

# 复变函数与积分变换 同步训练

SYNCHRONOUS TRAINING OF THE COMPLEX  
VARIABLE FUNCTION AND INTEGRAL TRANSFORM

包革军 邢宇明 主编



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等学校教材配套

# 复变函数与积分变换 同步训练

SYNCHRONOUS TRAINING OF THE COMPLEX  
VARIABLE FUNCTION AND INTEGRAL TRANSFORM

包革军 邢宇明 主编

 哈尔滨工业大学出版社  
HITP HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内 容 提 要

本书是与复变函数与积分变换课程配套的同步训练题,书中习题形式新颖,有代表性.  
本书适合高等院校数学系学生及数学爱好者使用.

### 图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换同步训练/包革军,邢宇明主  
编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2015.8  
ISBN 978-7-5603-5560-3

I. ①复… II. ①包…②邢… III. ①复变函数-高  
等学校-习题集②积分变换-高等学校-习题集  
IV. ①O174.5-44②O177.6-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 189780 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 杜莹雪

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨久利印刷有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 6.25 字数 148 千字

版 次 2015 年 8 月第 1 版 2015 年 8 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-5560-3

定 价 10.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

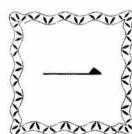
◎  
目  
录

复变函数与积分变换同步训练习题一	1
复变函数与积分变换同步训练习题二	7
复变函数与积分变换同步训练习题三	17
复变函数与积分变换同步训练习题四	27
复变函数与积分变换同步训练习题五	37
复变函数与积分变换同步训练习题六	51
复变函数与积分变换同步训练习题七	65
复变函数与积分变换同步训练习题八	79

习题二

- ① 指出下列各函数中  $x$  的存在范围，并求其导数。
- (1)  $y = \sqrt{x}$  (2)  $y = \sqrt{x+1}$  (3)  $y = \sqrt{x-1}$  (4)  $y = \sqrt{x+2}$
- (5)  $y = \sqrt{x+1}$  (6)  $y = \sqrt{x-1}$  (7)  $y = \sqrt{x+2}$  (8)  $y = \sqrt{x-1}$
- (9)  $|\arg z| < \pi/2$
- (1)  $\frac{1}{\sqrt{z+1}}$  (2)  $\frac{1}{\sqrt{z-1}}$  (3)  $\frac{(z+1)(z-1)}{z}$  (4)  $(z^2-4)^{-1/2}$

# 复变函数与积分变换同步训练



② 如果  $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 + 2}$ ，求  $f(z)$  在  $z = i$  和  $z = -i$  处的留数。

班级: \_\_\_\_\_

学号: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_

心得 体会 拓广 疑问

① 求下列复数的实部、虚部、共轭复数、模与辐角.

(1)  $\frac{1}{3+2i}$ ;

(2)  $\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$ ;

(3)  $\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$ ;

(4)  $i^8 - 4i^{21} + i$ .

复变函数与积分变换同步训练



② 如果等式  $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i} = 1+i$  成立, 试求实数  $x, y$  为何值.

姓名: \_\_\_\_\_  
学号: \_\_\_\_\_  
班级: \_\_\_\_\_

心得 体会 拓广 疑问

③ 指出下列各题中点  $z$  的存在范围, 并作图.

(1)  $|z - i| = 6;$

(2)  $|z + 2i| \geq 1;$

(3)  $\operatorname{Re} z^2 \leq 1;$

(4)  $\operatorname{Re}(i\bar{z}) = 3;$

(5)  $|z + i| = |z - i|;$

(6)  $|z + 3| + |z + 1| = 4;$

(7)  $|1/z| < 3;$

(8)  $\left| \frac{z-3}{z-2} \right| \geq 1;$

(9)  $|\arg z| < \pi/3.$

复变函数论习题一

复变函数论习题一

4 试求下列极限.

$$(1) \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{\bar{z}}{z};$$

$$(2) \lim_{z \rightarrow i} \frac{z\bar{z} + 2z - \bar{z} - 2}{z^2 - 1}.$$

5 证明:  $z$  平面上的直线方程可以写成  $a\bar{z} + \bar{a}z = c$  ( $a$  是非零复常数,  $c$  是实常数).

6 试证:  $\arg z$  ( $-\pi < \arg z \leq \pi$ ) 在负实轴上(包括原点)不连续, 除此之外在  $z$  平面上处处连续.



心得 体会 拓广 疑问

7 设  $z_k, w_k \in \mathbf{C}, k=1, 2, \dots, n$ . 证明 Lagrange 恒等式

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k w_k \right|^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n |w_k|^2 \right) - \sum_{1 \leq k < j \leq n} |z_k \bar{w}_j - z_j \bar{w}_k|^2$$

并由此得出 Cauchy 不等式

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k w_k \right|^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n |w_k|^2 \right)$$

班级: \_\_\_\_\_

学号: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_

年 月 日

8 设  $|z_0| < 1$ . 证明:

若  $|z| = 1$ , 则

$$\left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right| = 1$$

若  $|z| < 1$ , 则:

$$(1) \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right| < 1;$$

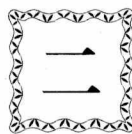
$$(2) \frac{||z| - |z_0||}{1 - |z_0||z|} \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right| \leq \frac{|z| + |z_0|}{1 + |z_0||z|}.$$

证明: 设  $z = re^{i\theta}$ ,  $z_0 = \rho e^{i\phi}$ , 则  $|z| = r$ ,  $|z_0| = \rho$ . 于是

证明: 设  $z = re^{i\theta}$ ,  $z_0 = \rho e^{i\phi}$ , 则  $|z| = r$ ,  $|z_0| = \rho$ . 于是

① 试证下列函数在平面上处处不解析：  
 $(1) f(z) = x^2 + iy^2$   
 $(2) f(z) = x^2 + iy^2 + iz^2$   
 $(3) f(z) = x^2 + iy^2 + iz^2 + iz$

# 复变函数与积分变换同步训练



$(4) f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{z^n - 1}{z^n + 1} \right)$

① 试判断下述命题的真假, 并举例说明

- (1) 如果  $f(z)$  存在, 那么  $f(z)$  在点  $z_0$  解析;
- (2) 如果  $f(z)$  在  $z_0$  连续, 那么  $f(z)$  存在;
- (3) 实部与虚部满足柯西-黎曼方程的复变函数是解析函数;
- (4) 实部与虚部均为区域  $D$  内的调和函数的复变函数是  $D$  内的解析函数.

班级: \_\_\_\_\_

学号: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_

心得 体会 拓广 疑问

**1** 下列函数在何处可导? 何处解析?

$$(1) f(z) = x^2 - iy;$$

$$(2) f(z) = xy^2 + ix^2y;$$

$$(3) f(z) = \frac{x+y}{x^2+y^2} + i \frac{x-y}{x^2+y^2};$$

$$(4) f(z) = \operatorname{Im} z.$$

: 姓名

: 学号

: 班级

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

**2** 试证下列函数在  $z$  平面上处处不解析.

(1)  $f(z) = x + y$ ;

(2)  $f(z) = \operatorname{Re} z$ ;

(3)  $f(z) = \frac{1}{|z|}$ .

**3** 试判断下述命题的真假, 并举例说明.

(1) 如果  $f'(z_0)$  存在, 那么  $f(z)$  在点  $z_0$  解析;

(2) 如果  $f(z)$  在点  $z_0$  连续, 那么  $f'(z_0)$  存在;

(3) 实部与虚部满足柯西 - 黎曼方程的复变函数是解析函数;

(4) 实部与虚部均为区域  $D$  内的调和函数的复变函数是  $D$  内的解析函数.

心得 体会 拓广 疑问

④ 证明:如果函数  $f(z) = u + iv$  在区域  $D$  内解析,并满足下列条件之一,那么  $f(z)$  是常数.

- (1)  $f(z)$  恒取实值;
- (2)  $\overline{f(z)}$  在  $D$  内解析;
- (3)  $|f(z)|$  在  $D$  内是一个常数;
- (4)  $\arg f(z)$  在  $D$  内是一个常数.

心得 体会 拓广 疑问

5 验证下列函数是调和函数, 并求出以  $z = x + iy$  为自变量的解析函数  $w = f(z) = u + iv$ .

(1)  $v = \arctan \frac{y}{x}, x > 0;$

如果  $f(z) = u + iv$  是  $z$  的解析函数, 证明:

(1)  $\left(\frac{\partial}{\partial x} |f(z)|\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} |f(z)|\right)^2 = |f'(z)|^2$

(2)  $u = e^x (y \cos y + x \sin y) + x + y, f(0) = i;$

心得 体会 拓广 疑问

$$(3) u = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2);$$

$$(4) v = \frac{y}{x^2 + y^2}, f(2) = 0.$$



心得 体会 拓广 疑问

**6** 如果  $f(z) = u + iv$  是一解析函数, 试证:

- (1)  $\overline{if(z)}$  也是解析函数;
- (2)  $-u$  是  $v$  的共轭调和函数.

**7** 如果  $f(z) = u + iv$  是  $z$  的解析函数, 证明:

(1)  $\left(\frac{\partial}{\partial x} |f(z)|\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} |f(z)|\right)^2 = |f'(z)|^2$ ;

(2)  $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = |f'(z)|^2$ .

年 月 日