南京大学材料科学与工程系列丛书

简明数学物理方法教程

张　超 ◎编著

科学出版社

南京大学材料科学与工程系列丛书

简明数学物理方法教程

张 超 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书包括复变函数论和数学物理方程两部分内容.其中复变函数论部分主要包括复变函数和解析函数、复变函数的积分、解析函数的幂级数展开、留数定理及其应用,数学物理方程部分包括数学物理方程和定解条件、分离变量法、球坐标与柱坐标系中的分离变量法、定解问题的数值计算方法.本书在内容设置上力求简洁明了,并对一些比较抽象的问题引入了计算机数值模拟作为辅助手段,以方便读者理解.

本书可作为普通高等院校理工科学生的教材,也可供相关专业的工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

简明数学物理方法教程/张超编著.—北京:科学出版社,2015.12
(南京大学材料科学与工程系列丛书)
ISBN 978-7-03-046470-5

Ⅰ.①简… Ⅱ.①张… Ⅲ.①数学物理方法-高等学校-教材 Ⅳ.①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 282639 号

责任编辑:张 析 姚莉丽 / 责任校对:张凤琴
责任印制:霍 兵 / 封面设计:王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
大厂书文印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 12 月第 一 版 开本:720×1000 1/16
2015 年 12 月第一次印刷 印张:9 1/2
字数:219 000
定价:36.00 元
(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　言

本书是为理工科高等院校数学物理方法课程编写的简明版教材，在编写过程中参考了目前主流的同类教材的内容设置，并兼顾创新，在一些问题的处理上进行了新尝试. 本书内容与传统数理方法教材类似，主要可以分为复变函数论和数学物理方程两部分. 全书共分为 8 章，其中第 1～4 章属于复变函数论范围，主要包括复变函数和解析函数、复变函数的积分、解析函数的幂级数展开以及留数定理等内容；第 5～8 章属于数学物理方程范围，主要包括数学物理方程和定解条件、泛定方程的导出、直角坐标系及球、柱坐标系分离变量法以及定解问题的数值计算方法等内容.

数学物理方法是高等院校理工科的一门重要基础课程，该课程可为学生进一步学习理论物理课程提供必要的数学工具. 该课程的知识覆盖面较广，考虑到工科教学实际情况和课时数的限制，本书在内容设置上进行了某些简化处理，针对一些抽象问题引入了计算机数值模拟作为辅助手段，以方便学生理解. 全书内容可在 60 学时左右完成.

由于作者学识水平有限，加之对一些问题处理进行了新的尝试，不妥之处在所难免，欢迎读者批评指正.

张　超

2015 年 1 月

目　　录

第 1 章　复变函数和解析函数

1.1　复数的引入

实数范围内的运算存在一些限制，如无法对负数进行开平方或求对数操作. 将数系进行扩张并引入复数可解决这一问题. 实数域中的这些运算限制在复数域中不再存在，并且许多问题放在复数域中考虑会显得更为自然. 本章将研究的复变函数，其自变量和函数取值就都属于复数域.

复数是一种二元数，其形式通常可表示为

$$z=x+\mathrm{i}y \tag{1.1.1}$$

其中，i 为虚数单位，满足 $\mathrm{i}^2=-1$；x,y 均为实数，分别称为 z 的**实部**和**虚部**，记为

$$x=\mathrm{Re}z,\quad y=\mathrm{Im}z \tag{1.1.2}$$

式(1.1.1)被称为复数的**代数式**. 这里应注意虚部 $\mathrm{Im}z$ 是一个实数，其代表的是 y 而不是 $\mathrm{i}y$. 若两个复数相等，则两者的实部以及虚部必然都分别相等. 实部和虚部分别相等是两复数相等的充要条件.

复数具有直观的几何意义. 在平面上建立直角坐标系，将复数的实部和虚部分别看成点的横坐标和纵坐标，则平面上任何一点均可以和一个复数实现一一对应关系. 因此，可将全体复数的集合$\mathbb{C}$看成一个平面，称为**复平面**. 复平面的 x 轴和 y 轴分别被称为**实轴**和**虚轴**. 其中实轴对应于所有实数的集合，位于实轴之外(即虚部不为 0)的复数被称为**虚数**，实部为 0 的虚数被称为**纯虚数**. 实部相等而虚部互为相反数的两个复数互为**共轭复数**，z 的共轭复数记为 $\bar{z}$ 或 z^*.

复数 z 与复平面原点 O 之间的距离称为 z 的**模**(图 1.1)，记为 $\rho=|z|$. 复平

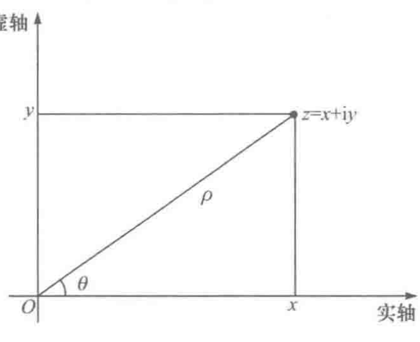


图 1.1

面实半轴与 Oz 连线的夹角称为复数 z 的**辐角**，记为 $\theta=\mathrm{Arg}z$. 复数的辐角具有多值性，可以任意加减 $2n\pi$. 复数 0 的辐角无意义.

复数的模与辐角和其实部与虚部之间满足以下关系：

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}\quad(x\neq 0)\end{cases}\tag{1.1.3}$$

以及

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}\tag{1.1.4}$$

将式(1.1.4)代入复数的代数式(1.1.1)，并结合**欧拉公式** $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，可以得到复数的另外两种常用表示形式：

三角式 $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ (1.1.5)

指数式 $z=\rho e^{i\theta}$ (1.1.6)

通常将复数 z 位于 $0\leqslant\theta<2\pi$ 范围内的辐角定义为**辐角主值**，记为 $\arg z$. 复数的辐角与辐角主值之间的关系可表示为

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2n\pi,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots\tag{1.1.7}$$

需要注意的是，不同教材对复数辐角主值范围的定义可能存在差异，也有一些教材将辐角主值范围定义为 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 或 $-\pi\leqslant\theta<\pi$. 模和辐角主值分别相等可作为两个非零复数相等的充要判据.

复数的辐角主值可利用反正切函数计算. 但应注意，实反正切函数的值域范围是 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，与辐角主值的值域范围并不相同，因此通常需要表示为分段函数形式，如

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0\ \text{且}\ y>0\\ \pi+\arctan\dfrac{y}{x}, & x<0\\ 2\pi+\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0\ \text{且}\ y<0\end{cases}\tag{1.1.8}$$

也可以不用分段函数，表示成稍复杂一些的形式

$$\arg z=\pi-2\arctan\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}\tag{1.1.9}$$

以上两式对 $x=0$ 或 $y=0$ 等特殊情况不适用，但此时复数 z 位于虚轴或实轴上，其辐角可以直接写出.

在复变函数论中，常将**无穷远点**也当成一个特殊的复数，记为 ∞，并规定 ∞ 的

模大于任何给定正数，而辐角无意义. 复平面$\mathbb{C}$与无穷远点∞的并集称为**扩充复平面**，用$\overline{\mathbb{C}}$表示.

复数具有与实数类似的基本运算性质. 在复数域中，加法和乘法的结合律、交换律以及乘法对加法的分配律等基本运算律均得以保持. 两个复数的四则运算结果仍为复数，其具体结果可用代数式表示为

加法　$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2) \tag{1.1.10}$$

减法　$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2) \tag{1.1.11}$$

乘法　$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1) \tag{1.1.12}$$

除法　$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq0) \tag{1.1.13}$$

其中，复数乘法和除法的结果用指数式表示将更为简洁

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \tag{1.1.14}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)} \tag{1.1.15}$$

复数z的n次幂z^n和n次根式$\sqrt[n]{z}$的结果(n为整数)可表示为

***n*次幂**　$$z^n=\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{1.1.16}$$

***n*次根式**　$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}} \tag{1.1.17}$$

在以上复数的四则运算及n次幂的计算中，辐角θ的多值性并不会对结果造成影响，θ增减$2k\pi$后结果保持不变. 但是在复数的n次根式$\sqrt[n]{z}$的计算中，不难验证，辐角θ加减$2k\pi$将会导致结果发生改变. 令$\theta=\arg z+2k\pi$，当k取$0,1,2,\cdots,n-1$时，共可得到n个不同的结果，具体可表示为

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z+2k\pi}{n}},\quad k=0,1,2,\cdots,n-1 \tag{1.1.18}$$

实际上，n次根式也可看成幂指数为$1/n$的幂运算. 对于更一般的情况，幂指数还可以是无理数甚至复数，此时结果又会如何？

例 1.1　计算i^{i}.

解　由于复数i的辐角为$\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$，所以i的指数式可表示为

$$\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}$$

将i^{i}底数中的i写成指数式，即可得到

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}}=\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}\right]^{\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}-2n\pi}$$

其中，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

本题中，虽然幂运算的底数和指数均为纯虚数，但最后结果却是实数，并且有无穷多个取值.

下面我们简单讨论将复数作进一步推广的可能性. 从形式上看，复数可以看成

实数的一种二元推广. 若要进一步推广，一种自然的想法是引入三元数，即形如 $z=a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}$ 的数. 其中存在两个不同虚数单位 i 和 j，并满足 $\mathrm{ii}=\mathrm{jj}=-1$，而 a,b,c 均为实数. 但是，人们发现这种三元数的基本运算无法自洽，因此这一推广并不成功.

这一点不难证明. 考虑两个三元数 i 和 j 的乘积 ij，其结果应该也是一个三元数，因此必然可表示为三元数的一般形式

$$\mathrm{ij}=a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j} \tag{1.1.19}$$

另外，由于

$$\mathrm{j}=-(-1)\cdot\mathrm{j}=-\mathrm{iij} \tag{1.1.20}$$

将式(1.1.19)代入式(1.1.20)，可得

$$\mathrm{j}=-\mathrm{i}(a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j})=-a\mathrm{i}+b-c\mathrm{ij} \tag{1.1.21}$$

简单化简即可得到 ij 的另一形式

$$\mathrm{ij}=\frac{b}{c}-\frac{a}{c}\mathrm{i}-\frac{1}{c}\mathrm{j} \tag{1.1.22}$$

比较式(1.1.19)及式(1.1.22)两式右边 j 前面的系数，可得 $c=-\frac{1}{c}$，但显然这在实数范围内是无解的，与前面定义中系数 a,b,c 均为实数的要求相矛盾. 因此以上三元数推广不成立.

实数集和复数集都构成**数域**. 简单地讲，数域就是满足交换律、结合律以及分配律等基本运算规则的封闭数集. 实际上，人们已经证明了复数域是最大的数域，在保持数域的基本运算性质的情况下无法进一步扩大，因此三元数的失败也就不足为奇了. 但是，如果允许放弃部分基本运算性质，如乘法交换律，则可能构造得到比复数更大的数集. 其中最著名的例子是所谓**四元数**.

类似于复数引入虚数单位 i，四元数中引入了 3 个不同的虚数单位 i，j，k. 四元数的标准形式可以表示为

$$z=a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k} \tag{1.1.23}$$

其中，系数 a,b,c,d 均为实数，并满足

$$\mathrm{ii}=\mathrm{jj}=\mathrm{kk}=-1 \quad 及 \quad \mathrm{ijk}=-1 \tag{1.1.24}$$

四元数的加法运算仍满足结合律和交换律，但乘法运算则仅满足结合律而无法满足交换律. 以上四元数运算规则式(1.1.24)中已经蕴涵了这一点，以 jk 和 kj 为例，容易证明两者的结果并不相等.

一方面，从等式 $\mathrm{ijk}=-1$ 出发，两边左乘 i 可得

$$\mathrm{i}\cdot\mathrm{ijk}=-\mathrm{i} \tag{1.1.25}$$

对上式左边化简可得 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{ijk}=(\mathrm{ii})\mathrm{jk}=-\mathrm{jk}$，因此得到

$$\mathrm{jk}=\mathrm{i} \tag{1.1.26}$$

另一方面，对等式 ijk＝－1 两边右乘 kj 可得

$$\mathrm{ijk}\cdot(\mathrm{kj})=-\mathrm{kj} \tag{1.1.27}$$

上式左边可化简为 $\mathrm{ijk}\cdot(\mathrm{kj})=\mathrm{i}(\mathrm{j}(\mathrm{kk})\mathrm{j})=-\mathrm{i}(\mathrm{jj})=\mathrm{i}$，因此得到

$$\mathrm{kj}=-\mathrm{i} \tag{1.1.28}$$

对比式(1.1.26)和式(1.1.28)可知，jk 和 kj 结果确实不相等，而是相差一个负号，即 jk＝－kj. 同理还可证明 ij＝－ji，ki＝－ik.

目前四元数已在许多领域获得应用，关于四元数的详细讨论超出了本书的范围，感兴趣的读者可参阅有关专著.

1.2 复变函数

在引入复数概念后，函数的概念也可以自然地推广至复数域，从而得到**复变函数**. 复变函数的定义和实函数是类似的，只不过自变量和函数值都可以取复值. 设 E 是复平面上的一个复数集，如果对于 E 中的每一个元素 z，有一个或多个复数 w 与其对应，就称 w 是 z 的复变函数，记为

$$w=f(z) \tag{1.2.1}$$

其中，E 为复变函数 $f(z)$ 的**定义域**.

若复变函数 $f(z)$ 的实部和虚部分别为 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$，则有

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y) \tag{1.2.2}$$

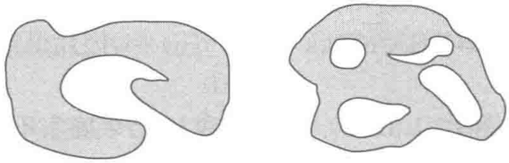
也就是说，复变函数形式上总可以归结为两个二元实函数的线性组合.

根据复变函数的定义，一般情况下其定义域可以是复平面上的任意点集. 但是后面将看到，如果需要进一步定义导数以及解析性等概念，则函数的定义域需要满足一定条件. 此时我们要求复变函数的定义域不能是一般的点集，而必须为一定的**区域**. 这里所说的区域也是复平面上一种点集，但需要同时满足以下两个条件：①全部由内点组成；②整体具有连通性.

从直观角度理解，区域应具有二维的性质，并且不含边界，因此由复平面上离散的点以及曲线所构成的各种点集都不是区域. 在区域中允许存在孔洞，内部存在孔洞的区域被称为**复连通区域**，反之则称为**单连通区域**. 区域与自身边界线的并集称为**闭区域**. 复数的邻域也是一个区域，通常将复平面上以 z_0 为圆心、以 δ 为半径的圆形区域称为 z_0 的 **δ-邻域**.

图 1.2(a)是一个典型的单连通区域，而图 1.2(b)则是一个复连通区域. 单连通区域只有外边界线，而复连通区域的边界线可以分为内边界线和外边界线两类. 区域的边界线还可进一步定义方向. 如果当观察者沿着边界线行进时区域总是位于观察者的左边，这样的方向就被定义为边界线的**正方向**. 单连通区域边界线的正方向对应于逆时针方向，而复连通区域外边界线正方向对应于逆时针方向，内边界

线正方向则对应顺时针方向.



(a) (b)

图 1.2

各种常见的初等函数均可推广到复数域,成为复变函数.下面就对此问题进行讨论.

指数函数 e^z 是一个十分基本的初等函数,首先就考虑这一函数的复变推广问题,导出该函数的实部和虚部表达式.利用指数函数幂的可加性可得

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \tag{1.2.3}$$

其中,e^x 是一个实指数函数,而 e^{iy}项中的指数为虚数,需要进一步化简.

假设 e^{iy}的实部和虚部分别为 $u(y)$和 $v(y)$,即

$$e^{iy} = u(y) + iv(y) \tag{1.2.4}$$

上式两边对 y 求导并略作化简可得

$$e^{iy} = v'(y) - iu'(y) \tag{1.2.5}$$

比较式(1.2.4)和式(1.2.5),令两式右边的实部和虚部分别相等,即得

$$u(y) = v'(y) \tag{1.2.6}$$

$$v(y) = -u'(y) \tag{1.2.7}$$

对式(1.2.7)两边求导并代入式(1.2.6)可得 $u''(y) = -u(y)$.又因为 $y=0$ 时 e^{iy}等于 1,代入式(1.2.4)和式(1.2.5)可得 $u(0)=1, u'(0)=0$,所以解得 $u(y)=\cos y$.同理,还可解得 $v(y)=\sin y$.将 $u(y)$和 $v(y)$的解代入式(1.2.4)即得

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \tag{1.2.8}$$

这正是欧拉公式.该式也可通过幂级数方法得到(详见第 3 章).将欧拉公式代入式(1.2.3)即得

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \tag{1.2.9}$$

此式可作为复变指数函数 e^z 的定义式.由此容易看出,指数函数 e^z 是一个周期为 $2\pi i$ 的周期函数.由于等式(1.2.9)右边 e^x,$\cos y$ 以及 $\sin y$ 均单值,所以可知指数函数 e^z 是一个单值函数.此外,指数函数也常表示为 $\exp z$ 的形式.

各种复三角函数和双曲函数均可通过指数函数进行定义.例如:

正弦函数 $$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{1.2.10}$$

余弦函数　$\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$　(1.2.11)

双曲正弦　$\sinh z=-i\sin iz=\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}$　(1.2.12)

双曲余弦　$\cosh z=\cos iz=\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}$　(1.2.13)

由以上定义式不难看出,复变正(余)弦函数具有 2π 的周期性,这和实变情况相同. 而复变双曲正(余)弦函数则具有 $2\pi i$ 的周期性,相应的实双曲函数则在其定义域内没有周期性.

值得注意的是,自变量取复值可能使函数的性质发生很大变化. 例如,实变正(余)弦函数的绝对值总是小于或等于 1,而复变正(余)弦函数的绝对值则可以大于 1. 这可从以下表达式看出:

$$|\sin z|=\frac{1}{2}\sqrt{e^{2y}+e^{-2y}+2(\sin^2 x-\cos^2 x)} \tag{1.2.14}$$

$$|\cos z|=\frac{1}{2}\sqrt{e^{2y}+e^{-2y}+2(\cos^2 x-\sin^2 x)} \tag{1.2.15}$$

实数域中各种熟知的恒等式大多可直接推广到复数域,但实数域中的不等式则通常不能推广到复数域,例如,三角恒等式 $\sin^2 z+\cos^2 z=1$,无论 z 为实数还是复数均成立;而不等式 $|\sin^2 z|\leqslant 1$,当 z 为任意实数时恒成立,当 z 为一般复数时则不再成立. 此外需要注意的是,实数域中带有绝对值的恒等式通常也不能推广到复数域,例如,三角恒等式 $|\sin^2 z|+|\cos^2 z|=1$ 在复数域就并不成立. 一般来说,只有解析函数构成的恒等式才能推广到复数域,而绝对值操作会破坏函数的解析性.

例 1.2　写出以下复变函数的实部和虚部:(1) $\dfrac{1}{z-1}(z\neq 1)$;(2) $\cos z$.

解　(1) $\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{x+iy-1}=\dfrac{(x-1)-iy}{(x-1)^2+y^2}=\dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2}-i\dfrac{y}{(x-1)^2+y^2}$,因此其实部和虚部分别为 $u=\dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$ 及 $v=-\dfrac{y}{(x-1)^2+y^2}$.

(2)
$$\begin{aligned}\cos z&=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{e^{i(x+yi)}+e^{-i(x+yi)}}{2}=\frac{e^{ix-y}+e^{-ix+y}}{2}\\&=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\cos x+i\,\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}\sin x\\&=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y\end{aligned}$$

可知其实部为 $u=\cos x\cosh y$,虚部为 $v=-\sin x\sinh y$.

本例题的第(2)小题也可用三角公式方法求解. 三角公式 $\cos(a+b)=\cos a\cos b-$

$\sin a\sin b$，当 a,b 为复数时仍然成立，因此

$$\cos z=\cos(x+\mathrm{i}y)=\cos x\cos\mathrm{i}y-\sin x\sin\mathrm{i}y$$

将 $\cos\mathrm{i}y=\cosh y$，$\sin\mathrm{i}y=\mathrm{i}\sinh y$ 代入即可得到

$$\cos z=\cos x\cosh y-\mathrm{i}\sin x\sinh y$$

例 1.3　求解方程 $\sin z=a$，其中 a 为大于 1 的实数.

解　令 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$，由 $\sin z=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}=a$ 可得关于 w 的一元二次方程

$$w^2-2\mathrm{i}aw-1=0$$

由之解得 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=w=\mathrm{i}(a\pm\sqrt{a^2-1})$.

此处求 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ 还有另一种方法，可利用三角恒等式 $\sin^2 z+\cos^2 z=1$，将 $\sin z=a$ 代入求出 $\cos z$ 的值，然后将 $\cos z$ 和 $\sin z$ 组合得到 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$.

根据两复数相等的原则，等式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\mathrm{i}(a\pm\sqrt{a^2-1})$ 两边应模相等，辐角相等或相差 $2n\pi$.

容易看出，等式右边的模和辐角主值分别为 $a\pm\sqrt{a^2-1}$ 和 $\dfrac{\pi}{2}$.

再看等式左边，由于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}=\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$，可知其模和辐角分别为 e^{-y} 和 x，所以可得

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}=a\pm\sqrt{a^2-1}\\[2mm] x=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\end{cases}$$

由于等式 $\mathrm{e}^{-y}=a\pm\sqrt{a^2-1}$ 两边均大于 0，两边取对数得 $y=-\ln(a\pm\sqrt{a^2-1})$，将 x,y 的表达式代入 $z=x+\mathrm{i}y$ 即得

$$z=\frac{\pi}{2}+2n\pi-\mathrm{i}\ln(a\pm\sqrt{a^2-1}),\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

值得注意的是，由于 $\ln(a-\sqrt{a^2-1})=-\ln(a+\sqrt{a^2-1})$，所以本例题的答案存在多种等价的表示形式. 例如，也可写为

$$z=\frac{\pi}{2}+2n\pi\pm\mathrm{i}\ln(a+\sqrt{a^2-1}),\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

将指数函数以及三角函数推广到复数域后所得到的复变函数仍为单值函数，而有一些初等函数推广到复数域后则将变为多值函数，如根式函数、对数函数以及反三角函数. 首先看**对数函数**，利用实对数函数和辐角函数，可将复变对数函数 $\mathrm{Ln}z$ 表示为

$$\mathrm{Ln}z=\mathrm{Ln}(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=\mathrm{Ln}\rho+\mathrm{Ln}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\ln|z|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}z \tag{1.2.16}$$

由辐角函数 $\mathrm{Arg}z$ 的多值性，可知 $\mathrm{Ln}z$ 是一个具有无穷多值的多值函数. 其主

值 $\ln z$ 可表示为

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z \tag{1.2.17}$$

实对数函数的自变量不能取负值，而复变对数函数则无此限制. 从式(1.2.17)可知，若 a 为负实数，则 $\mathrm{Ln}a$ 的主值为 $\ln a = \ln|a| + \pi\mathrm{i}$.

形如 $f(z)=z^{\alpha}$ 的复变函数被称为**一般幂函数**，其中 α 为复常数，利用代数恒等式 $a^{b}=\mathrm{e}^{b\mathrm{Ln}a}$ 可将其化为指数函数进行处理

$$z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha\mathrm{Ln}z} \tag{1.2.18}$$

由 $\mathrm{Ln}z$ 的多值性，可知一般幂函数在通常情况下也是多值函数，并且有无穷多个取值. 但是，当 α 为整数时，一般幂函数退化为整次幂函数，或简称**幂函数**，此时为单值函数. 此外，**根式函数** $\sqrt[n]{z}$ 也可看成一般幂函数的特例，对应于 $\alpha=1/n$ 的情况(n 为大于 1 的整数)，该函数是一个 n 值函数.

形如 $f(z)=\alpha^{z}$ 的复变函数被称为**一般指数函数**，其中 α 为复常数，同样可利用代数恒等式 $a^{b}=\mathrm{e}^{b\mathrm{Ln}a}$ 将其化为指数函数进行处理

$$\alpha^{z} = \mathrm{e}^{z\mathrm{Ln}\alpha} \tag{1.2.19}$$

由于指数中的 $\mathrm{Ln}\alpha$ 存在多值性，所以严格来说，一般指数函数也是多值的. 但是此多值性与 z 无关，通常只需要对指数中的 $\mathrm{Ln}\alpha$ 取主值，即可将其化为单值函数进行处理.

各种复变反三角函数及反双曲函数也可以用对数函数 $\mathrm{Ln}z$ 进行表示，例如：

反正弦函数　$$\mathrm{Arcsin}z = -\mathrm{i}\mathrm{Ln}\left(\mathrm{i}z + \sqrt{1-z^2}\right) \tag{1.2.20}$$

反余弦函数　$$\mathrm{Arccos}z = -\mathrm{i}\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) \tag{1.2.21}$$

反正切函数　$$\mathrm{Arctan}z = -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right) \tag{1.2.22}$$

显然，这些复变函数也均为多值函数.

在复变函数论中，常会遇到多值函数在两点的函数值之差问题. 若 $f(z)$ 为多值函数，先规定函数在某 $z=z_0$ 点的取值 $f(z_0)$，然后令 z 沿着一条连续路径从 z_0 移动到 z_1 点，则由函数的连续性可以确定函数在 z_1 点的取值 $f(z_1)$. 由于 z 沿不同路径到达 z_1 点得到的 $f(z_1)$ 值并不一定相同，所以多值函数的两点函数值之差 $f(z_1)-f(z_0)$ 一般与路径有关，甚至即使在 $z_0=z_1$ 时，$f(z_1)-f(z_0)$ 的结果也不一定为 0. 也就是说，当自变量 z 从 z_0 出发沿着某闭合路径回到 z_0 点后，$f(z)$ 的函数值也可能发生变化. 这里问题的关键在于闭合路径中是否包含多值函数的支点. 若多值函数的自变量 z 绕某点一圈后函数值并不复原，就称该点为多值函数的**支点**. 特别地，如果自变量 z 绕行某支点 $1\sim n-1$ 圈，函数值均不复原，而绕行 n 圈后函数值复原，则称该点为 $n-1$ 阶支点.

以根式函数和对数函数为例，根式函数 $\sqrt[n]{z}$ 存在两个支点，分别为 $z=0$ 和 $z=$

∞点,均为 $n-1$ 阶支点. 对数函数 $\text{Ln}z$ 的支点同样位于 $z=0$ 和 $z=\infty$点,但无论绕行支点多少圈函数值均不复原,因此这两个支点均为 $\text{Ln}z$ 的无穷阶支点.

支点对于多值函数具有重要的意义. 如果绕行路径中没有包含任何支点,那么回到起点后的函数值就必然复原. 需要注意的是,如果绕行路径中同时包含了多个支点,则各支点的作用可能相互抵消,导致回到出发点后函数值复原. 多值函数在支点处的函数值也存在多种可能,既可能单值也可能多值,还可能为无穷大或者不存在.

下面以多值函数 $f(z)=\text{Ln}z$ 为例,考察自变量 z 沿图 1.3 中的两条闭合路径分别绕行一圈后的函数值变化情况.

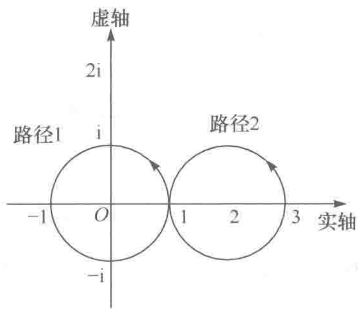


图 1.3

首先考虑路径 1 的情况,因为 $f(z)=\text{Ln}z=\ln|z|+\text{i}\text{Arg}z$,而在路径 1 上 $|z|=1$,因此 $\ln|z|$ 恒为 0,所以路径 1 上恒有 $f(z)=\text{i}\text{Arg}z$. 若令 $z=1$ 为起点,在开始时将 $z=1$ 处 z 的辐角取为 $\text{Arg}z=0$,则对应函数值为 $f(1)=0$. 在绕行过程中,根据连续性可确定其辐角在单调增加,回到出发点后辐角变为 $\text{Arg}z=2\pi$,则此时 $z=1$ 处函数值就变成了 $f(1)=2\pi\text{i}$,与出发时相比函数值发生了改变.

再考虑路径 2 的情况, 因 $f(z)=\ln|z|+\text{i}\text{Arg}z$,令 $z=3$ 为起点,在开始时刻取 $\text{Arg}z=0$,在绕行过程中 z 的辐角将出现一个先增大再减小最后又增大的反复过程,最后回到出发点后辐角不变,因此 $\text{Arg}z$ 的值仍为 0. 而 $\ln|z|$ 是一个单值函数,回到出发点后函数值不变,因此这一绕行过程中 $f(z)$的函数值并不会改变.

通过分析函数的支点可以得到相同结论. 在路径 1 中包含 $\text{Ln}z$ 的支点 $z=0$ 点,因此绕行一圈后函数值会发生变化;而路径 2 中不包含函数的任何支点,因此绕行一圈后函数值不会发生变化.

例 1.4 找出以下多值函数的支点并确定其阶数:

(1) $f(z)=\sqrt{(z-1)(z-2)}$; (2) $f(z)=\sqrt{\dfrac{(z-1)(z-2)}{z-3}}$.

解 (1) 该函数的多值性来源于根式函数,让根式函数的宗量$(z-1)(z-2)$

等于 0 或者∞的点是函数 $f(z)$的可能支点，对应于 $z=1, z=2$ 和 $z=\infty$.

在 $z=1$ 的无穷小邻域上，$f(z)\sim\sqrt{1-z}$，故 $z=1$ 是其一阶支点.

在 $z=2$ 的无穷小邻域上，$f(z)\sim\sqrt{z-2}$，故 $z=2$ 是其一阶支点.

在 $z=\infty$的邻域上，$f(z)\sim\sqrt{z^2}=z$ 或 $-z$. 这是两个单值函数，因此 $z=\infty$不是 $f(z)$的支点.

(2) 让根式函数的宗量$\dfrac{(z-1)(z-2)}{z-3}$等于 0 或者∞的点是函数 $f(z)$的可能支点，对应于 $z=1, z=2, z=3$ 和 $z=\infty$.

在 $z=1$ 的无穷小邻域上，$f(z)\sim\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{z-1}$，故 $z=1$ 是其一阶支点.

在 $z=2$ 的无穷小邻域上，$f(z)\sim\sqrt{2-z}$，故 $z=2$ 是其一阶支点.

在 $z=3$ 的无穷小邻域上，$f(z)\sim\sqrt{\dfrac{2}{z-3}}$，故 $z=3$ 是其一阶支点.

在 $z=\infty$的邻域上，$f(z)\sim\sqrt{\dfrac{z^2}{z}}=\sqrt{z}$，故 $z=\infty$也是其一阶支点.

1.3　复变导数与柯西-黎曼方程

设 $w=f(z)$是复平面某区域 D 上的单值函数（或多值函数的单值分支），若对于 D 上的某点 z，极限

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \tag{1.3.1}$$

存在且和 Δz 趋向于 0 的方式无关，则称此极限值为 $f(z)$在 z 点的**导数**.

表面上看，复变导数的定义和实函数的导数定义形式类似. 但在实函数的导数定义中，由于自变量为实数，所以 Δx 只可能在实轴上沿正负两个方向趋于 0. 而在复变导数定义中，Δz 可以沿着复平面上任意复杂的曲线路径趋于 0. 因此，虽然两者形式类似，但实际上复变可导性的要求更加严格. 只有在极限值和 Δz 趋于 0 的路径完全无关时，才能认为复变函数在该点可导. 这对函数的性质是一个很高的要求，下面我们就来分析什么样的复变函数才能满足这样的要求.

为了使问题简化，首先考虑两个比较特殊的情况，即让 Δz 分别沿平行实轴和平行虚轴方向趋于 0，然后对比两者分别会得到怎样的结果.

首先看 Δz 沿平行实轴方向趋向于 0 的情况.

令 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，在此极限过程中 $\Delta y\equiv 0$，因此 $\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y=\Delta x$，有