快乐数学宫

苏州大学出版社

快乐数学宫

王安琛　陈光华　王宏晓著

苏州大学出版社
1994年10月

(苏)新登字第 015 号

快乐数学宫

王安琛　陈光华　王宏晓著
苏州大学出版社出版发行
江苏省新华书店经销
丹阳市教育印刷厂
丹阳市陵川北首　邮编:212300
开本 787×1092　1/32　印张　5.625 字数 140 千
1990 年 10 月第 1 版　1994 年 10 月第 1 次印刷
印数 1—10000
ISBN7—81037—102—9/G·30　定价:4.00 元
苏州大学出版社出版的图书若有印刷装订错误,可向承印厂调换

前　言

本书是一本知识性与趣味性相结合的数学课外读物，供四年级以上的小学生和初中学生阅读。可以作为数学兴趣小组教材，也可以作为“数学奥林匹克”、“华罗庚金杯赛”、“希望杯”各种竞赛辅导材料使用。

本书提供较多有趣的数学习题，但与一般的习题集和题解集不同。全书分十章，系统介绍数学知识及常用的数学思考方法。叙述和举例力求深入浅出、循循善诱，使读者感到数学是一门有趣的科学，是一门很实用的科学。

本书除介绍数学知识、训练数学基本功外，还着眼于启迪智慧和培养能力，从而提高读者的数学素质，尽可能让读者在潜移默化中学会数学的思考方法，为今后成材铺平道路。

苏州方正经贸公司热心教育，出资设计监制了一批“数学训练棋”，以便读者在阅读本书第三、四、五、九各章时，可供作数学游戏和学具使用。

在编写本书中，得到秦淦、包湛进、陈学礼、王美玲等老师的大力帮助，谨此致谢。

限于编者水平有限，敬请读者、家长、教师们提出宝贵意见。

编者

1994.4.

第一章　数数看

用自然数计数是学习数学的开始，孩子们都是从数东西学会1，2，3，……进入数学之门的。有时，计数也不是很简单的，要数得不能遗漏，避免重复，数得准确而有效，往往不是一个一个地数，而是摸出规律一批一批地数。还要一边数，一边检验，使计数科学化。

例1　图1—1中，B是线段AC上的一个点。数数看，图中共有几条不同的线段？

图1—1

解　共有3条(不是2条)不同的线段。它们是：AB、AC和BC。

例2　A、B、C、D四个点顺次在一条直线上(图1—2)。问图中共有几条不同的线段？

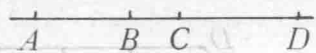

图1—2

解　从A出发，可数得AB、AC、AD三条不同的线段；从B出发，可数得BC、BD两条不同的线段；从C出发，又可数得CD一条线段。这样数既不会遗漏又没有重复。所以，共有$3+2+1=6$条不同的线段。

这里采取一律从左向右去数的方法，是为了避免重复，应注意到AB与BA、AC与CA都是同一条线段。

例3　图1—3中，A、B、C、D、E、F、G共7个点顺次在一条弧

上。数数看，图中有几条不同的弧？

解 可以仍用以上的方法数，共可数得 $6+5+4+3+2+1=21$ 条不同的弧。

但是，这样的数法太费事了！不妨考虑图中共有 7 个点。每一点都可以和其余 6 个点中任一点构成一条弧。但这样去数会产生重复，显然每一条弧都重复数了 2 次（AB 与 BA 重复，AC 与 CA 重复等等）。因而共有 $7\times6\div2=21$ 条不同的弧，与上面得到的结果相同。

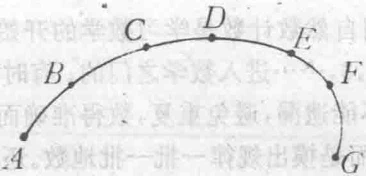

图 1—3

例 4 图 1—4 是全部由平行四边形构成的图形。数数看，图中大大小小不同的平行四边形共有几个？

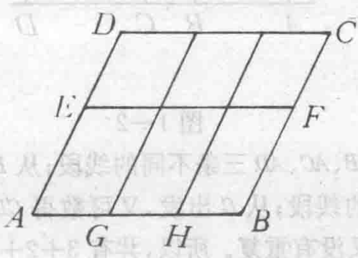

图 1—4

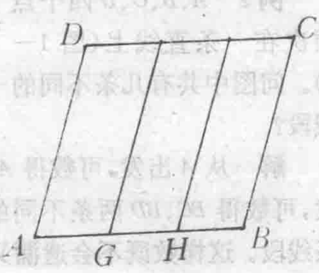

图 1—5

解 先把图形简化一下，去掉图 1—4 中的 EF 后成图 1—5。在底边 AB 上，共有 6 条不同的线段（与例 2 对照），把这 6 条不同的线段的每一条作为底，都有一个不同的平行四边形。而每

个不同的平行四边形添上 EF 以后，都可以得到 3 个不同的平行四边形（与例 1 对照）。

由此可知，共有 $(3+2+1)\times(2+1)=18$ 个不同的平行四边形。

例 5　图 1—6 圆形钉板上有六个钉，用橡皮筋套上其中三个钉可套出一个三角形。问共可以套出几个不同的三角形？

解　六个点可以连出 $6\times5\div2=15$ 条不同的线段，每条线段添上其余四个点中的任意一点，都可以套出一个三角形。但是，每个三角形都重复数了 3 次，如线段 AB 添上 C 点，线段 AC 添上 B 点，线段 BC 添上 A 点，都是同一个三角形 ABC。所以，共可以套出 $6\times5\div2\times4\div3=20$ 个不同的三角形。

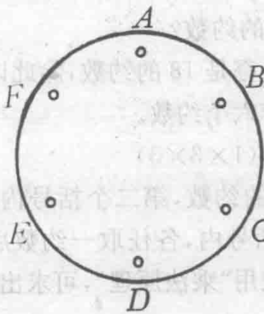

图 1—6

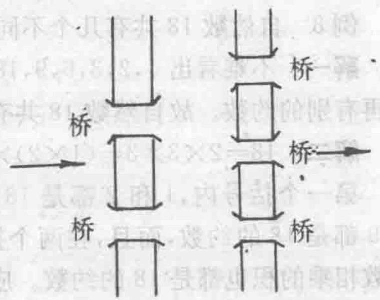

图 1—7

例 6　小明到学校要经过两条河，第一条河上有 2 座桥，第二条河上有 3 座桥（图 1—7），他要试一下，每天换一种过两条河的不同的走法，问要几天，才能走遍所有不同的走法？

解　过第一条河有 2 种不同的走法，对于其中每一种走法，都可以配上过第二条河的 3 种不同的走法，显然共有 $2\times3=6$

种不同的走法。

因此，要 6 天，才能走遍所有不同的走法。

这种解题方法，人们称之为“**乘法原理**”。上面例 3 至例 5 的解法，也是应用了“乘法原理”。

例 7 3 封信投入 4 只邮筒中去，共有几种不同的投法？4 封信投入 3 只邮筒中去，共有几种不同的投法？

解 根据“乘法原理”，第一封信投到 4 只邮筒去，有 4 种不同的投法。对于每一种不同的投法，接着投第二封信时又有 4 种不同的投法。对于前两封信的每种投法，接着投第三封信时，又有 4 种不同的投法。因此，3 封信投入 4 只邮筒中去，共有 $4\times4\times4=64$ 种不同的投法。同样道理，4 封信投入 3 只邮筒中去，共有 $3\times3\times3\times3=81$ 种不同的投法。

例 8 自然数 18 共有几个不同的约数？

解一 不难看出 1，2，3，6，9，18 都是 18 的约数，除此以外，不再有别的约数。故自然数 18 共有六个约数。

解二 $18=2\times3\times3=(1\times2)\times(1\times3\times3)$

第一个括号内，1 和 2 都是 18 的约数，第二个括号内，1、3 和 9 都是 18 的约数，而且，在两个括号内，各任取一约数后，两约数相乘的积也都是 18 的约数。应用“乘法原理”，可求出自然数 18 共有 $2\times3=6$ 个约数。

从数学的角度看，例 6 和例 8 是一模一样的，它们有相同的“**数学模型**”。

例 9 自然数 360 共有几个不同的约数？

解 $360=2\times2\times2\times3\times3\times5=2^3\times3^2\times5$

（注意：2^3 表示 3 个 2 相乘，即 $2\times2\times2=8$，3^2 表示 2 个 3 相乘，即 $3\times3=9$，两者完全不同）

因为1也是360的约数，2^3中有1,2,4,8四个约数(相当于有4座桥)，3^2中有1,3,9三个约数(相当于有3座桥)，5中有1,5两个约数(相当于有2座桥)。这就相当于过三条河的不同走法，因而自然数360共有

$(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=24$个不同的约数。

例10 有2条水路和3条陆路都可进入某个城市，除此之外，不再另外有路。问共有几条不同的进城路线？如果规定要从水路进城，然后从陆路出城，则又有几条不同的进城然后出城的路线？

解 前者走了水路就不再走陆路，走了陆路就不再走水路。这是或者水路、或者陆路的问题。这样的问题不能用"乘法原理"而要用"**加法原理**"去解决。后者是从每条不同的水路进城后，再要从每条不同的陆路出城。应该用"乘法原理"去解决。所以，前者共有$2+3=5$条不同的进城路线。后者共有$2\times3=6$条不同的进城然后出城的路线。

例11 图1—8是某市的局部街道图。从A到B有各种不同的走法。如走$A\to C\to D\to E\to I\to B$；或走$A\to F\to G\to K\to L\to B$等等。问从$A$到$B$共有几种不同走法？(不许走远路，即只能按向东、向南的方向走)

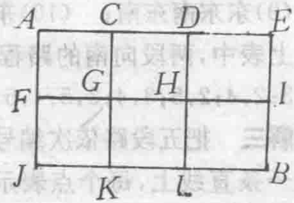

图1—8

解一 从A要走到B，必须经过I或经过L，所以，只要数出A到I有几种不同走法，再数出A到L有几种不同走法，然后应用"加法原理"，就能求出A到B共有几种不同走法。同样道理，要数出A到I有几种不同走

法，又要先数出 A 到 E 和 A 到 H 的不同走法，然后应用“加法原理”等等。

从 A 出发，到 C、D、E 或到 F、J 都只有一种走法，充分应用**“加法原理”**，可以数出从 A 到图中每一点共有几种不同走法(图 1—9)。所以，从 A 到 B 共有 10 种不同走法。

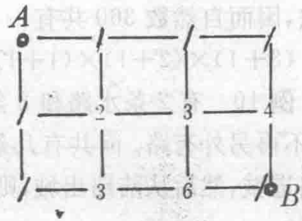

图 1—9

解二 从 A 出发走到 B，必然要向东走三段路，向南走两段路。向东向南的次序不同，走法就不同。列表数一下，也是 10 种不同的走法。

(1)南南东东东； (2)南东南东东；

(3)南东东南东； (4)南东东东南；

(5)东南南东东； (6)东南东南东；

(7)东南东东南； (8)东东南南东；

(9)东东南东南； (10)东东东南南。

上表中，两段向南的路程，其次序分别在 1，2；1，3；1，4；1，5；2，3；2，4；2，5；3，4；3，5；4，5 的位置处。

解三 把五段路依次编号排在一条直线上，每个点表示一段路(图 1—10)。五段路中，向南走有两段路，其余是向东走。两段向南走的序号取定了，就确定了一种走法。如取定①②、①③等等，都表示一种走法。这样一来，问题就成为在 5 个点中，随便取出两个点共有几种不同取法。要数出共有几种不同的走

图 1—10

法，只要数出这五个点，共可连几条不同的线段就可以了。由例3知，共可连 $5\times4\div2=10$ 条不同的线段。因此，从 A 到 B 共有10种不同的走法。

（注意：解一是用了“加法原理”，解三是用了“乘法原理”）

本章习题

1　数数看，图1—11中共有几个三角形？

2　把一条绳对折再对折后，剪一刀，问剪后的绳成几段？

3　A、B、C、D、E、F 六个点在一条直线上（图1—12）。已知 $AB=BC=CE=DF$，问图中有哪几对相等的线段？

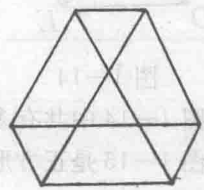

图1—11

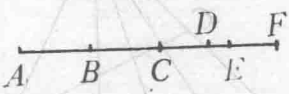

图1—12

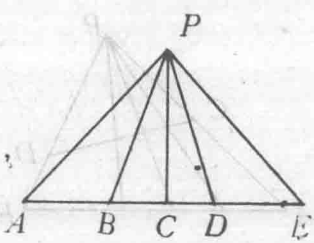

图1—13

4　A、B、C、D、E 五个点在一条直线上（图1—13），P 在直线外。问图中有几个三角形？

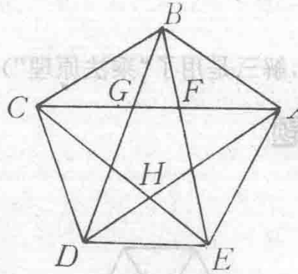

图 1—14

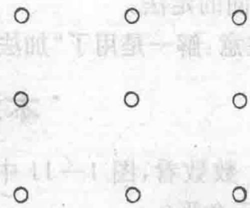

图 1—15

5　图 1—14 中共有多少个三角形？

6　图 1—15 是正方形田字格三三钉板，用橡皮筋在钉板上可套出图形。问：

(1)　可套出几个不同的长方形？其中有几个不同的正方形？(正方形是特殊的长方形)

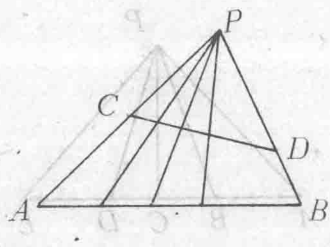

图 1—16

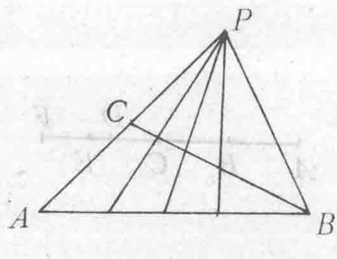

图 1—17

(2)　可套出几个不同的直角三角形？

7　数数看，图 1—16 中，共有几个三角形？

8　图 1—17 中，共有几个三角形？

9　1995 年的第一天(元旦)和最后一天(除夕)都是星期日。问这一年共有几个星期日？

10　一条街道从东端到西端共 360 米长，从东端开始树立电杆，每隔 30 米树一竿，某君住在东端开始的第 5 根电杆处，问他住在西端开始的第几根电杆处？若某君从大门外街道上出发，走到东端需 6 分钟，问同样速度走到西端需几分钟？

11　一次告别宴会有 $n+1$ 个人参加，散会时，每两人握手一次。问一共握手多少次？试用两种不同的方法表示。并从而推出连续数求和公式：

$$1+2+3+\cdots+n=(n+1)\times n\div 2$$

12　在 10×10 的正方格上，有几个 2×2 的正方形？几个 3×3 的正方形？几个 2×3 的长方形？

13　把边长为 10 的等边三角形，每条边十等分后，分成许多小的等边三角形(图 1—18)。问图中有几个边长为 1、边长为 2、边长为 3 的等边三角形？

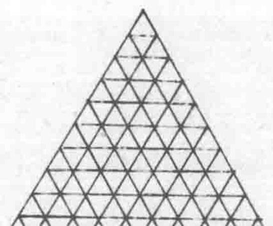

图 1—18

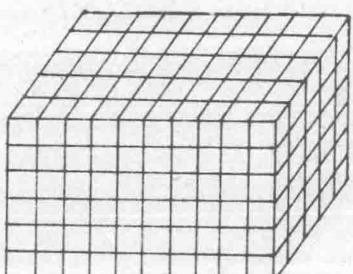

图 1—19

14　一个长方体木块，长 10 厘米，宽 5 厘米，高 6 厘米，表

面全部涂成红色，现在把它锯成边长为1厘米的小正方体（图1—19）。问这些小正方体中：

(1)只有一个面是红色的有多少块？

(2)只有两个面是红色的有多少块？

(3)有三个面是红色的有多少块？

(4)各面都没有红色的有多少块？

15　某班共50人，要在张、王、李三位候选人中推选一人当代表。在开票中途，张得16票，王得10票，李得5票，问张至少再得几票可稳当选为代表？

16　(1)写出100以内共有三个约数的四个自然数；

(2)写出1000以内共有九个约数的八个自然数。

第二章　算算看

计算是学习数学的头等大事。要算得准、算得快、算得灵活。要养成口算、心算、速算、巧算的习惯。本章着重介绍几种简便的算法。

一. 用加法代替乘法

一个数和本身相加，就等于这个数的 2 倍，当一个数乘以 2、4、8……时，往往用连续翻倍的方法代替乘法，以便口算。如

$$18\times8=18\times2\times2\times2=36\times2\times2=72\times2=144$$

一个数乘以 11、101、111、1001 等，可以用错位相加代替乘法。如：

$$234\times11=234\times(10+1)=2340+234=2574;$$

$$234\times101=234\times(100+1)=23400+234=23634;$$

$$\begin{aligned}234\times111&=234\times(100+10+1)\\&=23400+2340+234=25974;\end{aligned}$$

$$234\times1001=234\times(1000+1)=234000+234=234234。$$

因为 $37\times3=111$，$7\times11\times13=1001$，$137\times73=10001$，有时可应用这些算式把复杂的乘法，变为简单的错位相加。如：

$$\begin{aligned}369\times37&=123\times3\times37=123\times(3\times37)=123\times111\\&=12300+1230+123=13653;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}56\times11\times13&=8\times7\times11\times13=8\times(7\times11\times13)\\&=8\times1001=8008;\end{aligned}$$

$$91\times22=13\times7\times11\times2=1001\times2=2002;$$

$365\times4\times137=730\times2\times137=730\times137\times2$
$=100010\times2=200020$。

二. 用减法代替乘法

一个数乘上 9、99、999…时，可以用错位相减代替乘法。如：

$345\times9=345\times(10-1)=345\times10-345$
$=3450-345=3105$；

$345\times99=345\times(100-1)=345\times100-345$
$=34500-345=34155$；

$345\times999=345\times(1000-1)=345\times1000-345$
$=345000-345=344655$。

因为 $142857\times7=999999$，所以 142857 与 7 的倍数相乘时，也可以用错位相减代替乘法运算。如

$142857\times49=142857\times7\times7=999999\times7$
$=(1000000-1)\times7=7000000-7=6999993$。

142857 是一个很有趣的数，它的 2 至 6 倍都是六位数，这些六位数全由 1、4、2、8、5、7 这六个数字首尾循环更替构成。

$142857\times2=285714$；　$142857\times3=428571$；

$142857\times4=571428$；　$142857\times5=714285$；

$142857\times6=857142$；　$142857\times7=999999$。

记住这个性质，对 142857 的乘法能很快算出。如

$142857\times19=142857\times(7\times2+5)=999999\times2$
$+142857\times5=(1000000-1)\times2+714285$
$=2000000-2+714285=2714283$。

三. 两个接近的数相乘，往往可以用凑 10、凑 100 的方法计算，然后加上或减去尾数(或补数)的积。

先看一下多位数乘法的演算。

$$
\begin{array}{r l}
1\ 0\ 3 & \\
\times\ 1\ 0\ 2 & \\
\hline
2\ 0\ 6 & \cdots\cdots 2\times 103 \\
1\ 0\ 3 & \cdots\cdots 100\times 103 \\
\hline
1\ 0\ 5\ 0\ 6 & \cdots\cdots 2\times 103+100\times 103
\end{array}
$$

因为 $2\times 103+100\times 103=2\times(100+3)+100\times 103$

$=2\times 100+2\times 3+103\times 100$

$=(2+103)\times 100+2\times 3$

$=105\times 100+2\times 3=10506$，

所以得较简便的算法如下：

$103\times 102=(103+2)\times 100+2\times 3=10506$；

又，$103\times 98=103\times(100-2)=103\times 100-103\times 2$

$=103\times 100-(100+3)\times 2$

$=103\times 100-2\times 100-3\times 2$

$=(103-2)\times 100-3\times 2=10100-6=10094$；

$97\times 98=97\times(100-2)=97\times 100-97\times 2$

$=97\times 100-(100-3)\times 2$

$=97\times 100-2\times 100+3\times 2$

$=(97-2)\times 100+3\times 2=95\times 100+6=9506$。

实际计算时，就是：

$103\times 102=(103+2)\times 100+3\times 2=10506$；

$103\times 98=(103-2)\times 100-3\times 2=10094$；

$97\times 98=(97-2)\times 100+3\times 2=9506$。

请同学们找一下这种算法的规律。

这样的算法，适用范围较广。如：

$12\times 13=(12+3)\times 10+2\times 3=156$；