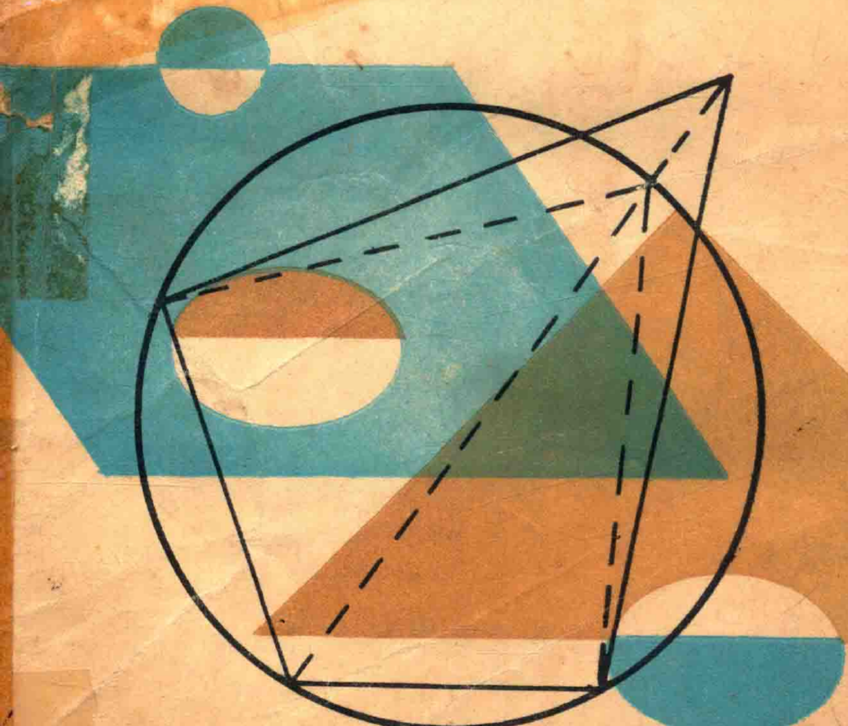
高中数学解题方法与技巧

王性复

福建教育出版社



高中数学解题方法与技巧

王 性 复

福建教育出版社

（闽）新登字02号

高中数学解题方法与技巧

王　性　复

福建教育出版社出版发行

福建省新华书店经销

福建教育出版社印刷厂印刷

787×1092毫米　1/32　11.5印张　239千字

1991年10月第一版　1991年10月第一次印刷

印数：1—5,300

ISBN7－5334－0829－2/G·560　定价：3.90元

内 容 提 要

本书以《中学数学教学大纲》和现行的人民教育出版社出版的高中数学课本为依据，结合编者多年的教学实践，按照教材的顺序编写。每章都先简要地叙述大纲规定的知识要点，然后通过对精选范例的分析，帮助高中学生更好地理解中学数学概念，掌握常用的解题方法和技巧，培养分析问题和解决问题的能力。每章后均配有适量的习题供学生选用。

编 者 的 话

我们知道，“问题是数学的心脏”，要学好数学，就必须做一定数量的习题。通过解题，加深对数学概念的理解，培养分析问题和解决问题的能力。什么是解题？著名数学家波利亚在他的名著《怎样解题》一书中说：数学解题是命题的连续交换，而命题的连续交换又是数学方法反复应用的过程。因此，要提高解题能力，就必须在深刻理解数学概念的基础上，掌握重要的数学方法。

为了帮助高中学生探索解题规律，掌握解题方法，笔者根据多年的教学经验，撰写了这本书。考虑到各年级学生知识背景的不同，提高本书的可读性和实用性，本书按照课本顺序编写。各章先简要地叙述教学大纲规定的知识要点，然后用大量篇幅通过对精选范例的分析，帮助读者理解中学数学中的常用方法（如矛盾转化法，数形结合法，基本量法，变换法，分析法，综合法，反证法，类比法，构造法，参数法，待定系数法，配方法等），以及只对某些问题起作用的特殊的方法和技巧（如不等式证明中的放缩法，三角恒等变形中“1”的代换等）。在各章中还配有一定数量的习题，供读者练习。希望读者在阅读本书时，不要局限于问题本身，而应当着眼于对问题的分析角度和解决问题的通用方法。

编　　者

1990年11月

目　　录

第一部分　代　　数

一　幂函数、指数函数和对数函数

【知识要点】

集合的概念和表示法．常用数集的符号．子集、交集、
$\subset$ $\cap$
$\cup$ 并集、全集、补集、空集．φ

映射，在映射观点下函数的定义．函数的记号、定义域、值域．

函数的性质：单调性、奇偶性、周期性、极值和最值．

一次函数、二次函数、幂函数、指数函数、对数函数的图象和性质．

简单的指数方程和对数方程的解法．

【范例分析与解题方法指导】

例 1　若$A=\{1, 3, x\}$，$B=\{x^2, 1\}$，且$A\cup B=\{1, 3, x\}$，求x．

解　$\because A=\{1, 3, x\}, B=\{x^2, 1\}, A\cup B=\{1, 3, x\}$，

$\therefore x^2=3$或$x^2=x$．

若$x^2=3$，则$x=\pm\sqrt{3}$；

若$x^2=x$，则$x=0$或$x=1$．

但$x=1$时，$x^2=1$与$B=\{x^2, 1\}$矛盾．

$\therefore x=\sqrt{3}$或$x=-\sqrt{3}$或$x=0$．

注　集合的元素有三个性质，即确定性（对于一个给定

的集合，集合中的元素是确定的，这就是说，任何一个对象或者是这个给定集合的元素或者不是它的元素，二者必居其一）、互异性（集合中任何两个元素都是不同的对象）、无序性（表示集合中的元素时，不考虑元素之间的顺序，如$\{0, 1, 3\}$与$\{1, 0, 3\}$表示同一个集合）。本例应用集合中元素的互异性，排除了$x=1$这个解。

例2 设$a\in R$，$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{x\mid x^2-2ax+a+2\leqslant 0\}$。

当$A\supseteq B$时，求a的取值范围。

解 1．若$B=\phi$，显然有$A\supseteq B$。

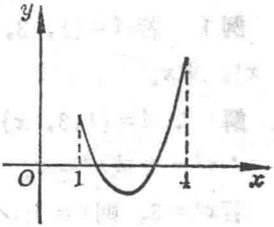
此时不等式$x^2-2ax+a+2\leqslant 0$无解，也就是

$$\Delta=4a^2-4(a+2)<0.$$

解之得，$-1<a<2$。

2．若$B\neq\phi$，要使$A\subseteq B$，必须而且只须关于x的方程$x^2-2ax+a+2=0$的两实根在区间〔1，4〕上。

考虑二次函数$f(x)=x^2-2ax+a+2$。如图，其图象是开口向上的抛物线，顶点横坐标为a。



要使关于x的方程$x^2-2ax+a+2=0$的两实根在区间〔1，4〕上，必须而且只须

$$\begin{cases} f(1)=1-2a+a+2=-a+3\geqslant 0, \\ f(4)=16-8a+a+2=-7a+18\geqslant 0, \\ 1\leqslant a\leqslant 4, \\ \Delta=4a^2-4(a+2)=4(a-2)(a+1)\geqslant 0. \end{cases}$$

解此不等式组，得$2\leqslant a\leqslant\frac{18}{7}$.

综合1、2可知，当$-1<a\leqslant\frac{18}{7}$时，$A\supseteq B$.

注 1．我们把不含任何元素的集合，叫做空集，记为ϕ. 并且规定，空集是任何集合的子集. 在解题中，空集往往起着特殊的作用，应当引起特别的重视.

2．对于有关集合的问题，重要的是识记集合记号．本例对于$B\neq\phi$的情况，把$A\supseteq B$这个条件转化为方程$x^2-2ax+a+2=0$的两实根在〔1，4〕上，又应用数形结合的方法转化为二次函数图象的问题，从而列出a应满足的不等式组，顺利地得到解答.

例3 设$A=\{a_1, a_2, a_3\}$，$B=\{x \mid x\in A\}$，$C=\{x \mid x\subseteq A\}$.

(1) 试用列举法写出集合B和C;

(2) 写出A与B的关系，A与C的关系.

解 (1)据题意，$B=\{a_1, a_2, a_3\}$.

$C=\{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3\}, \phi\}$.

(2) 由(1)可知，$A=B$，$A\in C$.

注 应当注意记号$\in$与$\subseteq$的区别．前者表示元素属于集合，指的是元素与集合之间的关系；后者表示一个集合包含于另一个集合，指的是集合与集合之间的关系．故$B=\{x \mid x\in A\}$表示B中元素具有的属性是都属于A，而$C=\{x \mid x\subseteq$

$A\}$表示C中元素具有的属性是都包含于A，也就是说，C是由B的子集所组成的集合．这里，我们把一个集合作为另一个集合的元素．另外，空集ϕ是任何一个集合的子集，特别地，ϕ是A的子集，故$\phi \in C$。

例 4　集合$A=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \dfrac{y-3}{x-2}=a+1\right\}$，$B=\{(x,\ y)\mid (a^2-1)x+(a-1)y=15\}$，当实数$a$为何值时，$A\cap B=\phi$？

解　由
$$\frac{y-3}{x-2}=a+1, \tag{1}$$
得
$$y-3=(a+1)(x-2).$$

整理，得$(a+1)x-y=2a-1$。　　(2)

考虑方程组
$$\begin{cases}(a+1)x-y=2a-1, & (2)\\ (a^2-1)x+(a-1)y=15. & (3)\end{cases}$$

$(a-1)\times(2)+(3)$　得
$$2(a^2-1)x=2a^2-3a+16. \tag{4}$$

当$a=1$时，方程(3)成为$0x+0y=15$，此时$B=\phi$．故$A\cap B=\phi$。

当$a=-1$时，方程(4)成为$0x=21$，无解．故$A\cap B=\phi$。

又方程(1)是分式方程，它与方程(2)并不是同解方程．

若$a\neq\pm1$，由(4)得
$$x=\frac{2a^2-3a+16}{2(a^2-1)}.$$

当$x=2$，即$\dfrac{2a^2-3a+16}{2(a^2-1)}=2$时，$a=\dfrac{5}{2}$或$a=-4$．此时方程(2)与(3)的公共解并不满足(1)．故此时$A\cap B=\phi$。

综上所述，当$a=1$或$a=-1$或$a=\frac{5}{2}$或$a=-4$时，$A\cap B=\phi$。

注 在解方程中，应注意变形过程是否同解变形。若不是同解变形，则可能产生增根或损根。本例在解分式方程去分母时，可能产生增根，应当加以检验。

例 5 已知奇函数$f(x)$在定义域$(-1,1)$内单调递减，问a取何值时，$f(1-a)+f(1-a^2)<0$成立？

解 $\because f(x)$为奇函数，且在定义域$(-1,1)$内单调递减，

又由$f(1-a)+f(1-a^2)<0$，可得

$$f(1-a)<-f(1-a^2)=f(a^2-1)。$$

$$\therefore \quad \begin{cases} 1-a>a^2-1, & (1) \\ -1<1-a<1, & (2) \\ -1<1-a^2<1. & (3) \end{cases}$$

解由(1)、(2)、(3)组成的不等式组，得$0<a<1$。

注 1. 对等式或不等式作等价变形，往往是解题的关键。本例中，把不等式$f(1-a)+f(1-a^2)<0$变形为$f(1-a)<-f(1-a^2)$，从而能应用函数的奇偶性和单调性列出含a的不等式。

2. 在研究函数的各种问题，如建立函数的解析式、作函数的图象、求函数的最大值或最小值、以及讨论函数的其它性质时，都不可忽略定义域的作用。

例 6 证明定义在对称区间$(-l,l)$上的函数$f(x)$必可表示成一偶函数与一奇函数之和。

分析 欲证此题，只要求出一偶函数$G(x)$与一奇函数$H(x)$，使得

$$G(x)+H(x)=f(x) \tag{1}$$

即可。

这里有两个未知量，却只有一个方程，所以还缺少一个方程。考虑到$f(x)$是定义在对称区间$(-l, l)$上，所以$f(-x)$也是定义在区间$(-l, l)$上的函数，故

$$f(-x)=G(-x)+H(-x)=G(x)-H(x)。$$

即
$$G(x)-H(x)=f(-x)。 \tag{2}$$

由(1)、(2)可得

$$G(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],$$

$$H(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]。$$

证明 因为$f(x)$是定义在$(-l, l)$上的函数，所以$f(-x)$也是定义在$(-l, l)$上的函数。

设
$$G(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],$$

$$H(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]。$$

显然，$G(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=G(x)$，

$$H(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-H(x)。$$

故$G(x)$是偶函数，$H(x)$是奇函数，且

$$f(x)=G(x)+H(x)。$$

于是，$f(x)$可表示为一个奇函数与一个偶函数之和。命

题得证。

注 本例虽然是证明题，但却是通过已知探索未知的典型问题。根据题设条件，分析已知量与未知量之间的等量关系，布列方程，找到证明的思路。本例的解决，体现了“方程观点”的应用，即从对问题中数量关系的分析入手，运用数学语言将数量关系转化为数学模型，使问题得到解决。方程（包括不等式）是已知量与未知量（或参变量）构成的矛盾统一体，是从已知探索未知的桥梁。

例7 已知$f(x)$是定义在〔-6，6〕上的奇函数，且$f(x)$在〔0，3〕上是x的一次式，在〔3，6〕上是x的二次式，当$3\leqslant x\leqslant 6$时，$f(x)\leqslant f(5)=3$，$f(6)=2$。试求$f(x)$的表达式，并作出$y=f(x)$的图象。

解 因为$f(x)$在（3，6）上是x的二次式，且$f(x)\leqslant f(5)=3$，所以（5，3）是此二次函数图象抛物线的顶点坐标。

设此二次式为$f(x)=a(x-5)^2+3$。

$\because f(6)=2$，$\therefore 2=a(6-5)^2+3$，$a=-1$。

故$x\in$〔3，6〕时，$f(x)=-(x-5)^2+3$。

由此推得$f(3)=-1$。

现在来求，当$x\in$〔0，3〕时$f(x)$的表达式。

此时$f(x)$为x的一次式，可设$f(x)=kx+b$（$k\neq 0$，$x\in$〔0，3〕），则

$$f(3)=3k+b=-1. \qquad (1)$$

又$f(x)$在〔-6，6〕上为奇函数，故

$$f(0)=k\cdot 0+b=0。\qquad (2)$$

由(1)、(2)解得$k=-\dfrac{1}{3}$，$b=0$。

故$f(x)$在〔0，3〕上的表达式为$f(x)=-\dfrac{1}{3}x$。

又$x\in$〔-3，0〕时，$-x\in$〔0，3〕，

$$f(x)=-f(-x)=-\left[-\frac{1}{3}(-x)\right]=-\frac{1}{3}x。$$

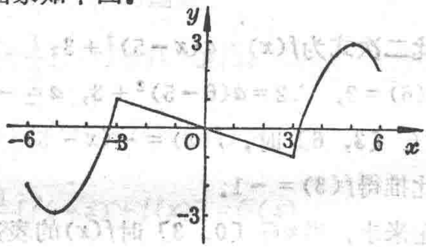
当$x\in$〔-6，-3〕时，$-x\in$〔3，6〕，

$f(x)=-f(-x)=-$〔$(-x-5)^2+3$〕$=(x+5)^2-3$。

综上所述，$f(x)$的表达式如下：

$$f(x)=\begin{cases}-(x-5)^2+3, & x\in〔3,\ 6〕,\\ -\dfrac{1}{3}x, & x\in(-3,\ 3),\\ (x+5)^2-3, & x\in〔-6,\ -3〕.\end{cases}$$

$y=f(x)$的图象如下图。



注 1. 本例用待定系数法求$f(x)$在〔0，3〕上的一次表达式和〔3，6〕上的二次表达式。

如果我们已经判断出所求结果具有某种确定的形式，可以先写出这种形式的数字表达式（如一次函数解析式、二次函数解析式等等），然后通过给定的条件，确定其中一些关

键的系数，这种方法叫做待定系数法，通常可用“方程观点”来求待定系数．一般说来，式子中待定系数的个数与根据题意列出的以待定系数为变元的方程的个数必须相同．

2．奇函数若在$x=0$处有定义，则$f(0)$必等于0．这是因为，若$x=0$，则$-x=0$．由$f(x)$是奇函数，因此$f(-0)=-f(0)$，即$2f(0)=0$，$f(0)=0$．

3．奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于y轴对称．在作函数图象及研究奇偶函数的有关问题时，必须注意这一点．

例 8 若扇形周长为10cm，以半径r为自变量写出扇形面积的解析式$S=f(r)$，并求此函数的定义域与值域．

分析 若扇形半径为r，周长为10(cm)，则弧长等于$10-2r$．

易知，扇形的面积为

$$S=\frac{1}{2}(10-2r)r=(5-r)r.$$

这个函数的定义域是否为$0<r<5$呢？显然，这个结论不符合实际，只要想一想，如果r很小，比如它等于0.001，这个扇形的周长能等于10吗？那么，该如何求出它的定义域呢？

解 易得$S=f(r)=(5-r)r$．

设扇形中心角为θ，则$\theta=\dfrac{10-2r}{r}$．由$0<\theta<2\pi$，得

$0<\dfrac{10-2r}{r}<2\pi$.

由此解得 $$\frac{5}{\pi+1}<r<5。$$

故$S=f(r)$的定义域是$\frac{5}{\pi+1}<r<5$。

再由

$$S=(5-r)\cdot r=-r^2+5r=-\left(r-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4},$$

得当$r=\frac{5}{2}$时，S有最大值等于$\frac{25}{4}$。

故$S=f(r)$的值域为$0<S\leqslant\frac{25}{4}$。

注 1. 在求函数的定义域与值域时，除了考虑函数的解析式外，还应考虑问题的实际意义对自变量取值的限制。

2. 在求函数$f(r)$的值域时，我们用配方法对式子进行等价变换，把$-r^2+5r$变形为$-\left(r-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$，从而求出了值域。配方法是中学数学中常用的变换方法，应当熟练地掌握。

例 9 求函数$y=x-\sqrt{1-2x}$的值域。

分析 函数y的表达式中含有根式，不易直接求出它的值域，我们可以进行变量代换，将函数解析式转化为便于确定它的值域的形式。

解 设$t=\sqrt{1-2x}$，则$x=\frac{1-t^2}{2}$，$t\geqslant 0$。

$$\therefore y=x-\sqrt{1-2x}=\frac{1-t^2}{2}-t$$

$$=-\frac{1}{2}(t+1)^2+1。$$

$\because t\geqslant 0$，$\therefore t=0$时，y有最小值$\frac{1}{2}$。

于是，函数$y=x-\sqrt{1-2x}$的值域为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$。

注 本例应用变量代换法，将含有根式的函数的值域问题化为当自变量取非负值时，二次函数的值域问题，达到了以简驭繁的目的。

一般地，用新的变量代替原有式子中的一些量，使原有的问题转化为关于新变量的问题，达到简化的目的。这种方法称为变量代换法。变量代换法可以化难为易，化繁为简，把待研究的问题转化为已经研究过并已解决的问题。运用变量代换法时，应注意这种代换所应满足的条件，只有在这些条件下，新变量的问题才与原变量的问题等价。如本例中，$t=\sqrt{1-2x}\geqslant 0$是不可忽视的条件。否则，如果认为$y=-\frac{1}{2}(t+1)^2+1$当$t=-1$时有最大值1，从而得出函数的值域为$(-\infty,1]$，则是错误的。

另外，本例若用下述方法来解同样是错误的：

由 $$y=x-\sqrt{1-2x},\tag{1}$$

得 $$(y-x)^2=1-2x.$$

整理得：$$x^2-2(y-1)x+y^2-1=0.\tag{2}$$

$\because x\in R$，$\therefore \Delta=4(y-1)^2-4(y^2-1)\geqslant 0$。

解得，$y\leqslant 1$。故函数的值域为$(-\infty,1]$。

这是因为在脱根号中，把等式两边平方，可能会导致变量允许值范围的扩大。事实上，当$y=1$时，由(2)得$x=0$，