



全国高等学校自动化专业系列教材
教育部高等学校自动化专业教学指导分委员会牵头规划



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

Optimal Control 最优控制

钟宜生 编著
Zhong Yisheng

清华大学出版社





全国高等学校自动化专业系列教材
教育部高等学校自动化专业教学指导分委员会牵头规划



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

Optimal Control
最优控制

钟宜生 编著
Zhong Yisheng

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要介绍最优控制理论的基础知识,包括最优控制系统设计的基本方法,即变分法、极小值原理和动态规划;介绍最优控制几类典型问题的求解,包括时间最短控制和燃料最省控制、线性二次型最优调节控制、线性最优跟踪控制;简要介绍 H_2 和 H_∞ 控制理论及基于信号补偿的鲁棒最优控制方法。

本书可作为自动化专业研究生的教科书,也可作为其他与控制相关专业的研究生以及科技人员的参考书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

最优控制/钟宜生编著.--北京:清华大学出版社,2015

全国高等学校自动化专业系列教材

ISBN 978-7-302-41368-4

I. ①最… II. ①钟… III. ①最优控制—高等学校—教材 IV. ①O232

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 209439 号

责任编辑:王一玲

封面设计:常雪影

责任校对:焦丽丽

责任印制:宋 林

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课 件 下 载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 装 者:北京鑫海金澳胶印有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:175mm×245mm 印 张:16.5 字 数:399千字

版 次:2015年12月第1版 印 次:2015年12月第1次印刷

印 数:1~2000

定 价:39.00元

《全国高等学校自动化专业系列教材》编审委员会

顾问 (按姓氏笔画):

王行愚(华东理工大学)	冯纯伯(东南大学)
孙优贤(浙江大学)	吴启迪(同济大学)
张嗣瀛(东北大学)	陈伯时(上海大学)
陈翰馥(中国科学院)	郑大钟(清华大学)
郑南宁(西安交通大学)	韩崇昭(西安交通大学)

主任委员: 吴澄(清华大学)

副主任委员: 赵光宙(浙江大学) 萧德云(清华大学)

委员 (按姓氏笔画):

王雄(清华大学)	方华京(华中科技大学)
史震(哈尔滨工程大学)	田作华(上海交通大学)
卢京潮(西北工业大学)	孙鹤旭(河北工业大学)
刘建昌(东北大学)	吴刚(中国科技大学)
吴成东(沈阳建筑工程学院)	吴爱国(天津大学)
陈庆伟(南京理工大学)	陈兴林(哈尔滨工业大学)
郑志强(国防科技大学)	赵曜(四川大学)
段其昌(重庆大学)	程鹏(北京航空航天大学)
谢克明(太原理工大学)	韩九强(西安交通大学)
褚健(浙江大学)	蔡鸿程(清华大学出版社)
廖晓钟(北京理工大学)	戴先中(东南大学)

工作小组(组长): 萧德云(清华大学)

(成员): 陈伯时(上海大学) 郑大钟(清华大学)
田作华(上海交通大学) 赵光宙(浙江大学)
韩九强(西安交通大学) 陈兴林(哈尔滨工业大学)
陈庆伟(南京理工大学)

(助理): 郭晓华(清华大学)

责任编辑: 王一玲(清华大学出版社)

出版说明

《全国高等学校自动化专业系列教材》



为适应我国对高等学校自动化专业人才培养的需要,配合各高校教学改革 的进程,创建一套符合自动化专业培养目标和教学改革要求的新型自动化专业系列教材,“教育部高等学校自动化专业教学指导分委员会”(简称“教指委”)联合了“中国自动化学会教育工作委员会”、“中国电工技术学会高校工业自动化教育专业委员会”、“中国系统仿真学会教育工作委员会”和“中国机械工业教育协会电气工程及自动化学科委员会”四个委员会,以教学创新为指导思想,以教材带动教学改革为方针,设立专项资助基金,采用全国公开招标方式,组织编写出版了一套自动化专业系列教材——《全国高等学校自动化专业系列教材》。

本系列教材主要面向本科生,同时兼顾研究生;覆盖面包括专业基础课、专业核心课、专业选修课、实践环节课和专业综合训练课;重点突出自动化专业基础理论和前沿技术;以文字教材为主,适当包括多媒体教材;以主教材为主,适当包括习题集、实验指导书、教师参考书、多媒体课件、网络课程脚本等辅助教材;力求做到符合自动化专业培养目标、反映自动化专业教育改革方向、满足自动化专业教学需要;努力创造使之成为具有先进性、创新性、适用性和系统性的特色品牌教材。

本系列教材在“教指委”的领导下,从 2004 年起,通过招标机制,计划用 3~4 年时间出版 50 本左右教材,2006 年开始陆续出版问世。为满足多层次、多类型的教学需求,同类教材可能出版多种版本。

本系列教材的主要读者群是自动化专业及相关专业的大学生和研究生,以及相关领域和部门的科学工作者和工程技术人员。我们希望本系列教材既能为在校大学生和研究生的学习提供内容先进、论述系统和适于教学的教材或参考书,也能为广大科学工作者和工程技术人员知识更新与继续学习提供适合的参考资料。感谢使用本系列教材的广大教师、学生和科技工作者的热情支持,并欢迎提出批评和意见。

《全国高等学校自动化专业系列教材》编审委员会

2005 年 10 月于北京

自动化学科有着光荣的历史和重要的地位,20世纪50年代我国政府就十分重视自动化学科的发展和自动化专业人才的培养。五十多年来,自动化科学技术在众多领域发挥了重大作用,如航空、航天等,两弹一星的伟大工程就包含了许多自动化科学技术的成果。自动化科学技术也改变了我国工业整体的面貌,不论是石油化工、电力、钢铁,还是轻工、建材、医药等领域都要用到自动化手段,在国防工业中自动化的作用更是巨大的。现在,世界上有很多非常活跃的领域都离不开自动化技术,比如机器人、月球车等。另外,自动化学科对一些交叉学科的发展同样起到了积极的促进作用,例如网络控制、量子控制、流媒体控制、生物信息学、系统生物学等学科就是在系统论、控制论、信息论的影响下得到不断的发展。在整个世界已经进入信息时代的背景下,中国要完成工业化的任务还很重,或者说我们正处在后工业化的阶段。因此,国家提出走新型工业化的道路和“信息化带动工业化,工业化促进信息化”的科学发展观,这对自动化科学技术的发展是一个前所未有的战略机遇。

机遇难得,人才更难得。要发展自动化学科,人才是基础、是关键。高等学校是人才培养的基地,或者说人才培养是高等学校的根本。作为高等学校的领导和教师始终要把人才培养放在第一位,具体对自动化系或自动化学院的领导和教师来说,要时刻想着为国家关键行业和战线培养和输送优秀的自动化技术人才。

影响人才培养的因素很多,涉及教学改革方方面面,包括如何拓宽专业口径、优化教学计划、增强教学柔性、强化通识教育、提高知识起点、降低专业重心、加强基础知识、强调专业实践等,其中构建融会贯通、紧密配合、有机联系的课程体系,编写有利于促进学生个性发展、培养学生创新能力的教材尤为重要。清华大学吴澄院士领导的《全国高等学校自动化专业系列教材》编审委员会,根据自动化学科对自动化技术人才素质与能力的需求,充分吸取国外自动化教材的优势与特点,在全国范围内,以招标方式,组织编写了这套自动化专业系列教材,这对推动高等学校自动化专业发展与人才培养具有重要的意义。这套系列教材的建设有新思路、新机制,适应了高等学校教学改革与发展的新形势,立足创建精品教材,重视实

践性环节在人才培养中的作用,采用了竞争机制,以激励和推动教材建设。在此,我谨向参与本系列教材规划、组织、编写的老师致以诚挚的感谢,并希望该系列教材在全国高等学校自动化专业人才培养中发挥应有的作用。

吴恪迪 教授

2005年10月于教育部

《全国高等学校自动化专业系列教材》编审委员会在对国内外部分大学有关自动化专业的教材做深入调研的基础上,广泛听取了各方面的意见,以招标方式,组织编写了一套面向全国本科生(兼顾研究生)、体现自动化专业教材整体规划和课程体系、强调专业基础和理论联系实际的系列教材,自2006年起将陆续面世。全套系列教材共50多本,涵盖了自动化学科的主要知识领域,大部分教材都配置了包括电子教案、多媒体课件、习题辅导、课程实验指导书等立体化教材配件。此外,为强调落实“加强实践教学,培养创新人才”的教学改革思想,还特别规划了一组专业实验教程,包括《自动控制原理实验教程》、《运动控制实验教程》、《过程控制实验教程》、《检测技术实验教程》和《计算机控制系统实验教程》等。

自动化科学技术是一门应用性很强的学科,面对的是各种各样错综复杂的系统,控制对象可能是确定性的,也可能是随机性的;控制方法可能是常规控制,也可能需要优化控制。这样的学科专业人才应该具有什么样的知识结构,又应该如何通过专业教材来体现,这正是“系列教材编审委员会”规划系列教材时所面临的问题。为此,设立了《自动化专业课程体系结构研究》专项研究课题,成立了由清华大学萧德云教授负责,包括清华大学、上海交通大学、西安交通大学和东北大学等多所院校参与的联合研究小组,对自动化专业课程体系结构进行深入的研究,提出了按“控制理论与工程、控制系统与技术、系统理论与工程、信息处理与分析、计算机与网络、软件基础与工程、专业课程实验”等知识板块构建的课程体系结构。以此为基础,组织规划了一套涵盖几十门自动化专业基础课程和专业课程的系列教材。从基础理论到控制技术,从系统理论到工程实践,从计算机技术到信号处理,从设计分析到课程实验,涉及的知识单元多达数百个、知识点几千个,介入的学校50多所,参与的教授120多人,是一项庞大的系统工程。从编制招标要求、公布招标公告,到组织投标和评审,最后商定教材大纲,凝聚着全国百余名教授的心血,为的是编写出版一套具有一定规模、富有特色的、既考虑研究型大学又考虑应用型大学的自动化专业创新型系列教材。

然而,如何进一步构建完善的自动化专业教材体系结构?如何建设基础知识与最新知识有机融合的教材?如何充分利用现代技术,适应现代大学生的接受习惯,改变教材单一形态,建设数字化、电子化、网络化等多元

形态、开放性的“广义教材”？等等，这些都还有待我们进行更深入的研究。

本套系列教材的出版，对更新自动化专业的知识体系、改善教学条件、创造个性化的教学环境，一定会起到积极的作用。但是由于受各方面条件所限，本套教材从整体结构到每本书的知识组成都可能存在许多不当甚至谬误之处，还望使用本套教材的广大教师、学生及各界人士不吝批评指正。

吴澄 院士

2005年10月于清华大学



本书介绍确定性系统最优控制理论的基础知识。首先介绍最优控制系统设计的三个基本方法,即变分法、极小值原理和动态规划,并应用这些方法求解一些典型最优控制问题,包括时间最短控制、燃料最省控制、线性二次型最优调节控制、线性最优跟踪控制问题,然后对 H_2 和 H_∞ 最优控制方法作简单介绍,最后介绍基于信号补偿的鲁棒最优控制方法。附录简要介绍矩阵微分的基本结论。

在介绍变分法基本原理的基础上,对最优控制问题的基本情形进行分析、推导,给出最优解应满足的条件,并讨论各种约束情形下的最优控制问题。对于极小值原理,首先在控制域为闭集的假设下,介绍一类简单最优控制问题的基本结论,并给出解释性证明,然后将这些结论应用于处理一般最优控制问题。对于动态规划方法,针对离散时间动态系统,推导出基本递推公式;对于连续时间动态系统,介绍 HJB 方程的推导过程。

对于时间最短和燃料最省控制问题,利用极小值原理分别给出 Bang-Bang 控制原理和 Bang-off-Bang 控制原理,并针对二阶积分器系统说明最优解的求解过程。

对于线性二次型最优调节器问题,利用动态规划方法推导出基于 Riccati 矩阵方程的最优解,并讨论最优解的存在性和唯一性。对于无限时间线性二次型最优调节系统的闭环稳定性和稳定余量进行分析。最后介绍一种通过选取加权矩阵指定线性二次型最优调节系统闭环主导极点的方法。

利用关于线性二次型最优调节器问题的结论,讨论最优伺服、最优跟踪和最优模型跟随问题,分别给出针对连续时间系统和离散时间系统的求解方程。

将线性二次型性能指标转换为相应的频域性能指标,从而导出线性定常系统 H_2 和 H_∞ 控制问题的描述,并简要介绍这些问题的基本求解方法。

最后考虑受控对象存在满足匹配条件的不确定性的情形,介绍鲁棒线性二次型最优调节器、鲁棒线性二次型最优动态输出反馈调节器和鲁棒线性二次型最优伺服控制器的设计方法。

本书前 9 章,可作为 32 学时的研究生课程的教学内容。全书可用于 48 学时或者 64 学时教学,前者可略去部分理论证明的课堂讲授。

对于书中的错误和失妥之处,敬请读者教正。

第 1 章 最优控制问题的提出和数学描述	1
1.1 最优控制问题举例	1
1.2 最优控制问题的数学描述	5
习题 1	7
第 2 章 函数极值的基本理论	8
2.1 向量函数的无条件极值	8
2.2 等式约束下的向量函数极值	10
2.3 不等式约束下的向量函数极值	14
习题 2	19
第 3 章 最优控制中的变分法	20
3.1 变分法基本原理	20
3.2 无终端约束的最优控制	26
3.3 终端固定约束的最优控制	29
3.4 终端等式约束的最优控制	30
3.5 终端时刻自由的最优控制	33
3.6 内点等式约束的最优控制	37
3.7 离散时间系统最优控制	41
习题 3	45
第 4 章 极小值原理	47
4.1 定常系统极小值原理	47
4.2 时变系统极小值原理	53
4.3 不等式过程约束下的最优控制	59
4.4 积分过程约束下的最优控制	61
4.5 离散时间系统极小值原理	64
习题 4	69
第 5 章 动态规划	70
5.1 Bellman 最优性原理	70

5.2	离散系统最优控制的动态规划求解	71
5.3	连续系统最优控制的动态规划求解	79
5.4	三种经典方法的比较	81
	习题 5	82
第 6 章	时间最短和燃料最省控制	84
6.1	时间最短控制与 Bang-Bang 控制原理	84
6.2	线性定常系统时间最短控制	86
6.3	线性定常系统燃料最省控制	93
6.4	时间与燃料综合最优控制	97
	习题 6	102
第 7 章	线性二次型最优调节器设计	104
7.1	最优调节器问题	104
7.2	连续时间系统有限时间最优状态调节器	106
7.3	连续时间系统无限时间最优状态调节器	112
7.3.1	线性时变系统的情形	112
7.3.2	线性定常系统的情形	114
7.3.3	无限时间最优状态调节系统的稳定性	116
7.4	指定衰减速度的最优状态调节器	121
7.5	利用状态观测器的最优状态调节器	122
7.5.1	全维状态观测器的情形	122
7.5.2	降维状态观测器的情形	124
7.6	离散时间系统最优状态调节器	125
7.6.1	离散时间系统有限时间最优调节器	125
7.6.2	离散时间系统无限时间最优调节器	127
	习题 7	130
第 8 章	最优状态调节系统的鲁棒稳定性	133
8.1	最优状态调节器的频域公式	133
8.2	最优状态调节系统的稳定余量	134
8.3	最优状态调节系统对非线性摄动的鲁棒稳定性	136
	习题 8	138
第 9 章	最优控制系统的渐近特性和加权矩阵的选择	139
9.1	单输入最优控制系统闭环极点的渐近特性	139
9.2	多输入最优控制系统闭环极点的渐近特性	140

9.3 线性最优调节器的加权矩阵选取	141
习题 9	145
第 10 章 线性最优跟踪控制器设计	147
10.1 轨迹跟踪问题的三种类型	147
10.2 连续时间系统最优跟踪控制器	148
10.2.1 连续系统最优伺服控制器	148
10.2.2 连续系统最优跟踪控制器	154
10.2.3 连续系统最优模型跟随控制器	157
10.3 离散时间系统最优跟踪控制器	165
10.3.1 离散系统最优伺服控制器	166
10.3.2 离散系统最优跟踪控制器	170
10.3.3 离散系统最优模型跟随控制器	174
习题 10	181
第 11 章 H_2 和 H_∞ 控制理论	182
11.1 引论	182
11.2 H_2 和 H_∞ 控制问题的描述	186
11.3 线性定常系统 H_2 控制	190
11.3.1 状态反馈 H_2 控制	190
11.3.2 输出反馈 H_2 控制	191
11.3.3 H_2 控制器设计举例	191
11.4 线性定常系统 H_∞ 控制	197
11.4.1 状态反馈 H_∞ 次优控制	197
11.4.2 输出反馈 H_∞ 次优控制	198
11.4.3 H_∞ 最优控制	199
11.4.4 H_∞ 控制器设计举例	199
11.4.5 H_2 控制与 H_∞ 控制特性比较	204
习题 11	208
第 12 章 鲁棒最优控制器设计	209
12.1 不确定受控对象描述	209
12.2 鲁棒线性二次型最优调节器设计	209
12.3 鲁棒线性二次型最优动态输出反馈调节器设计	214
12.4 鲁棒线性二次型最优伺服控制器设计	222
12.5 鲁棒最优控制器设计举例	223
12.6 扩展与应用	240

习题 12	241
附录 A 矩阵微分与向量函数的 Taylor 展开	242
A.1 对标量的微分	242
A.2 对向量的微分	242
A.3 对矩阵的微分	244
A.4 复合函数的情形	244
A.5 向量函数的 Taylor 展开	245
参考文献	246

在古典控制理论中,控制系统的设计要求通常是,在保证闭环系统稳定的同时,对于典型的输入信号,受控对象输出具有一定的静态和动态响应特性。此类要求对于设计恒值调节系统和随动系统是有效的。但是,在许多控制问题中,依据这样的设计要求所得到的系统不能满足实际的控制需求。对一些问题,依据古典控制理论甚至无从进行控制系统设计。本章将举例说明在不同的领域具有各种类型的最优控制问题,并介绍最优控制问题的一般描述。

1.1 最优控制问题举例

例 1.1 最小耗能充电问题

考虑图 1.1 所示电路,欲外加控制电压使得在给定时间内将电容充电到给定电压,同时使得在电阻上消耗的电能最少。

以 $u_i(t)$ 和 $u_C(t)$ 分别表示控制电压和电容两端的电压, $i(t)$ 表示充电电流,而电阻值和电容值分别为 R 和 C 。则

$$C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{u_i(t) - u_C(t)}{R} = i(t)$$

即

$$\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}u_C(t) + \frac{1}{RC}u_i(t) \quad (1.1.1)$$

电阻上消耗的功率为

$$w_R(t) = \frac{[u_i(t) - u_C(t)]^2}{R}$$

假设充电起始时间和终止时间分别为 t_0 和 t_f , 电容电压的起始值和终止值分别为 V_0 和 V_f 。则问题描述为: 对于系统式(1.1.1), 给定 t_0 、 t_f 、 $u_C(t_0)$ ($=V_0$) 和 V_f , 求 $u_i(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, 使得 $u_C(t_f) = V_f$, 且电阻上消耗的电能

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{[u_i(t) - u_C(t)]^2}{R} dt$$

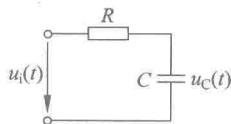


图 1.1 充电电路

达到最小。

例 1.2 交通信号控制问题

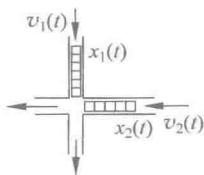


图 1.2 交叉路口信号控制

考虑两条单行车道的交叉路口, 两条单行车道分别称为车道 1 和车道 2。如图 1.2 所示, 在 t 时刻, 两条车道在交叉路口处等待车辆的排列长度分别为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$, 到达交叉路口的车辆流量分别为 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$, 两条车道的最大流量分别为 a_1 和 a_2 , 两个方向的绿色信号灯亮的时间长度分别为 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 。假设信号灯切换周期一定, 记为 T ; 汽车加速所需时间与黄色信号灯亮的时间长度为一定, 合

记为 y 。则

$$g_1(t) + g_2(t) + y = T$$

以 $u(t)$ 表示车道 1 上在一个信号切换周期内的平均车辆流量

$$u(t) = a_1 \frac{g_1(t)}{T}$$

而车道 2 上的平均车辆流量则为

$$a_2 \frac{g_2(t)}{T} = -\frac{a_2}{a_1} u(t) + a_2 \left(1 - \frac{y}{T}\right)$$

两条车道在交叉路口处等待车辆的排列长度满足如下方程

$$\dot{x}_1(t) = v_1(t) - u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = v_2(t) + \frac{a_2}{a_1} u(t) - a_2 \left(1 - \frac{y}{T}\right)$$

假设对车道 1 上的绿色信号灯亮的时间长度 $g_1(t)$ 有一定的范围限制, 对应于 $u(t)$ 为如下约束

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}$$

对于给定的初始条件 $x_1(t_0)$ 和 $x_2(t_0)$, 要设计控制 $u(t)$, $t \in [0, T]$, 使得 $x_1(T) = 0$ 和 $x_2(T) = 0$, 并使得车辆等待代价(或总时间)

$$J = \int_0^T [x_1(t) + x_2(t)] dt$$

最小。

例 1.3 太空返回舱软着陆问题

太空返回舱在返回地球时, 要求着陆的速度尽可能小(图 1.3)。为此, 除了在返回阶段使用降落伞减速之外, 在最后阶段还需启动发动机, 将着陆速度减少到容许的范围内; 同时, 为了降低费用, 要求减速发动机在着陆过程中消耗燃料尽可能少。

为了简化问题的描述, 将返回舱视为一个质点, 假设其在着陆过程的最后阶段在地面的垂线上运动, 则返回舱的运动方程为

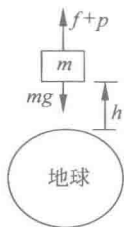


图 1.3 软着陆问题

$$m(t) \frac{dv(t)}{dt} = p(t) + f(h, v) - m(t)g$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = v(t)$$

$$\frac{dm(t)}{dt} = -\alpha p(t)$$

其中, $m(t)$ 是返回舱的质量, 包括返回舱自重和所携带燃料质量; $h(t)$ 为返回舱到地面的距离; $v(t)$ 为返回舱的运动速度, 垂直向上为正; $f(h, v)$ 为空气阻力; g 为重力加速度, 设为常数; α 为发动机的燃烧系数, 是一常数; $p(t)$ 为发动机推力, 是要设计的控制变量。

假设返回舱发动机在 $t=0$ 时刻点火, 且假设

$$v(0) = v_0, \quad h(0) = h_0, \quad m(0) = M_s + M_e$$

其中, M_s 为返回舱自身的质量; M_e 为所携带燃料总质量。

假设返回舱的软着陆时刻为 t_f , 则要求

$$v(t_f) = 0, \quad h(t_f) = 0$$

发动机的推力 $p(t)$ 恒为正, 且最大值为 p_M , 即

$$0 \leq p(t) \leq p_M$$

燃料最省返回舱软着陆问题可以描述为: 在上述推力约束下, 设计发动机推力函数 $p(t)$, 使得返回舱从初始状态 $[h(0) \quad v(0)]^T$ 转移到终止状态 $[h(t_f) \quad v(t_f)]^T$, 并且消耗的燃料最少, 即使得

$$J = m(t_f)$$

达到最大。

例 1.4 太空拦截问题

考虑太空目标的拦截问题, 假设太空目标以一定的速度飞行, 拦截器的推力大小一定, 推力方向可以操纵, 太空目标和拦截器在一平面内运动。欲在时间区间 $[t_0, t_f]$ 内控制拦截器推力方向, 对太空目标实施拦截。太空目标与拦截器的相对运动的简化动力学方程为

$$\ddot{x}(t) = f \cos[\alpha(t)]$$

$$\ddot{y}(t) = f \sin[\alpha(t)]$$

其中, $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别是太空目标和拦截器的相对位置的坐标; 拦截器的质量假设为 1; f 是拦截器推力幅值; $\alpha(t)$ 是拦截器推力方向角。

希望设计拦截器推力方向角 $\alpha(t)$ 的控制策略, 实现拦截, 即

$$x(t_f) = 0, \quad y(t_f) = 0$$

并且使得拦截时间

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$$

最短。