生倾注于师专教材建设的满腔热忱和无私帮助，我们谨在此致以最崇高的敬意和最真诚的感谢！

华中师范大学李修睦教授，武汉大学熊全淹教授，以及华中工学院俞玉森教授都曾审阅过本书初稿，并给予了热情的鼓励和帮助．在此，亦向诸位专家恭致谢忱．

本书得以及时出版供应教学，还得感谢各参编单位、省教育出版社和印刷厂的各级领导、编辑和职工同志的大力支持；此外，陈振龙同志为本书的全部习题解答提供了初稿，谨在此一并致谢．

限于水平，本书一定还有不少缺点和错误，敬待读者批评指正．

编者 1986年12月

—13

序

高等代数是大学的基础代数课程。主要包括多项式理论初步和线性代数基础这两部分内容。通过这一课程的学习，使学生能够初步地掌握基本的、系统的代数知识和抽象的、严密的代数方法。这些知识和方法对于进一步学习数学和科学技术的各个分支都是非常必要的。

我国自己编写的和翻译的高等代数教材已有若干种，然而这些教材多半较适用于综合性大学或师范学院。对于为数众多的师范专科学校来说，迄今尚没有一本更为理想的教材，这不能不说是一个缺陷。

由熊廷煌主编的高等代数是在长期教学实践的基础上产生的。针对师范专科学校的特点，既注意到科学性和系统性，又注意到直观性和量力性。为了使初学者能够由浅入深地理解抽象的概念和掌握严格的逻辑推理方法，在内容的安排，例题和习题的配置以及文字的阐述上，都作了周密细致的考虑。这些努力一定会收到相应的效果的。

不少师专的教师参加了编写工作，更能收到集思广益之效。相信这本书不仅较适于作师专的高等代数教材，而且对于其他读者也会有参考价值。

希望今后能看到更多的具有不同风格的教材问世。

郝钢新

1987年6月于北京师范大学数学系

目　录

第一章　消元法

第二章　矩阵代数

第三章　行列式

第四章　多项式

第五章 向量空间

第六章 线性变换

第七章 欧氏空间

第八章 二次型

第九章 近世代数基本概念

第一章
消元法

本章主要介绍线性方程组的基本解法——消元法；并由此引出线性代数中两个最基本的概念——数向量和矩阵．作为全书的基础，我们首先介绍数域的概念．

§1 数 域

在处理数学问题时，常常需要首先明确是在什么数的范围(数集)内讨论．同样一个问题，在不同的数集内可以有不同的解答．例如，在有理数集内，x^4-4 只能分解为 $(x^2-2)(x^2+2)$；而在实数集和复数集内，则可分别分解为 $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\times(x^2+2)$ 和 $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$．

常见的数集有：

N——全体自然数的集；

Z——全体整数的集；

Q——全体有理数的集；

R——全体实数的集；

C——全体复数的集．

在今后的讨论中，常要考虑的一个问题是：一个数集中的任

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

意两个数，经过某种运算的结果，是否还属于这个数集？或者说，这个数集对这种运算是否“封闭”？

我们知道，N 只对加法和乘法封闭；Z 只对加法、减法和乘法封闭；而 Q，R 和 C 则对加、减、乘、除（除数不为零）都封闭. 这种对四则运算都封闭的数集，我们通称为“数域”.

定义 设 P 是一些（至少两个）复数所成的集. 如果对于任意的 a，$b \in P$，都有 $a+b \in P$，$a-b \in P$，$a \cdot b \in P$，且在 $b \neq 0$ 时，还有 $\frac{a}{b} \in P$，则称 P 是一个**数域**.

上面提到的 Q，R 和 C 都是数域，分别叫做**有理数域**，**实数域**和**复数域**. 但数域并非只有这三个，而是有无穷多个！

例 令 $F = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$，则 F 是一个数域.

证 在 F 中任取二数 $a+b\sqrt{2}$ 和 $c+d\sqrt{2}$，则

$$(a+b\sqrt{2}) + (c+d\sqrt{2}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{2}$$

因为 a，b，c，d 都是有理数，所以 $a+c$，$b+d$ 也都是有理数，因而 $(a+c)+(b+d)\sqrt{2} \in F$. 同理

$$(a+b\sqrt{2}) - (c+d\sqrt{2}) = (a-c) + (b-d)\sqrt{2} \in F$$

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd) + (bc+ad)\sqrt{2} \in F$$

现设 $c+d\sqrt{2} \neq 0$，则必有 $c-d\sqrt{2} \neq 0$. 否则，在 $d=0$ 的情形，将得出 $c=0$，而与 $c+d\sqrt{2} \neq 0$ 的假设矛盾；在 $d \neq 0$ 的情形，将得出 $\sqrt{2} = \frac{c}{d} \in Q$，与 $\sqrt{2}$ 是无理数的事实矛盾. 因此，我们有

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}$$

$$= \frac{ac-2bd}{c^2-2d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2} \in F$$

这就证明了 F 是一个数域.

不难看出，这个数域 F 是一个介于有理数域和实数 域 之 间的数域. 可以证明：对于任意的素数 p，数集

$$F_p=\{a+b\sqrt{p}\mid a,\ b\in Q\}$$

都作成一个数域；并且，若 p_1 和 p_2 是两个不同的素数，那么如此作成的数域F_{p_1} 和F_{p_2} 也是两个不同的数域. 而素数有无穷多，可见数域也有无穷多. 但是，所有的数域都有下面一些共同的性质.

定理 1. 1. 1 任何数域都含 0 和 1.

证 设 P 为任一数域. 在 P 中任取一数 a，则由数域的 定义，有 $0=a-a\in P$. 又因 P 至少含两个数，故必有一数 $b\neq 0$. 于是 $1=\dfrac{b}{b}\in P$. ▌①

由此定理，又可推出

定理 1. 1. 2 任何数域都包含有理数域.（因而可以说，有理数域是“最小的”数域）.

证 设 P 为任一数域. 因为 $1\in P$，用 1 和自己重复相加，可得全体正整数，所以全体正整数都属于 P. 又因 $0\in P$，所以 P 也含有 0 与任一正整数的差，亦即含有全体负整数，从 而 P 含有全体整数. 这样，P 也就含有任意两个整数的商（分母不为零）. 因而 P 含有全体有理数. ▌

由于本课程中讨论问题时，所涉及的数的运算几乎都是“有理运算”（即加、减、乘、除），故都可在一个给定的数域上进行. 今后，我们将经常使用“（给定的）数域 P 上的”这样一个定语来限定问题所涉及的数的范围.

---

① 符号“▌”表示一个论断的证明完结. 当符号“▌”紧接在一个论断的叙述之后出现时，就表示它不证自明，或者在前面已经证明了.

习　　题

1. 下列论断是否正确,为什么?

(1) 任何数域都含无穷多个数;

(2) 任何包含有理数域的数集都是数域.

2. 整数集 Z 是不是数域?

3. 数集$F=\left\{\dfrac{m}{2^n}\,\middle|\, m,\ n\in Z\right\}$是不是数域?

4. 证明$F=\{a+bi\mid a,\ b\in Q\}$是一个数域.

5. 证明:两个数域的交还是一个数域.

6. 证明:如果一个数集 P 至少含有一个不为零的数,并且对减法和除法封闭,那么 P 就是一个数域.

选　作　题

1. 对于任意素数 p,证明数集

$$F_p=\{a+b\sqrt{p}\mid a,\ b\in Q\}$$

是一个数域.

2. 证明:对于不同的两个素数 p_1 和 p_2,上题中作成的两个数域

$F_{p_1}=\{a+b\sqrt{p_1}\mid a,\quad b\in Q\}$和$F_{p_2}=\{a+b\sqrt{p_2}\mid a,\quad b\in Q\}$

也不同.

3. 证明:两个数域 P_1和 P_2的并$P_1\cup P_2$ 也作成一个数域的充分必要条件是它们有包含关系($P_1\subset P_2$ 或$P_2\subset P_1$).

§2　线性方程组的同解变换

线性方程组即一次方程组,其一般形式为:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中未知量的个数 n 和方程的个数 m 一般不相等. a_{ij} $(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$ 称为未知量的**系数**. b_i 称为**常数项**. 如果所有的系数和常数项都属于某个数域 P, 就称(1)是数域 P 上的线性方程组.

线性方程组 (1) 的**一个解**, 指的是一个 n 元有序数组 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$, 当用 k_i 代替 x_i 时, (1)的每个方程都成为恒等式.

常数项全为 0 的线性方程组称为**齐次线性方程组**. (只要有一个常数项不为 0, 就称为**非齐次线性方程组**). 显然, 任何齐次线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0
\end{cases}
\tag{2}
$$

至少有一个解 $(0, 0, \cdots, 0)$, 它称为齐次线性方程组的**零解**或**平凡解**. 所以, 对于齐次线性方程组, 要讨论的主要问题之一是存不存在**非零解**.

线性方程组的所有解的集合称为**通解**. 如果两个线性方程组有相同的通解, 就说这两个方程组**同解**. 在中学解线性方程组的经验告诉我们, 解线性方程组的过程, 就是逐步用同解变换将原方程组变换成较易求解的方程组的过程.

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + \frac{4}{3}x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases} \qquad (3)$$

解 步骤 1 从第一和第三个方程分别减去第二个方程的$\frac{1}{2}$倍和 2 倍，来消去这两个方程中的 x_1(即把 x_1的系数化为零)，我们得到

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 3x_3 = 3 \\ -2x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

为了计算方便，我们把第一个方程乘以 -2 后与第二个方程交换位置，得

$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

把第二个方程的 2 倍加到第三个方程，来消去后一方程中的未知量 x_2，我们得到

$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases} \qquad (4)$$

我们把(4)这种形状的方程组称为**阶梯形方程组**。

步骤 2 现在很容易求出方程组的解了，这只需作一系列"回代"工作：从第一个方程减去第三个方程的 3 倍，再从第二个方程减去第三个方程（相当于把 x_3 的值 -2 代入第一个方程和第二个

方程)，得

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{5}{3}x_2 \qquad = 9 \\ \qquad\quad x_2 \qquad = 3 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = -2 \end{cases}$$

再从第一个方程减去第二个方程的$\frac{5}{3}$倍（相当于把 x_2的值 3 代入第一个方程)，得到一个所谓**标准形方程组**：

$$\begin{cases} \boxed{x_1} \qquad\qquad\quad = 4 \\ \qquad \boxed{x_2} \qquad\quad = 3 \\ \qquad\qquad \boxed{x_3} = -2 \end{cases} \tag{5}$$

这个方程组(5)的解也就是我们所要求的方程组(3)的解，因为从(3)到(5)每一步都是用的同解变换．为说明这一点，我们对上述变换作如下的分析和论证．

我们所作的变换不外乎下列三种：

1）换位变换——变换某两个方程的位置；

2）数乘变换——用一个不等于零的数乘某一个方程；

3）化零变换——用一个数乘一个方程后加到另一个方程上(其主要作用是将系数“化零”，从而达到“消元”的目的)．

我们把这三种变换统称为**方程组的初等变换**．用初等变换解线性方程组的方法就称为**消元法**．消元法的理论根据是

定理 1.2.1 初等变换把方程组变成同解方程组．

证 我们仅以化零变换为例加以证明，对于其他两种变换，读者可以仿证．

设线性方程组为

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com