高等学校教材

高等几何

第三版

朱德祥 朱维宗 编

高等教育出版社

高等学校教材

高等几何

Gaodeng Jihe

第三版

朱德祥　朱维宗　编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书第三版参照第二版修订而成，语言精练，论证简明，保留了第二版的特色与精华。全书共九章，分别为：仿射几何学的基本概念，欧氏平面的拓广，一维射影几何学，德萨格定理、四点形与四线形，射影坐标系和射影变换，二次曲线的射影性质，二次曲线的仿射性质，二次曲线的度量性质，几何基础简介。书后附有习题答案、提示与解答。

本书可作为师范院校数学类专业全日制及函授教材和教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等几何 / 朱德祥，朱维宗编. --3 版. --北京：高等教育出版社，2015.11

ISBN 978-7-04-043899-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①朱… ②朱… Ⅲ. ①高等几何-高等学校-教材 Ⅳ. ①O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 223965 号

策划编辑 张长虹　责任编辑 田 玲　封面设计 王 琰　版式设计 马敬茹
插图绘制 杜晓丹　责任校对 刁丽丽　责任印制 赵义民

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　刷	北京七色印务有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　本	850 mm×1168 mm　1/32		
印　张	9.375	版　次	1983 年 9 月第 1 版
字　数	230 千字		2015 年 11 月第 3 版
购书热线	010-58581118	印　次	2015 年 11 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	20.30 元

物 料 号　43899-00

第三版前言

《高等几何》第二版自出版以来，一直深受读者好评，截至2014年4月，已重印8次。读者对这本教材的厚爱是促使教材改版的主要动力。2014年《高等几何》第三版被列为“云南省普通高等学校‘十二五’规划教材”。第三版保留了第二版的特色，根据2010年以来“高等几何”精品课程的建设成果并听取读者和同行的意见、建议，第三版首先修订了第二版中的少数错漏之处，对个别定理的证明作了修改；其次对第九章作了较大的改动，增补了定理、习题。为方便读者学习，附录部分给出了全部习题的解答，某些较易的题目则给出提示或答案。

感谢高等教育出版社数学分社，感谢云南师范大学，感谢云南师范大学教务处、数学学院几何教研室！正是大家的关心、鼓励，才有了第三版。这里特别感谢高等教育出版社数学分社的张长虹老师和本书的责任编辑田玲老师！特别感谢云南师范大学教务处刘超群老师、数学学院郭震教授、李玉华教授、王涛副教授！

限于本人的水平，疏漏及不足之处在所难免，敬请读者指正，以便更正和提高。

朱维宗

2015年1月于云南师范大学

第二版前言

高等几何是高等师范院校数学与应用数学专业本科的基础课程之一，其先修课程为解析几何和高等代数。按照一般的观点，高等几何包含射影几何和几何基础两个部分。系统地学习高等几何，既有利于对近代几何学有较为深入的理解，又能为将来从事几何学课程教学提供便利并提高教学水准。

本教材自1983年出版以来，深获读者好评，至2000年6月累计印量已达354 657册，2005年1月已印刷24次。《朱德祥执教五十五周年文集》中曾评论本教材有四个特色：（内容）少而精；语言精练，论证简明；几何直观与代数工具紧密结合；联系中学实际，突出师范性。本次教材修订，除保留第一版的特色之外，更多的是出于教学的考虑。首先，改正了第一版中的一些错漏；其次，增加了少量例题，补充了部分习题答案、提示与解答，以方便初学者及教师教学。考虑到当前各高校均压缩课时，这些例题可留给读者自学，不必占用教学时数。最后，对各章体例略作改动，如定理、例题按章统一编号；增加了一些脚注，对外国数学家译名按国家标准作了修正，等等。

感谢高等教育出版社数学分社，感谢云南师范大学数学学院，正是他们的鞭策和鼓励使得本书再版。云南师范大学数学学院将本书的再版列入云南省首批省级重点建设——数学专业建设项目。同时感谢多年来使用本书的教师和读者；感谢云南师范大学郭震教授、李忠映教授，北京师范大学王申怀教授，他们对教材的修订给予了热忱的关怀和具体的指导；感谢高等教育出版社张长虹老师、李蕊老师，感谢本书责任编辑丁鹤龄特约编审，他

们创造性的工作为教材生色不少。限于本人的水平和改编的时间仓促，疏漏及不足之处在所难免，敬请读者指教，以便更正和提高。

1977 年恢复高考后，我有幸考入昆明师范学院数学系，当时学习高等几何的教材是本书前八章油印讲义，执教的是朱德祥先生和李忠映老师。老师们的敬业精神、高超的教学艺术和一丝不苟的科学态度深深地感动了我，使我敬佩不已。在第二版修订期间，脑海中常常浮现出父亲慈祥的笑容，我将本书的再版作为对父亲最深切的怀念！

朱维宗

2007 年 3 月于云南师范大学

第一版前言

高等师范院校数学专业的高等几何，按教学大纲主要讲射影几何。为了兼顾高等师范专科学校高等几何的教学大纲，我在原讲义的八章修改之后新添了第九章几何基础简介。

今年4月在南通师专审稿会议上提到用公理法建立平面射影几何。考虑到数学科的大纲上没有这样要求，数学系的大纲把它放在带有*号可以删减的内容中，因此放在第九章标上*号。至于第九章其他内容，数学系没有讲授的义务。9.7节罗巴切夫斯基几何对于师专按大纲也是可删减的内容，带有*号。6.7节二次曲线束及其在解联立方程方面的应用，对于数学系和数学科都是可删减的内容，标有*号。带*号的习题是与带*号的内容配合的。

中国幅员广大，人口众多，对历史给我们留下的不平衡状态，一刀切的办法是行不通的。师院数学系、师专数学科、教育学院、函授大学等，都有使用过这本讲义的，这对我们是莫大的支持和鼓舞，十分感激。使用本教材的单位，希望按各自教学大纲和客观现实，实事求是地对本教材作适当增、删、改，着重基础，培养能力，以期符合实际，多收实效。

高等几何是师范系统数学专业重要的基础课之一，它跟初等几何、解析几何、高等代数等课程有紧密的联系；它对未来中学数学教师在几何方面基础的培养、观点的提高、思维的灵活、方法的多样起着重要作用，从而大有助于中学数学教学质量的提高和科研能力的培养。

教学大纲规定，讲授本课程兼用综合法和代数法。这既符合

射影几何发展的历史规律，又符合师范系统开设本课程的目的。在这里我们是讲几何，所以尽量从几何的概念出发，运用活生生的几何直观开发智力，运用代数这个有力工具，作为简化思维过程加以高度概括总结的武器，确认空间形式的本质。经验证明，学了射影几何之后，学生对代数的作用和兴趣也提高了。

联系和指导中学数学教学，这是本书的着重点之一。这方面的工作可说是个无底洞，希望使用教材的同志着意丰富。

本书所讲的二次曲线，系数全部是实的，在此统一声明。实系数二次曲线未必有实轨迹。

本书的出版首先要感谢兄弟院校的支持，他们大量使用我们的讲义，在他们印行的教材中采用我们的一些内容。同时要感谢昆明师院函授处和数学系几何教研组全体同志的热情支持。

本书承蒙曾如阜教授主审，麦兆娴、李忠映、胡连三、熊德群、李云普、秦炳强、吕嘉钧等同志参加审查，南通师专主持审稿会，特于此致谢！

限于本人水平，疏漏错误之处一定不少，请广大读者指教，以便改进。

朱德祥

1983 年 5 月于昆明师范学院

目　　录

射影几何学

几何基础

射影几何学

研究图形在射影变换下不变的性质的几何学叫做射影几何学(projective geometry),它所处理的是构成几何图形的最根本的定性方面和描述方面的性质,而且不用线段与角的度量.在经典几何学中,射影几何处于一种特殊的地位,通过它可以把一些几何联系起来.

第一章　仿射几何学的基本概念

本课程主要研究射影几何,在第一章我们介绍仿射几何的基本概念,作为从欧氏几何过渡到射影几何的桥梁.

1.1　平行射影与仿射对应

我们来考虑同一平面内直线 a 到直线 a' 的平行射影(图 1.1).设 l 为平面上一直线,与 a 及 a' 都不平行.通过直线 a 上诸点 $A,B,C,D,\cdots$ 作 l 的平行线,交 a' 于 $A',B',C',D',\cdots$,这样便定义了直线 a 到直线 a' 的一个映射,称为平行射影或透视仿射.a 上的点是原像点,a' 上的对应点是映像点,l 是平行射影的方向.记这个透视仿射为 T,则写 $A'=T(A)$,$B'=T(B)$,$\cdots$.明显地,平行射影和方向有关,方向变了,就得出另外的透视仿射.

现设同一平面内有 n 条直线 $a_1,a_2,\cdots,a_n$(图 1.2),用 T_1,$T_2,\cdots,T_{n-1}$ 顺次表示 a_1 到 a_2,a_2 到 a_3,$\cdots$,a_{n-1} 到 a_n 的透视仿射,经过这一串平行射影,a_1 上的点和 a_n 上的点建立了一个一一对应,称为 a_1 到 a_n 的仿射或仿射变换 T:$T=T_{n-1}\cdots T_2T_1$,T 称为 T_1,

$T_2, \cdots, T_{n-1}$按这个顺序的乘积.

$$T(A_1) = T_{n-1} \cdots T_2 T_1(A_1) = T_{n-1} \cdots T_2(A_2) = \cdots = A_n,$$

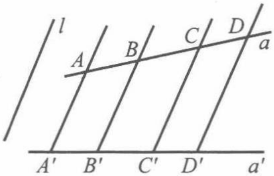

图 1.1

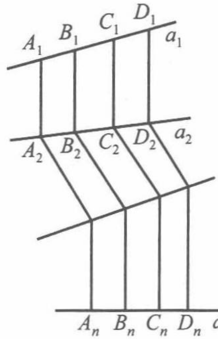

图 1.2

$T(B_1) = B_n$,等等.注意书写的顺序跟平行射影的先后顺序是相反的.仿射是由有限回的平行射影组成的,所以仿射是透视仿射链或平行射影链.透视仿射是最简仿射.要断定一个仿射是否是透视仿射,只要看原像点和映像点的连线是否都平行.

仿此可以定义平面 π 到平面 π'的平行射影或透视仿射 T,平行射影的方向 l 要求既不与 π 平行又不与 π'平行.射影方向改变了就得出另外的从 π 到 π'的透视仿射.若 $T(A) = A'$,$T(B) = B'$,$T(C) = C'$,且 A,B,C 共线,则易见 A',B',C'也共线.设以 a 表直线 ABC,以 a'表直线 $A'B'C'$(图 1.3),则写 $T(a) = a'$.

所以两平面间的平行射影将一平面上的点映射为第二平面上的点,将一平面上的直线映射为第二平面上的直线.我们说透视仿射保留同素性(即几何元素点与线保持原先的种类).

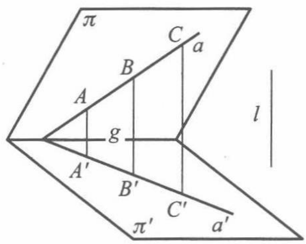

图 1.3

直线与直线间的透视仿射有一个自对应点(如果这两条线相交),即两线的公共点.同样,在平面到平面的透

视仿射下，若两平面相交，则交线 g 为自对应点的轨迹，称为对应轴，对应直线 a 与 a' 或相交于轴上，或都与轴平行. 点在直线上，称为点与直线相接合（或结合或关联）. 对于原像，点 A 与直线 a 接合，对于映像，点 A' 与直线 a' 接合，我们说透视仿射保留接合性.

仿照直线到直线的仿射，平面到平面的仿射是由有限回的平行射影组成的，或者说，仿射是透视仿射链.

1.2　仿射不变性与不变量

经过一切透视仿射不改变的性质和数量，称为仿射不变性和仿射不变量. 经过仿射变换它们是不改变的. 经过任何仿射变换不改变的图形、性质和数量，称为仿射图形、仿射性和仿射量. 由以上所述可知，同素性、接合性是仿射不变性. 由此推知，仿射变换将共线点映射为共线点，将共点线映射为共点线. 现在证明：

定理 1.1　两条直线间的平行性是仿射不变性.

证明　设 a，b 是平面 π 内的两条平行线，a'，b' 是它们在平面 π' 内的仿射映像，因此只要求证 $a' /\!/ b'$.

若 a' 与 b' 不平行而相交于一点 P'（图 1.4），且设 P 为 P' 的原像点，那么由于仿射保留接合性，点 P 应该既在 a 上又在 b 上，即是说 a 和 b 是相交而不平行了. 这与假设矛盾，所以反证了 $a' /\!/ b'$. 证毕.

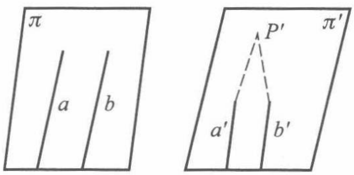

图 1.4

推论　平行四边形是仿射不变图形，梯形是仿射不变图形.

定义 1.1　设 A，B，C 为共线三点，这三点的简比 (ABC) 定义

为下述有向线段的比:

$$(ABC)=\frac{AC}{BC}.$$

C 在线段 AB 上时,简比 $(ABC)<0$, C 在 AB 的延长线上时, $(ABC)>0$.

在解析几何中讲过线段的定比分割,若点 C 分割线段 AB 的分割比记为 λ,则

$$\lambda=\frac{AC}{CB}=\frac{AC}{-BC}=-(ABC).$$

所以简比 (ABC) 等于点 C 分割线段 AB 的分割比的相反数.

定理 1.2 共线三点的简比是仿射不变量.

证明 首先注意,对于透视仿射,即对于一回平行射影,这由初等几何是明显的(图 1.1 和 1.3 节).因此,经过透视仿射链,简比也保持不变.证毕.

定理 1.3 两条平行线段之比是仿射不变量.

证明 可由上述定理推得,设 AB 与 CD 是平面 π 内的平行线段, $A'B'$ 与 $C'D'$ 是它们在平面 π' 内的仿射像(图 1.5).由定理 1.1, $C'D' /\!/ A'B'$.

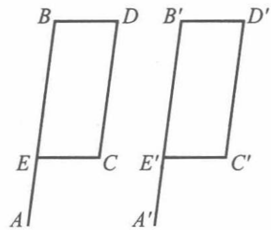

图 1.5

在平面 π 内,过点 C 作 $CE /\!/ DB$ 交 AB 于 E,在平面 π' 内过点 C' 作 $C'E' /\!/ D'B'$ 交 $A'B'$ 于 E'.容易看出 E' 是 E 的仿射像.由定理 1.2, $(AEB)=(A'E'B')$,即

$$\frac{AB}{EB}=\frac{A'B'}{E'B'},\quad \text{或}\quad \frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}.$$

定理 1.4 一直线上任两线段之比是仿射不变量.

请读者自证(习题 1.11).

注意:我们证明了,共线或平行两线段之比经过仿射变换不变,但任意两线段之比在仿射变换下并不保持.

现在我们来证明两图形的面积之比也是仿射不变量.我们先

引进下述引理：

引理 1.1 在透视仿射下，任何一对对应点到对应轴的距离之比是一个常数.

证明 设 A 与 A'，B 与 B' 是两对透视仿射对应点（图 1.6），从而 $AA' /\!/ BB'$. 由这些点向对应轴作垂线 AA_0，$A'A_0'$，BB_0，$B'B_0'$. 若 AB，$A'B'$ 与轴 g 平行，引理是明显的. 设 AB 与 $A'B'$ 相交于轴 g 上一点 X，由相似三角形得

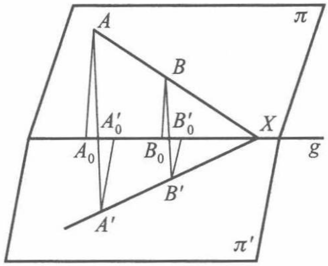

图 1.6

$$\frac{AA_0}{BB_0}=\frac{AX}{BX}, \quad \frac{A'A_0'}{B'B_0'}=\frac{A'X}{B'X}.$$

但

$$\frac{AX}{BX}=\frac{A'X}{B'X},$$

故有

$$\frac{AA_0}{BB_0}=\frac{A'A_0'}{B'B_0'},$$

交换比例外项得

$$\frac{A'A_0'}{AA_0}=\frac{B'B_0'}{BB_0}=k(\text{常数})①,$$

这常数 k 随给定的透视仿射而定. 证毕.

利用引理 1.1，我们证明：

定理 1.5 在仿射变换下，任何一对对应三角形面积之比等于常数. 换句话说，任意两个三角形面积之比是仿射不变量.

证明 先对透视仿射证明这个定理，再推广到一般仿射. 证明

① 要证明某个量是定值，常转为证明合于条件的任两个量总是相等的，当然就是一个常数或定值了. 这是几何学中常用的方法.

分为两步.

第一步:设对应三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 有两对对应顶点 A 和 A',B 和 B' 重合在透视仿射对应轴 g 上(图 1.7).

由第三对对应顶点 C 和 C' 在两个三角形各自的平面上向对应轴 g 作垂线 CC_0 和 $C'C_0'$,则

$$\frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}=\frac{C'C_0'}{CC_0}.$$

由引理 1.1,等式右端为一常数 k,所以 $\triangle A'B'C'=k\triangle ABC$.

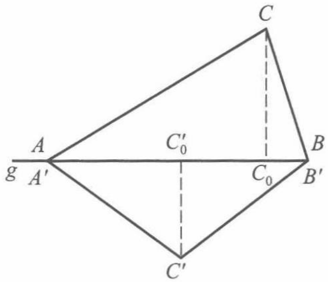

图 1.7

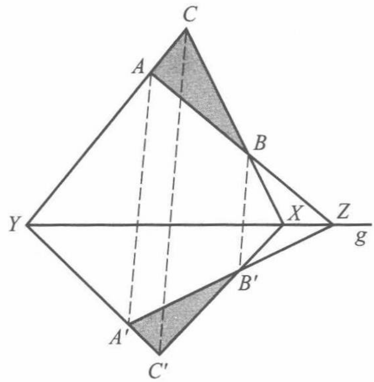

图 1.8

第二步:一般情况.

如图 1.8 所示,$\triangle ABC$ 与其透视仿射对应三角形 $\triangle A'B'C'$ 中,三对对应边相交于对应轴 g 上.由第一步证明得

$$\begin{aligned}\triangle A'B'C' &= \triangle C'YX+\triangle B'XZ-\triangle A'YZ\\ &=k\triangle CYX+k\triangle BXZ-k\triangle AYZ\\ &=k(\triangle CYX+\triangle BXZ-\triangle AYZ)\\ &=k\triangle ABC.\end{aligned}$$

当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 有一对对应边例如 AB 和 $A'B'$ 与 g 平行时,点 Z 不存在,此时 $AB=A'B'$.于是

$$\frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}=\frac{\triangle A'B'C'\text{的高}}{\triangle ABC\text{ 的高}}$$