An Introduction to the Distinguishing Colorings of Graphs

图的可区别染色引论

陈祥恩　编著

中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

An Introduction to the Distinguishing Colorings of Graphs

图的可区别染色引论

陈祥恩　编著

中国科学技术出版社
·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

图的可区别染色引论 / 陈祥恩编著. —北京：中国科学技术出版社，2015. 11
ISBN 978-7-5046-7016-8

Ⅰ. ①图… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①图论 Ⅳ. ①O157.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第273806号

责任编辑　王晓义
责任校对　何士如
封面设计　孙雪骊
责任印制　张建农

出　　版　中国科学技术出版社
发　　行　科学普及出版社发行部
地　　址　北京市海淀区中关村南大街16号
邮　　编　100081
发行电话　010-62103130
传　　真　010-62179148
投稿电话　010-62103347
网　　址　http://www.cspbooks.com.cn

开　　本　787mm×1092mm　1/16
字　　数　260千字
印　　张　15.5
版　　次　2015年11月第1版
印　　次　2015年11月第1次印刷
印　　刷　北京京华虎彩印刷有限公司

书　　号　ISBN 978-7-5046-7016-8/O·185
定　　价　39.00元

前　言

1985 年, Harary F 等人开始研究图的点可区别一般边染色; Chartrand G, Jacobson M, Lehel J 等人于 1986 年研究图的可允许的一般边染色（即顶点被关联边的颜色之和可区别的一般边染色，所使用的颜色是从1开始的相继的正整数）所需要的颜色的最少数目即图的非正规强度; Burris A C, Schelp R H 于 1993年和 Černý J, Horňák M, Soták R 于 1995年分别独立地提出图的点可区别正常边染色, 取得了许多重要的成果. 特别是2002年以来, 张忠辅教授相继提出图的邻点可区别正常边染色，邻点可区别正常全染色, 点可区别正常全染色等新的图染色概念之后, 图的可区别染色受到越来越多学者的重视.

本书是作者在多年给研究生讲授“图的可区别染色”课程所写讲稿的基础上整理而成的. 图的可区别染色不是一种染色, 而是许多种染色的总称. 本书就是介绍各种可区别染色, 包括点可区别正常边染色(第 1 章)、邻点可区别正常边染色(第 2 章)、点可区别正常全染色(第 3 章)、邻点可区别正常全染色(第 4 章)、$D(d)$–点可区别正常边染色(第 5 章前 3 节)、$D(d)$–点可区别正常全染色(第 5 章后 3 节)、点强可区别正常全染色(第 6 章第 1 节)、邻点强可区别正常全染色(第 6 章第 2 节)、邻和可区别正常边染色(第 6 章第 3 节)、邻和可区别正常全染色(第 6 章第 4 节)、邻点可区别无圈边染色(第 6 章第 5 节)、可区别的未必正常的染色(第 6 章第 6 节给出了分类). 书中介绍的都是可区别染色方面的重要成果或者作者非常感兴趣的素材. 许多结论的证明过程融入了作者的理解与体会.

本书第 6 章第 6 节(即本书最后一节)所涉及的边染色及全染色都是未必正常的, 仅对可区别的未必正常的染色做了分类, 而其余各章节所涉及的边染色及全染色都是正常的.

本书每一章都有该章所涉及的参考文献.

人们研究可区别染色主要围绕以下几个方面:

第一, 确定一些图类的某种染色的色数(即确定对一些图类进行某种染色所需的最少颜色的数目);

第二, 研究某类图是否满足关于某种染色的猜想(我们可以看到几乎每种可区别染色都有相应的猜想);

第三, 给出某种染色的色数的上界;

第四, 研究某类图的某种色数随着阶增大的变化趋势;

第五, 研究某种染色的某个特定问题, 比如寻找子图的某种可区别色数不超过其母图的相应色数的条件. 而对于普通的正常点(边, 全)色数来说, 子图的色数一定不超过相应的母图的色数. 而对于可区别染色来说, 情况并非如此.

在研究可区别染色理论时, 人们采用的方法通常有: 构造具体染色、组合分

析、反证法与极端原理结合、数学归纳法、加点加边法、共一色法、色集事先分配法、填装法、放电法、概率方法、利用组合零点定理、利用某个群中的元素为颜色来染色, 等等.

我们会看到, 尽管关于各种可区别染色, 国内外学者已有非常丰富的成果, 但是许多猜想并没有完全得到解决(除 $D(d)$–VDEC 猜想及 $D(d)$–VDTC 猜想均已有反例).

图的可区别染色理论是图论的一个分支. 而图论既属于组合数学, 也属于运筹学. 图论组合问题有一个特点, 问题的表述相当容易(就像四色问题的表述一样, 一位中学生就会明白是怎么回事), 但是解决起来相当难. 希望对可区别染色理论感兴趣的学者能创新方法, 开拓思路, 以推动可区别染色理论的进一步发展.

如果对图的可区别染色感兴趣的初学者及相关研究生觉得本书还有可取之处, 那么笔者就满足了.

笔者于 2003 年在张忠辅教授的指导下开始了图的可区别染色的研究. 尽管先师已于2010年7月作古, 但是他提出的有关可区别染色的若干问题及猜想已被许多学者所研究, 他的思想及方法启示着后人, 他的坚持不懈地进行科学研究的风范永远是我学习的榜样. 我从事可区别染色的研究, 得益于张忠辅教授的指导, 因此作者对先师的感激发自肺腑.

西北师范大学数学与统计学院的领导对本书编写工作给予了极大的支持; 同时北京大学许进教授、兰州大学张和平教授、南开大学李学良教授、巴黎十一大李皓教授、山东大学吴建良教授、中国科学院闫桂英教授、浙江师范大学王维凡教授、暨南大学樊锁海教授、西北师范大学姚兵教授和姚海元副教授、兰州交通大学李敬文教授和文飞博士等对本书编写给予了极大的鼓励与帮助; 在书稿的Latex录入过程中, 我的研究生高毓平、胡志涛、魏甲静、张芳红、郭靖、郭虹园、黄小佳、师瑾等同学帮了我很大的忙. 在此对上述领导、专家、同学一并表示衷心感谢! 本书的编写与出版得到了国家自然科学基金(项目批准号: 61163037)的资助, 作者非常感谢!

限于水平, 尽管作者做了很大努力, 但是书中定有许多不足之处, 敬请读者批评指正.

陈祥恩

2015 年 6 月于西北师范大学

目 录

第1章　点可区别正常边染色

§1.1　基本概念及结论

在没有特别说明时, 本书中仅考虑有限、无向、简单图.

设 G 是一个图. 图 G 的 k–边染色是指 k 种颜色对图 G 的全体边的一个分配. 图 G 的一个 k–边染色称为是正常的, 如果相邻的边接受不同的颜色.

设 φ 是图 G 的正常的 k–边染色. 对 G 的任意一个顶点 x, 用 $S_\varphi(x)$ 或不引起混淆时用 $S(x)$ 表示与 x 关联的全体边在 φ 下的颜色构成的集合, 称之为点 x 在 φ 下的色集合; $S_\varphi(x)$ 在全体颜色构成的集合中的补集合记为 $\overline{S}_\varphi(x)$, 称之为点 x 在 φ 下的补色集. 如果对 G 的两个顶点 u, v, 有 $S_\varphi(u) \neq S_\varphi(v)$, 即 u 与 v 在 φ 下具有不同的色集合, 那么 u 与 v 称为在 φ 下可区别. 如果图 G 的任意两个不同顶点在 φ 下均可区别, 即 $\forall u, v \in V(G)$, $u \neq v$, 都有与 u 所关联的边的色的集合 $S_\varphi(u)$ 异于与 v 所关联的边的色的集合 $S_\varphi(v)$, 那么称 φ 为 G 的 k–点可区别正常边染色或 k–强染色或 k–obs–染色(简记为 k–VDPEC 或 k–VDP 边染色).

对 G 进行点可区别正常边染色所需要的最少颜色数称为 G 的点可区别正常边色数(或强色数或可观测性, observability), 记为 $\chi'_s(G)$, 或 $\widetilde{\chi}'(G)$, 或 $vdi(G)$, 或 $obs(G)$.

G 的使用了 k 种色的全体点可区别正常边染色的集合记为 $Obs_k(G)$.

1) 图 G 存在点可区别正常边染色当且仅当 G 无孤立边, 且最多有一个孤立点. (这样的图, 即无孤立边、且最多有一个孤立点的图, 称为 vdec 图.)

2) 图 G 有 k -VDPEC $\Longrightarrow$ 当 $l \geqslant k$ 时, G 有 l–VDPEC.

对任意的整数 a, b, 我们用 $[a, b]$ 表示不小于 a 且不大于 b 的所有整数的集合.

当图 G 不是 vdec 图时, 规定 $\chi'_s(G) = \infty$, 这时 G 不存在VDPEC.

当图 G 是含边的 vdec 图时, $\chi'_s(G)$ 是一个确定的正整数.

3) $\chi'_s(G) = \lim\limits_{l\to\infty} \max\{k \in [1, l] \mid \forall j \in [0, k-1], Obs_j(G) = \varnothing\}$.

4) 对 vdec 图 G, 有 $\chi'_s(G) \geqslant \Delta(G)$, 且 $\binom{\chi'_s(G)}{i} \geqslant n_i$, $\delta \leqslant i \leqslant \Delta$, 其中 n_i 表示图 G 中度为 i 的顶点的个数.

我们通常用 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$（或者在不致引起混淆时用 δ 和 Δ ）分别表示

图 G 的最小度和最大度.

5) 对含边的 vdec 图 G, 令

$$\pi(G)=\min\{j \mid \tbinom{j}{i}\geqslant n_i,\ \delta\leqslant i\leqslant\Delta\},$$

则 $\chi'_s(G)\geqslant\pi(G)$.

1993年, Burris A C 在其博士论文中提出了点可区别正常边染色的概念[1], 于1997年在参考文献[2]中发表了点可区别正常边染色的成果. 独立地, Černý J, Horňák M, Soták R 等人研究了obs–染色(即点可区别正常边染色)[3, 4]. Burris 与Schelp提出如下两个猜想[2].

猜想 1.1.1 (VDPEC 猜想) 对有边的 vdec 图 G, 有 $\chi'_s(G)=\pi(G)$ 或 $\pi(G)+1$.

猜想 1.1.2 若 G 是 vdec 图, 则 $\chi'_s(G)\leqslant|V(G)|+1$.

猜想1.1.2 于 1999 年被法国学者Bazgan C, Harkat-Benhamdine A, Li Hao 及波兰学者Woźniak M 所证[5], 该上界是可达的. 我们将于本章的第 5 节给出该猜想的证明. 下述命题1.1.3和命题1.1.4来自参考文献[2].

命题 1.1.3 对含边的 vdec 图 G, 有

$$\chi'_s(G)\geqslant\max\{(k!n_k)^{\frac{1}{k}}+\frac{k-1}{2}\mid 1\leqslant k\leqslant\Delta\}.$$

证明 令 $l=\chi'_s(G)$, 有 $\tbinom{l}{k}\geqslant n_k$, $1\leqslant k\leqslant\Delta$. 由于 $\dfrac{l!}{(l-k)!}\geqslant k!n_k$, 且

$$\frac{l+(l-1)+\cdots+(l-k+1)}{k}\geqslant\sqrt[k]{l(l-1)\cdots(l-k+1)},$$

因此

$$l-\frac{1}{k}(1+2+\cdots+(k-1))\geqslant\sqrt[k]{k!n_k}.$$

故 $l\geqslant\sqrt[k]{k!n_k}+\dfrac{1}{2}(k-1)$. □

命题 1.1.4 对 vdec 图 G, 有 $\chi'_s(G)\leqslant|V(G|+\Delta(G)$.

证明 由Vizing 定理, G 有一个正常边染色, 使用了 $\Delta(G)+1$ 种色. 另外再用最多 $|V(G)|-1$ 种新色去替换 G 的某个最大森林(所含边数最多的生成森林) F 的所有边的原来的色, 使 F 的不同边具有不同的新色. 最后得到 G 的点可区别正常边染色. □

例 1.1.5 [2] 设 $k\geqslant2$, 则 $\chi'_s(C_4\bigcup kP_3)=2k$. 这是因为 $\pi(C_4\bigcup kP_3)=\min\{j\mid \tbinom{j}{2}\geqslant k+4,\ \tbinom{j}{1}\geqslant 2k\}=2k$, 并且图1.1.1给出了 $C_4\bigcup kP_3$ 的一个 $2k$–VDPEC. 设 e 是 $C_4\bigcup kP_3$ 中的圈的一条边. 由于 $\pi((C_4-e)\bigcup kP_3)=\min\{j\mid \tbinom{j}{2}\geqslant k+2,\ \tbinom{j}{1}\geqslant 2k+2\}=2k+2$, 且图1.1.2给出了 $(C_4-e)\bigcup kP_3$ 的一个 $(2k+2)$–VDPEC, 因此 $\chi'_s((C_4-e)\bigcup kP_3)=2k+2$.

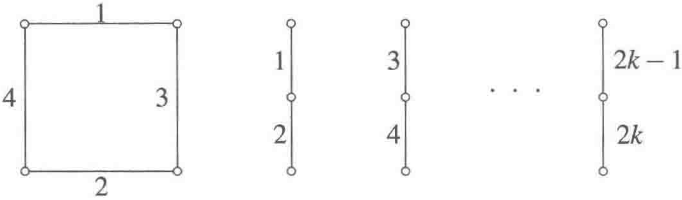

图1.1.1　$C_4 \bigcup kP_3$ 的 $2k$–VDPEC
Fig 1.1.1　$2k$–VDPEC of $C_4 \bigcup kP_3$

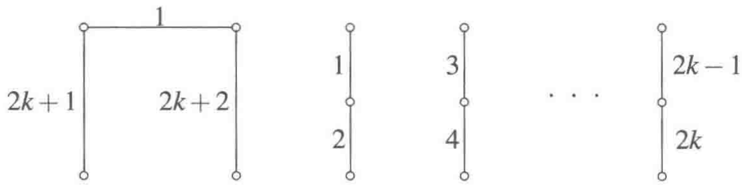

图1.1.2　$(C_4 - e) \bigcup kP_3$ 的 $(2k+2)$–VDPEC
Fig 1.1.2　$(2k+2)$–VDPEC of $(C_4 - e) \bigcup kP_3$

这说明，删去一条边后，图的点可区别正常边色数会增加. 当然也说明子图的点可区别正常边色数有可能大于母图的点可区别正常边色数.

定理 1.1.6 [2] (i) $\chi_s'(K_{1,\,n}) = n$，其中 $n \geqslant 2$;

(ii) $\chi_s'(K_{m,\,n}) = n+1$，其中 $n > m \geqslant 2$;

(iii) $\chi_s'(K_{n,\,n}) = n+2$，其中 $n \geqslant 2$.

证明 (i) $\pi(K_{1,\,n}) = n$，而 $K_{1,\,n}$ 的每一个正常边染色均是点可区别的.

(ii) $\pi(K_{m,\,n}) = \min\{t \mid \binom{t}{n} \geqslant m,\ \binom{t}{m} \geqslant n\} = n+1$.

设 $V(K_{m,\,n}) = \{u_i | i \in [1,\, m+n]\}$，$E(K_{m,\,n}) = \{u_iu_j \mid i \in [1,\, m],\ j \in [m+1,\, m+n]\}$，$u_iu_j$ 表示连接顶点 u_i 与 u_j 的边. 考虑如下定义的映射:

$$\varphi : E(K_{m,\,n}) \longrightarrow [1,\, n+1],$$
$$\varphi(u_iu_j) \equiv i+j \pmod{n+1},\ \varphi(u_iu_j) \in [1,\, n+1].$$

容易验证 φ 是 $K_{m,\,n}$ 的 $(n+1)$–VDPEC.

(iii) $n \geqslant 2$, $\pi(K_{n,\,n}) = \min\{t \mid \binom{t}{n} \geqslant 2n\} = n+2$. 令 $V(K_{n,\,n}) = \{u_i | i \in [1,\, 2n]\}$，$E(K_{n,\,n}) = \{u_iu_j \mid i \in [1,\, n],\ j \in [n+1,\, 2n]\}$. 定义映射 $\psi : E(K_{n,\,n}) \longrightarrow [1,\, n+2]$ 如下:

$$\psi(u_iu_j) \equiv i+j \pmod{n+2},\ \psi(u_iu_j) \in [1,\, n+2];$$
$$\psi(u_nu_j) \equiv j-1 \pmod{n+2},\ \psi(u_nu_j) \in [1,\, n+2],\ \text{其中 } i \in [1,\, n-1],\ j \in [n+1,\, 2n].$$

在 ψ 下, 各点的色集合在 $[1, n+2]$ 中的补集为

$$\overline{S}_\psi(u_1)=\{n, n+1\}, \overline{S}_\psi(u_2)=\{n+1, n+2\}, \overline{S}_\psi(u_3)=\{n+2, 1\};$$
$$\overline{S}_\psi(u_i)=\{i-3, i-2\}, i=4, 5, \cdots, n-1;$$
$$\overline{S}_\psi(u_n)=\{n-2, n-1\}, \overline{S}_\psi(u_{n+1})=\{n-1, n+1\}, \overline{S}_\psi(u_{n+2})=\{n, n+2\};$$
$$\overline{S}_\psi(u_{n+3})=\{n+1, 1\}, \overline{S}_\psi(u_{n+4})=\{n+2, 2\};$$
$$\overline{S}_\psi(u_j)=\{j-n-4, j-n-2\}, j=n+5, n+6, \cdots, 2n.$$

显然在 ψ 下, 不同点的色集合是不同的. 所以 ψ 是 $K_{n,n}$ 的 $(n+2)$–VDPEC. □

例 1.1.7 由定理1.1.6 可知, 当 $n\geqslant 3$ 时, $\chi_s'(K_{1,n})=n$, $\chi_s'(K_{1,n-1})=n-1$. 这说明删去一条边, 图的点可区别正常边色数可能会降低.

下述命题1.1.8 是显然的.

命题 1.1.8 [2] 设 $e\in E(G)$, $G'=G-e$, 且 G 与 G' 均是 vdec 图, 则 $\chi_s'(G)-1\leqslant \chi_s'(G')\leqslant \chi_s'(G)+2$.

定理 1.1.9 [2, 4] 对 $n\geqslant 3$, 有

$$\chi_s'(K_n)=\begin{cases} n, & n \text{ 是奇数;} \\ n+1, & n \text{ 是偶数.}\end{cases}$$

证明 (i) 设 n 是奇数. 令 $n=2m-1$, $m\geqslant 2$. 显然有 $\chi_s'(K_{2m-1})\geqslant \chi'(K_{2m-1})=2m-1$. 任取 K_{2m-1} 的一个 $(2m-1)$–正常边染色 φ, 所用颜色的集合设为 $[1, 2m-1]$. $\forall i\in[1, 2m-1]$, 用 $\varphi^{-1}(i)$ 表示染了色 i 的边的集合, 则 $|\varphi^{-1}(i)|\leqslant m-1$ (因为 $\varphi^{-1}(i)$ 是 K_{2m-1} 的匹配). 因此

$$\begin{aligned}(2m-1)(2m-2)&=\sum_{v\in V(K_{2m-1})} d(v)=2|E(K_{2m-1})|\\ &=\sum_{i=1}^{2m-1} 2|\varphi^{-1}(i)|\leqslant (2m-1)(2m-2).\end{aligned}$$

因为上述不等式实际上是等式, 所以 $\forall i\in[1, 2m-1]$, $|\varphi^{-1}(i)|=m-1$. 亦即每种颜色 i 恰好在一个点上没有表现, 这说明一旦 $u\neq v$, 就有 $S_\varphi(u)\neq S_\varphi(v)$, 因此 φ 是 K_{2m-1} 的 $(2m-1)$–VDPEC, 且 $\chi_s'(K_{2m-1})=2m-1$.

(ii) 设 n 是偶数. 令 $n=2m$, $m\geqslant 2$. 因 $\pi(K_{2m})=\min\{t \mid \binom{t}{2m-1}\geqslant 2m\}=2m$, 故 $\chi_s'(K_{2m})\geqslant 2m$.

假如 K_{2m} 有 $(2m)$–VDPEC φ. 取定 $v\in V(K_{2m})$, 考虑 $[1, 2m]-S_\varphi(v)$ 中唯一的一种色 i. 因为 K_{2m} 有 $2m$ 个顶点, 表现了色 i 的顶点的个数有偶数个, 所以还有一个点 $y\in V(K_{2m})-\{v\}$, 使 i 没有在 y 上表现, 这说明 $S_\varphi(v)=S_\varphi(y)$, 与 φ 是点可区别相矛盾. 因而 $\chi_s'(K_{2m})\geqslant 2m+1$.

令 $V(K_{2m})=\{u_i|i\in[1, 2m]\}$, K_{2m} 有一个匹配 $M=\{u_{2i-1}u_{2i} \mid i\in[1, \lceil\frac{m}{2}\rceil]\}$. 定义从 $E(K_{2m})=\{u_iu_j \mid 1\leqslant i<j\leqslant 2m\}$ 到 $[1, 2m+1]$ 的映射 ψ 如下: $\psi(e)=$

$2m+1$, $\forall e\in M$; 对任意 $u_iu_j\in E(K_{2m})-M$, 令 $\psi(u_iu_j)\in[1,\,2m]$, 且 $\psi(u_iu_j)\equiv i+j\ (\mathrm{mod}\ 2m)$. 易知 ψ 是 K_{2m} 的正常边染色, 且 $S_\psi(u_i)=[1,\,2m+1]-\{(2i)_{2m},\,h_i\}$, $i=1,\,2,\,\cdots,\,2m$, 这里 $h_i=(2i-(-1)^i)_{2m}$, $i\in[1,\,m]$; $h_{m+1}=1+m[1+(-1)^m]$; $h_j=2m+1$, $j\in[m+2,\,2m]$. 其中 $(p)_q$ 表示模 q 同余于 p 的 $\{1,\,2,\,\cdots,\,q\}=[1,\,q]$ 中的那个数.

因为对每个 $k\in[1,\,2m]$, $(2k)_{2m}$ 是偶数, h_k 是奇数, 所以对 $i,\,j\in[1,\,2m]$, $i<j$, 一旦 $(2i)_{2m}=(2j)_{2m}$, 即 $2i\equiv 2j\ (\mathrm{mod}\ 2m)$, 就有 $2j=2i+2m$, $j=i+m$. 但是当 $i=1$ 时, $h_1=3\neq h_{m+1}\in\{1,\,2m+1\}$, 当 $2\leqslant i\leqslant m$ 时, $h_i\leqslant 2m-1<2m+1=h_{i+m}$. 因此 $S_\psi(u_i)\neq S_\psi(u_j)$. 这说明在 ψ 下, 任二点的色集合不同, 即 ψ 是 K_{2m} 的 $(2m+1)$–VDPEC, 且 $\chi_s'(K_{2m})=2m+1$. □

定理1.1.9的上述证明是文献[4] 中给出的.

定理 1.1.10 [4] 对于 $n(\geqslant 5)$ 阶轮 W, 有 $\chi_s'(W)=n-1$.

证明 因 $\pi(W)=\min\{t\mid \binom{t}{n-1}\geqslant 1,\ \binom{t}{3}\geqslant n-1\}=n-1$, 故 $\chi_s'(W)\geqslant n-1$. 令 $V(W)=\{u_1,\,u_2,\,\cdots,\,u_n\}$, $E(W)=\{u_iu_n\mid i\in[1,\,n-1]\}\bigcup\{u_iu_{i+1}\mid i\in[1,\,n-2]\}\bigcup\{u_{n-1}u_1\}$. 规定从 $E(W)$ 到 $[1,\,n-1]$ 的映射如下: $\varphi\{u_iu_n\}=i$, $\varphi\{u_iu_{(i+1)_{n-1}}\}=(i+2)_{n-1}$, $i\in[1,\,n-1]$. 很显然 φ 为 W 的 $(n-1)$–VDPEC (参见图1.1.3). □

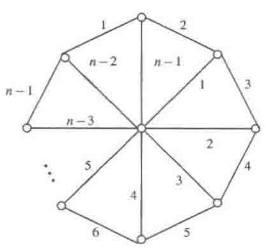

图1.1.3　W 的 $(n-1)$–VDPEC
Fig 1.1.3　$(n-1)$–VDPEC of W

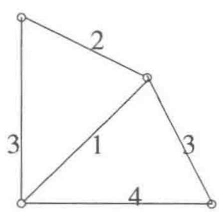

图1.1.4　F_4 的 4–VDPEC
Fig 1.1.4　4–VDPEC of F_4

注: 4 阶轮是4 阶完全图, 其点可区别正常边色数为5. 而4 阶扇的点可区别正常边色数为4(参见图1.1.4).

定理 1.1.11　对于 $n(\geqslant 5)$ 阶扇 F, 有 $\chi_s'(F)=n-1$.

证明 为证 F 有 $(n-1)$–VDPEC, 只需在定理1.1.10 的证明过程给出的带有染色 φ 的轮 W 中去掉 W 的一条边 u_1u_2 及其色即可. □

§1.2　路和圈的点可区别正常边染色

Černý J, Horňák M, Soták R 于 1996年在参考文献[4] 中讨论了路和圈的点可区别正常边染色.

引理 1.2.1 设 I_k 是 k 阶完全图 K_k 中全体开迹的长度构成的集合.

(i) 当 $k(\geqslant 3)$ 为奇数时, $I_k=\{1, 2, \cdots, \binom{k}{2}-1\}$;

(ii) 当 $k(\geqslant 2)$ 为偶数时, $I_k=\{1, 2, \cdots, \frac{k(k-2)}{2}+1\}$.

证明 (i) 设 k 是奇数.

这时 K_k 有闭Euler 迹 T_k, 且所有长为 $\binom{k}{2}$ 的迹均是闭的, 因而 $I_k\subseteq[1, \binom{k}{2}-1]$. 用 $T_k(i, j)$ 表示 T_k 的开始于第 i 条边结束于第 j 条边的子迹. 对 $l\in[1, \binom{k}{2}-1]$, 如果 $T_k(1, l)$ 是开迹, 那么 $l\in I_k$; 如果 $T_k(1, l)$ 是闭迹, $T_k(2, l+1)$ 是开迹, 那么 $l\in I_k$. 故当 k 是奇数时, $I_k=[1, \binom{k}{2}-1]$.

(ii) 设 k 是偶数. 下证 $I_k=[1, \frac{k(k-2)}{2}+1]$.

假如 K_k 的子图 G 的边数多于 $\frac{k(k-2)}{2}+1$, 则 G 至少有3 个度为 $k-1$ 的顶点(否则, $|E(G)|=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} in_i\leqslant\frac{1}{2}[2(k-1)+(k-2)(k-2)]=\frac{1}{2}[k^2-4k+4+2k-2]=\frac{k(k-2)}{2}+1$, 矛盾), G 无Euler 迹, 因而 K_k 的长至少为 $\frac{k(k-2)}{2}+2$ 的迹是不存在的. 因此 $I_k\subseteq[1, \frac{k(k-2)}{2}+1]$.

$I_2=\{1\}$ 是显然的. 下设 $k\geqslant 4$. 考虑 K_k 的一个因子 F, 它含2 个孤立点以及 $\frac{k-2}{2}$ 个分支 K_2, 则 $K_k-E(F)$ 是连通的, 且含 $\frac{k(k-2)}{2}+1$ 条边, 恰有两个奇度点(度为 $k-1$), 因而它有开Euler 迹 T, 对 $\forall l\in[1, \frac{k(k-2)}{2}+1]$, $T(1, l)$ 是 K_k 的开迹或 $T(2, l+1)$ 是 K_k 的开迹, 因而 $l\in I_k$. □

定理 1.2.2 [4] 设 P_n 为 n 阶路, $n\geqslant 3$. 则

$$\chi'_s(P_n)=\min\{2\lceil\frac{\sqrt{8n-7}-1}{4}\rceil+1, 2\lceil\frac{\sqrt{2n-5}+1}{2}\rceil\}.$$

证明 设 $P_n=v_1v_2\cdots v_{n-1}v_n$. 对 $k\geqslant 2$, φ 是 P_n 的 k–VDPEC $\Longleftrightarrow$ φ: $E(P_n)\longrightarrow\{1, 2, \cdots, k\}$ 是 P_n 的正常边染色, 使

$$\{\varphi(v_1v_2)\}=S_\varphi(v_1)\neq S_\varphi(v_n)=\{\varphi(v_{n-1}v_n)\},$$

且

$$\{\varphi(v_{i-1}v_i), \varphi(v_iv_{i+1})\}=S_\varphi(v_i)\neq S_\varphi(v_j)=\{\varphi(v_{j-1}v_j), \varphi(v_jv_{j+1})\},$$

这里 $i, j\in\{2, 3, \cdots, n-1\}$, $i\neq j$.

因而当 $k\geqslant 2$ 时, P_n 存在 k–VDPEC $\Longleftrightarrow$ K_k 有长为 $n-2$ 的开迹(只要让 P_n 在它的一个 k–VDPEC 下的颜色对应于 K_k 中的顶点即可).

对奇数 k, 若 P_n 存在 k–VDPEC, 则由引理 1.2.1 可知, $n-2\in I_k$, $n-2\leqslant\binom{k}{2}-1$,

即 $n-2\leqslant\frac{1}{2}(k^2-k)-1$, $k^2-k-2n+2\geqslant 0$.

$$k\geqslant\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2},\ \frac{k-1}{2}\geqslant\lceil\frac{\sqrt{8n-7}-1}{4}\rceil. \tag{1}$$

对偶数 k, 若 P_n 存在 k–VDPEC, 则由引理 1.2.1 可知, $n-2\leqslant\frac{k(k-2)}{2}+1$, $k^2-2k+2-2n+4\geqslant 0$, $k^2-2k-2n+6\geqslant 0$, $k\geqslant\sqrt{2n-5}+1$,

$$\frac{k}{2}\geqslant\lceil\frac{\sqrt{2n-5}+1}{2}\rceil,\ k\geqslant 2\lceil\frac{\sqrt{2n-5}+1}{2}\rceil. \tag{2}$$

结合(1), (2), 有

$$\begin{aligned}\chi_s'(P_n)&=\min\{k\mid k\geqslant 2,\ P_n\text{ 存在 }k\text{–VDPEC}\}\\&=\min\{k\mid k\geqslant 2,\ K_k\text{ 中有长为 }n-2\text{ 的开迹}\}\\&=\min\{k\mid k\geqslant 2,\ n-2\in I_k\}\\&=\min\{2\lceil\frac{\sqrt{8n-7}-1}{4}\rceil+1,\ 2\lceil\frac{\sqrt{2n-5}+1}{2}\rceil\}.\end{aligned}$$

□

由定理1.2.2 的证明过程易知下述推论成立(在推论1.2.3中, 由(iv)与(ii)可分别推出(i)与(iii)).

推论 1.2.3　设 $k\geqslant 2$, $n\geqslant 3$, 则

(i) 当 k 为奇数时, $\chi_s'(P_n)\geqslant k$ 当且仅当 $n\geqslant\frac{k^2-4k+11}{2}$;

(ii) 当 k 为奇数时, $\chi_s'(P_n)\leqslant k$ 当且仅当 $n\leqslant\frac{k^2-k+2}{2}$;

(iii) 当 k 为偶数时, $\chi_s'(P_n)\geqslant k$ 当且仅当 $n\geqslant\frac{k^2-3k+6}{2}$;

(iv) 当 k 为偶数时, $\chi_s'(P_n)\leqslant k$ 当且仅当 $n\leqslant\frac{k^2-2k+6}{2}$.

可由推论1.2.3推出如下结论.

推论 1.2.4　(a) 设 $k\geqslant 2$, $n\geqslant 3$, 则 $\chi_s'(P_n)=k$ 当且仅当 (i) k 是奇数且 $\frac{k^2-4k+11}{2}\leqslant n\leqslant\frac{k^2-k+2}{2}$; 或者 (ii) k 是偶数且 $\frac{k^2-3k+6}{2}\leqslant n\leqslant\frac{k^2-2k+6}{2}$;

(b) 序列 $\{\chi_s'(P_n)\}_{n=3}^{\infty}$ 是不降的.

定理 1.2.5　对 $n(\geqslant 3)$ 阶路 P_n, 有 $\chi_s'(P_n)=\pi(P_n)$ 或 $\pi(P_n)+1$.

证明　令 $f(n)=\frac{\sqrt{8n-15}+1}{2}$, $g(n)=\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}$, $h(n)=\sqrt{2n-5}+1$. 可以看出 $\pi(P_n)$ 是使 $\binom{k}{2}\geqslant n-2$ 成立的最小正整数 k, 即 $\pi(P_n)$ 是不小于 $f(n)$ 的最小正整数. 容易验证

$$0<g(n)-f(n)<1,\ 0\leqslant h(n)-f(n)<1. \tag{3}$$

当 $\chi'_s(P_n)$ 是奇数时, $\chi'_s(P_n)$ 是不小于 $g(n)$ 的最小奇数, 由(3) 知, 不存在奇数 j, 使 $f(n) \leqslant j < g(n)$ [否则, 有奇数 j_0, 使得 $f(n) \leqslant j_0 < g(n)$, 则 j_0+1 是偶数, 且 $f(n) \leqslant h(n) < j_0+1$, 这说明, $\chi'_s(P_n) \leqslant j_0+1$. 又 $\chi'_s(P_n) \geqslant g(n) > j_0$. 因此只能是 $\chi'_s(P_n) = j_0+1$. 从而 $\chi'_s(P_n)$ 是偶数, 产生矛盾], 所以 $\chi'_s(P_n) = \pi(P_n)$ 或 $\pi(P_n)+1$; 当 $\chi'_s(P_n)$ 是偶数时, $\chi'_s(P_n)$ 是不小于 $h(n)$ 的最小偶数, 由(3) 知, 不存在偶数 j, 使 $f(n) \leqslant j < h(n)$, 所以 $\chi'_s(P_n) = \pi(P_n)$ 或 $\pi(P_n)+1$. □

注意到 P_n 存在 k–VDPEC 当且仅当 $n-2 \in I_k$, 再利用引理1.2.1 和定理1.2.5, 可得到下述定理1.2.6 (Burris 给出的 $\chi'_s(P_n)$ 的另一种表述, 参见参考文献[2]).

定理 1.2.6 设 $n \geqslant 3$, 且 k 是使 $\binom{k}{2} \geqslant n-2$ 的最小正整数, 则

$$\chi'_s(P_n) = \begin{cases} k+1, & k \text{ 是奇数且 } n = \dfrac{k^2-k+4}{2} \text{ 或 } k \text{ 是偶数且 } n > \dfrac{k^2-2k+6}{2}; \\ k, & \text{否则.} \end{cases}$$

引理 1.2.7 设 J_k 为 k 阶完全图 K_k 的全体非平凡闭迹的长度构成的集合.

(i) $J_3 = \{3\}$; 当 $k(\geqslant 5)$ 为奇数时, $J_k = \{3, 4, \cdots, \binom{k}{2}-3, \binom{k}{2}\}$;

(ii) 当 $k(\geqslant 4)$ 为偶数时, $J_k = \{3, 4, \cdots, \dfrac{k(k-2)}{2}\}$.

证明 (i) 设 $k(\geqslant 5)$ 为奇数. 给 K_k 删去一条边或两条边后所得到的图 G 至少含有两个奇点, 所以 G 没有闭 Euler 迹, 因而 $\binom{k}{2}-1$, $\binom{k}{2}-2 \notin J_k$, 即有

$$J_k \subseteq \{3, 4, \cdots, \binom{k}{2}-3, \binom{k}{2}\}.$$

下面对奇数 k 做归纳来证明 $\{3, 4, \cdots, \binom{k}{2}-3, \binom{k}{2}\} \subseteq J_k$.

很容易在 K_5 中找到长分别为 3, 4, 5, 6, 7, 10 的闭迹, 所以 $\{3, 4, 5, 6, 7, 10\} \subseteq J_5$.

设 $k \geqslant 5$, k 是奇数, 且 $\{3, 4, \cdots, \binom{k}{2}-3, \binom{k}{2}\} \subseteq J_k$. 设 K_k 的顶点为 $u_1, u_2, \cdots, u_k$, 而 K_{k+2} 的全体顶点为 $u_1, u_2, \cdots, u_k, a, b$. 显然 $J_k \subseteq J_{k+2}$. 在 K_{k+2} 的由 $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$ 导出的 k 阶完全子图 K_k 中选择一条长为 $\binom{k}{2}$ 的闭迹 T. 从 T 中删去边 $u_{k-1}u_k$, 所得开迹为 T', 其长为 $\binom{k}{2}-1$. 给 T' 分别添加顶点序列为 $u_{k-1}au_k$, $u_{k-1}abu_k$, $u_{k-1}au_{k-2}bu_k$, $u_{k-1}abu_{k-2}au_k$ 的迹, 可得 K_{k+2} 中的长为 $\binom{k}{2}+i$ 的闭迹, 说明 $\binom{k}{2}+i \in J_{k+2}$, $i = 1, 2, 3, 4$. 分别给上述4 个闭迹添加1 至 $\dfrac{k-3}{2}$ 个下述形式的长为4 的闭迹: $av_{2j-1}bv_{2j}a$, $j = 1, 2, \cdots, \dfrac{k-3}{2}$, 所得到的闭迹可说明

$$\binom{k}{2}+5, \binom{k}{2}+6, \cdots, \binom{k+2}{2}-3 \in J_{k+2}.$$

从 K_{k+2} 的由 $u_1, u_2, \cdots, u_k$ 导出的完全子图的长为 $\binom{k}{2}-3$ 的闭迹 T_0 出发可类

似推导出 $\binom{k}{2}-2$, $\binom{k}{2}-1\in J_{k+2}$. 这只需将 T_0 的某条边 uv 替换成长为 2 的迹 uav 或长为3 的迹 $uabv$ 即可.

最后 $\binom{k+2}{2}\in J_{k+2}$, 因为 K_{k+2} 有闭Euler 迹, 其长为 $\binom{k+2}{2}$.

(ii) 设 $k(\geqslant 4)$ 为偶数.

K_k 的至少含 $\dfrac{k^2-2k+2}{2}$ 条边的子图 G 至少有一个度为 $k-1$ 的顶点(因为 G 的平均度至少为 $k-2+\dfrac{2}{k}$). 因而 G 不是Euler 图, 没有闭Euler 迹, 故 $J_k\subseteq\{3,4,\cdots,\dfrac{k^2-2k}{2}\}$.

下面对偶数 $k(\geqslant 4)$ 证明 $\{3,4,\cdots,\dfrac{k^2-2k}{2}\}\subseteq J_k$. 显然 $\{3,4\}\subseteq J_4$.

下设偶数 $k\geqslant 6$. 由(i) 知

$$\{3,4,\cdots,\tbinom{k-1}{2}-3,\tbinom{k-1}{2}\}=J_{k-1}\subseteq J_k.$$

因此以下只需证明 $\{\binom{k-1}{2}-2,\binom{k-1}{2}-1,\binom{k-1}{2}+1,\binom{k-1}{2}+2,\cdots,\dfrac{k^2-2k}{2}\}\subseteq J_k$ 即可. 设 $V(K_k)=\{u_1,u_2,\cdots,u_k\}$. K_k 有一个完美匹配 $M=\{u_1u_2,u_3u_4,\cdots,u_{k-1}u_k\}$. K_k-M 有闭Euler 迹, 它是 K_k 的长为 $\dfrac{k^2-2k}{2}$ 的闭迹. 故 $\dfrac{k^2-2k}{2}\in J_k$. 令 G_3 为 K_k-M 中长为 3 的圈 $u_1u_3u_5u_1$; 对 $4\leqslant l\leqslant\dfrac{k}{2}+1$, 令 G_l 为 K_k-M 中长为 l 的圈 $u_1u_3u_5\cdots u_{2l-3}u_4u_1$. 显然 $E(G_l)\bigcap M=\emptyset$, $3\leqslant l\leqslant\dfrac{k}{2}+1$. 令 $F_l=K_k-(M\bigcup E(G_l))$. 则 F_l 连通且有闭Euler 迹. 这说明 $\binom{k}{2}-(\dfrac{k}{2}+l)\in J_k$, $3\leqslant l\leqslant\dfrac{k}{2}+1$.

边集 $(M-\{u_1u_2\})\bigcup\{u_1u_3,u_2u_3\}$ 及 $(M-\{u_1u_2\})\bigcup\{u_1u_3,u_2u_5,u_3u_5\}$ 在 K_k 中所导出的子图的顶点的度均为奇数, 它们在 K_k 中的补图是连通的且有闭Euler 迹. 因而 $\binom{k}{2}-\dfrac{k}{2}-1$, $\binom{k}{2}-\dfrac{k}{2}-2\in J_k$. □

定理 1.2.8 [4] 设 $k\geqslant 3$, $n\geqslant 3$, 则 $\chi_s'(C_n)=k$ 当且仅当

(i) k 是奇数且 $n=\dfrac{k^2-k}{2}$ 或 $\dfrac{k^2-4k+5}{2}\leqslant n\leqslant\dfrac{k^2-k-6}{2}$;

或者(ii) k 是偶数且 $\dfrac{k^2-3k-2}{2}\leqslant n\leqslant\dfrac{k^2-3k}{2}$ 或 $\dfrac{k^2-3k+4}{2}\leqslant n\leqslant\dfrac{k^2-2k}{2}$.

证明 当 $k=3$ 或4 时, 容易直接验证本定理结论. 下设 $k\geqslant 5$. 设

$$V(C_n)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\},\ E(C_n)=\{v_1v_2,v_2v_3,\cdots,v_{n-1}v_n,v_nv_1\}.$$

则 φ 是 C_n 的 k–VDPEC $\Longleftrightarrow\varphi:E(C_n)\longrightarrow\{1,2,\cdots,k\}$ 是 C_n 的正常边染色, 且

$$\{\varphi(v_{i-1}v_i),\varphi(v_iv_{i+1})\}=S_\varphi(v_i)\neq S_\varphi(v_j)=\{\varphi(v_{j-1}v_j),\varphi(v_jv_{j+1})\},$$

这里 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$, $i\neq j$, 注意 v 的下标取模 n 约简在集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中.

所以 C_n 存在 k–VDPEC 当且仅当 K_k 中存在长为 n 的闭迹. 因而由引理1.2.7 知,

$\chi'_s(C_n)=k \Longleftrightarrow C_n$ 存在 k–VDPEC, 且 C_n 不存在 $(k-1)$–VDPEC

$\Longleftrightarrow n\in J_k$, 但 $n\notin J_{k-1}$

$\Longleftrightarrow$ (i) k 是奇数, $3\leqslant n\leqslant \binom{k}{2}-3$ 或 $n=\binom{k}{2}$, 但 $n\notin\{3,\ 4,\ \cdots,\ \dfrac{(k-1)(k-3)}{2}\}$;

或者 (ii) k 是偶数, $3\leqslant n\leqslant \dfrac{k(k-2)}{2}$ 但 $n\notin\{3,\ 4,\ \cdots,\ \dbinom{k-1}{2}-3,\ \dbinom{k-1}{2}\}$

$\Longleftrightarrow$ (i) k 是奇数, 且 $\dfrac{k^2-4k+5}{2}\leqslant n\leqslant \dfrac{k^2-k-6}{2}$ 或 $n=\dfrac{k^2-k}{2}$;

或者 (ii) k 是偶数, 且 $\dfrac{k^2-3k-2}{2}\leqslant n\leqslant \dfrac{k^2-3k}{2}$ 或 $\dfrac{k^2-3k+4}{2}\leqslant n\leqslant \dfrac{k^2-2k}{2}$.

定理1.2.8得证. □

对奇数 k, 若 C_n 存在 k–VDPEC, 则 $n\leqslant \dfrac{k^2-k-6}{2}$ 或 $n=\binom{k}{2}$, 即有 $k\geqslant \dfrac{1+\sqrt{8n+25}}{2}$ 或 $k^2-k-2n=0$, 即 $k\geqslant 2\lceil\dfrac{\sqrt{8n+25}-1}{4}\rceil+1$ 或 $k=\dfrac{\sqrt{8n+1}+1}{2}$.

对偶数 k, 若 C_n 存在 k–VDPEC, $n\leqslant \dfrac{k(k-2)}{2}$. 即 $k^2-2k-2n\geqslant 0$, $k\geqslant \sqrt{2n+1}+1$, 即 $k\geqslant 2\lceil\dfrac{\sqrt{2n+1}+1}{2}\rceil$.

因而有

$$
\begin{aligned}
\chi'_s(C_n)&=\min\{k\mid C_n \text{ 存在 } k-\text{VDPEC}\}=\min\{k\mid K_k \text{ 中有长为 } n \text{ 的闭迹}\}\\
&=\min\{k\mid n\in J_k\}\\
&=\min\{2\lceil\frac{\sqrt{2n+1}+1}{2}\rceil,\ 2\lceil\frac{\sqrt{8n+25}-1}{4}\rceil+1,\ \frac{\sqrt{8n+1}+1}{2}\}.
\end{aligned}
$$

上式中, 如果 $\dfrac{\sqrt{8n+1}+1}{2}$ 不是奇数, 那么删去 $\dfrac{\sqrt{8n+1}+1}{2}$, 只保留前两个数, 去求最小值即可. 这样, 我们有下述推论.

推论 1.2.9 对 $n(\geqslant 3)$ 阶圈, 有

$$
\chi'_s(C_n)=\min\{2\lceil\frac{\sqrt{2n+1}+1}{2}\rceil,\ 2\lceil\frac{\sqrt{8n+25}-1}{4}\rceil+1,\ \frac{\sqrt{8n+1}+1}{2}\varepsilon\},
$$

其中当 $\dfrac{\sqrt{8n+1}+1}{2}$ 是奇数时, $\varepsilon=1$, 否则, $\varepsilon=\infty$.

仔细分析定理1.2.8 的证明过程，我们有以下推论.

推论 1.2.10 设 $k\geqslant 3$, $n\geqslant 3$, 则

(i) 当 $k(\geqslant 5)$ 是奇数时, $\chi'_s(C_n)\geqslant k\Longleftrightarrow n\geqslant \dfrac{k^2-4k+5}{2}$;