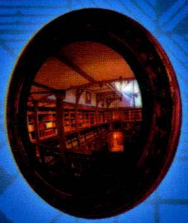
THE WEST OF CHINA
MATHEMATICAL OLYMPIAD TESTS
FROM THE FIRST TO THE LAST



历届中国西部地区
数学奥林匹克试题集

2001～2012

● 刘培杰数学工作室　编

$\sum_1^5 k^5 x_k = a^3$

$\sum_1^5 k^3 x_k = a^2$

$\sum_1^5 kx_k = a$

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

THE WEST OF CHINA
MATHEMATICAL OLYMPIAD TESTS
FROM THE FIRST TO THE LAST

历届中国西部地区数学奥林匹克试题集

2001～2012

● 刘培杰数学工作室　编

$\sum_1^5 k^5 x_k = a^3$

$\sum_1^5 k^3 x_k = a^2$

$\sum_1^5 k x_k = a$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

数学奥林匹克是较高层次的数学竞赛，在数学的发展中起着至关重要的作用. 本书汇集了第1届至第12届中国西部地区数学奥林匹克竞赛试题及解答，内容详实.

本书适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员，高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用.

图书在版编目(CIP)数据

历届中国西部地区数学奥林匹克试题集：2001～2012/刘培杰数学工作室编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014.7

ISBN 978-7-5603-4815-5

Ⅰ.①历… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①数学-竞赛题-题解 Ⅳ.O1-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第139658号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 杜莹雪
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 7 字数 117千字
版 次 2014年7月第1版 2014年7月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4815-5
定 价 18.00元

目录

2001 年第 1 届中国西部地区数学奥林匹克

（陕西　西安）

第 *1* 天

1 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=\frac{1}{2}, x_{n+1}=x_n+\frac{x_n^2}{n^2}$. 证明：$x_{2\,001}<1\,001$.

（李伟固供题）

证明　用数学归纳法证明：对任意 $n\in\mathbf{N}$，均有

$$x_n\leqslant\frac{n}{2} \qquad ①$$

当 $n=1$ 时，由条件知 ① 成立.

设 $n=k$ 时 ① 成立，即

$$x_k\leqslant\frac{k}{2}$$

当 $n=k+1$ 时，有

$$x_{k+1}=x_k+\frac{x_k^2}{k^2}\leqslant\frac{k}{2}+\frac{1}{k^2}\left(\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}<\frac{k+1}{2}$$

故对一切 $n\in\mathbf{N}$，① 都成立.

从而，$x_{2\,001}\leqslant\frac{2\,001}{2}<1\,001$.

2 设四边形 $ABCD$ 是面积为 2 的长方形，P 为边 CD 上的一点，Q 为 $\triangle APB$ 的内切圆与边 AB 的切点. 乘积 $PA \cdot PB$ 的值随着长方形 $ABCD$ 及点 P 的变化而变化，当 $PA \cdot PB$ 取最小值时：

(1) 证明：$AB \geqslant 2BC$；

(2) 求 $AQ \cdot BQ$ 的值.

（罗增儒供题）

证明 (1) 由于 $S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} S_{\text{矩形}ABCD} = 1$，从而

$$\frac{1}{2} PA \cdot PB \sin\angle APB = 1$$

即

$$PA \cdot PB = \frac{2}{\sin\angle APB} \geqslant 2$$

等号只有在 $\angle APB = 90^\circ$ 时成立. 这表明点 P 在以 AB 为直径的圆上，该圆应与 CD 有公共点.

于是，$PA \cdot PB$ 取最小值时，应有 $BC \leqslant \frac{AB}{2}$，即

$$AB \geqslant 2BC$$

(2) 设 $\triangle APB$ 的内切圆半径为 r，则

$$\begin{aligned} PA \cdot PB &= (r + AQ)(r + BQ) \\ &= r(r + AQ + BQ) + AQ \cdot BQ \end{aligned}$$

而

$$PA \cdot PB = 2S_{\triangle APB}$$
$$r(r + AQ + BQ) = S_{\triangle APB}$$

于是

$$AQ \cdot BQ = S_{\triangle APB} = 1$$

3 设 n, m 是具有不同奇偶性的正整数，且 $n > m$. 求所有的整数 x，使得 $\frac{x^{2^n} - 1}{x^{2^m} - 1}$ 是一个完全平方数.

（潘承彪供题）

解 记 $\frac{x^{2^n} - 1}{x^{2^m} - 1} = A^2$，这里 $A \in \mathbf{N}$，则

$$A^2 = \prod_{i=m}^{n-1} (x^{2^i} + 1)$$

注意到对 $i \neq j$，$(x^{2^i} + 1, x^{2^j} + 1) = \begin{cases} 1, 2 \mid x \\ 2, 2 \nmid x \end{cases}$.

情形 1:$2\mid x$,可知 $\forall m\leqslant i\leqslant n-1$,数 $x^{2^i}+1$ 都是完全平方数,于是,只能是 $x=0$;

情形 2:$2\nmid x$, 则 $A^2=2^{n-m}\prod\limits_{i=m}^{n-1}\left(\dfrac{x^{2^i}+1}{2}\right)$. 而 $\left(\dfrac{x^{2^i}+1}{2},\dfrac{x^{2^j}+1}{2}\right)=1$,故必须 $2\mid(n-m)$,矛盾.

综上可知,所求的整数 x 只有一个,即 $x=0$.

4 设 x,y,z 为正实数,且 $x+y+z\geqslant xyz$,求 $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$ 的最小值.

(冯志刚供题)

解 注意到,当 $x=y=z=\sqrt{3}$ 时,$x+y+z=xyz$,而 $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xyz}=\sqrt{3}$.

下面证明 $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$ 的最小值为 $\sqrt{3}$.

事实上,有

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}(x+y+z)^2$$

$$\geqslant\begin{cases}\dfrac{1}{3}(xyz)^2\geqslant\sqrt{3}\,xyz,\text{如果 } xyz\geqslant3\sqrt{3}\\ 3\sqrt[3]{(xyz)^2}\geqslant\sqrt{3}\,xyz,\text{如果 } xyz<3\sqrt{3}\end{cases}$$

故 $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$ 的最小值为 $\sqrt{3}$.

第 2 天

5 求所有的实数 x,使得 $[x^3]=4x+3$. 这里 $[y]$ 表示不超过实数 y 的最大整数.

(杨文鹏供题)

解 设 x 为满足条件的实数,则可设 $x=\dfrac{k}{4}(k\in\mathbf{Z})$,且 $\left[\dfrac{k^3}{64}\right]=k+3$. 于是,$3\leqslant\dfrac{k^3}{64}-k<4$,即

$$192 \leqslant k(k-8)(k+8) < 256 \qquad ①$$

记 $f(k)=k(k-8)(k+8)$，则 $k, k-8, k+8$ 中恰有两个数都小于 0，或都大于 0，即 $-7 \leqslant k \leqslant -1$ 或 $k \geqslant 9$.

又当 $k \geqslant 10$ 时，$f(k) \geqslant 10 \times 2 \times 18 > 256$，矛盾.

故 $k \in \{-7, -6, \cdots, -1, 9\}$.

分别计算，可知满足 ① 的 k 只有两个，即

$$k=-4, -5$$

从而，$x=-\frac{5}{4}$ 或 -1.

6 P 为 $\odot O$ 外一点，过 P 作 $\odot O$ 的两条切线，切点分别为 A, B. 设 Q 为 PO 与 AB 的交点，过 Q 作 $\odot O$ 的任意一条弦 CD. 证明：$\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 有相同的内心.

（刘康宁供题）

证明 如图 1，记 R 为线段 OP 与 $\odot O$ 的交点，E 为 PD 与 $\odot O$ 的交点（不同于 D）.

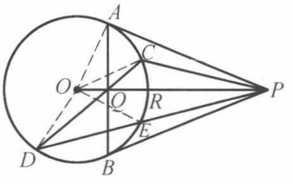


图 1

因为

$$CQ \cdot QD = AQ \cdot QB = AQ^2$$
$$PQ \cdot QO = AQ^2$$

所以

$$CQ \cdot QD = PQ \cdot QO$$

于是，P, C, O, D 四点共圆.

故 $\angle OPC = \angle ODC = \angle OCD = \angle OPD$，即 PO 为 $\angle CPD$ 的平分线.

又由 P, C, O, D 四点共圆，得 $\angle COR = \angle CDE$. 而 $\angle COE = 2\angle CDE$，故 $\angle COR = \angle ROE$，即有 $\overset{\frown}{CR} = \overset{\frown}{RE}$. 从而，$\angle CDR = \angle EDR$. 故 R 为 $\triangle PCD$ 的内心.

又显然 R 为 $\triangle PAB$ 的内心，所以命题成立.

7 求所有的实数 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$，使得

$$(2-\sin 2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

并证明你的结论.

（李胜宏供题）

解 令 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=t$，即 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}t$. 于是，$1+$

$\sin 2x = 2t^2$，即 $\sin 2x = 2t^2 - 1$. 从而有

$$t(3 - 2t^2) = 1 \quad ①$$

即

$$2t^3 - 3t + 1 = 0$$

注意到 $t = 1$ 是上述方程的解，故

$$(t-1)(2t^2 + 2t - 1) = 0$$

由于 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$，所以，$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant t \leqslant 1$.

于是，$2t^2 + 2t - 1 \geqslant 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 > 1$.

从而，方程 ① 有唯一解 $t = 1$.

故原方程有唯一解 $x = \frac{\pi}{4}$.

8 我们称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为集合 A 的一个 n 分划，如果：

(1) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A$；

(2) $A_i \cap A_j \neq \varnothing, 1 \leqslant i < j \leqslant n$.

求最小正整数 m，使得对 $A = \{1, 2, \cdots, m\}$ 的任意一个 14 分划 $A_1, A_2, \cdots, A_{14}$，一定存在某个集合 $A_i (1 \leqslant i \leqslant 14)$. 在 A_i 中有两个元素 a, b 满足 $b < a \leqslant \frac{4}{3}b$.

（冷岗松供题）

解 (1) 若 $m < 56$，令 $A_i = \{a \mid a \equiv i (\bmod 14), a \in A\}$，则 $\forall b < a \in A_i (i = 1, 2, \cdots, 14)$，均有 $56 > a > b$，且 $a - b \geqslant 14$，故 $b \leqslant a - 14 < 42$. 于是

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{a-b}{b} \geqslant 1 + \frac{14}{b} > 1 + \frac{14}{42} = \frac{4}{3}$$

故正整数 $m \geqslant 56$.

(2) 若 $m = 56$，则对 A 的任意分划 $A_1, A_2, \cdots, A_{14}$，数 $42, 43, \cdots, 56$ 中，必有两个数属于同一个 A_i，它们满足 $b \leqslant a \leqslant \frac{4}{3}b$.

综上所述，所求 m 的最小正整数值为 56.

2002 年第 2 届中国西部地区数学奥林匹克

（甘肃　兰州）

中国西部地区数学奥林匹克始于 2001 年，第 2 届西部数学奥林匹克由甘肃省数学会和兰州大学共同承办. 西部数学奥林匹克为我国西部地区的学生提供了一次非常好的展示自己数学才华的机会. 本次竞赛有 16 支队伍共 64 名同学参加，于 2002 年 12 月 3 日至 8 日在兰州大学举行. 成绩前两名的同学获得参加 2003 年 IMO 中国国家集训队的资格.

本次竞赛主试委员会成员为：潘承彪、范先令、李胜宏、冷岗松、熊斌、冯志刚、王海明、赵敦.

第 1 天

2002 年 12 月 4 日　8:00 ~ 12:00

1 求所有的正整数 n，使得

$$n^4-4n^3+22n^2-36n+18$$

是一个完全平方数.

（潘承彪供题）

解　我们记

$$\begin{aligned}A&=n^4-4n^3+22n^2-36n+18\\&=(n^2-2n)^2+18(n^2-2n)+18\end{aligned}$$

令 $n^2-2n=x$，$A=y^2$，y 为非负整数，则

$$(x+9)^2-63=y^2$$

即

$$(x+9-y)(x+9+y)=63$$

可知只能是 $(x+9-y,x+9+y)=(1,63),(3,21)$ 或 $(7,9)$. 分

别得 $(x,y)=(23,31),(3,9)$ 或 $(-1,1)$. 其中只有 $x=3$ 和 -1 时, $n^2-2n=x$ 有正整数解, 得 $n=1$ 或 3.

所以, 满足条件的 $n=1$ 或 3.

评注 此题亦可利用不等式处理.

2 设 O 为锐角 $\triangle ABC$ 的外心, P 为 $\triangle AOB$ 内部一点, P 在 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 上的射影分别为 D, E, F. 求证: 以 FE, FD 为邻边的平行四边形位于 $\triangle ABC$ 内.

(冷岗松供题)

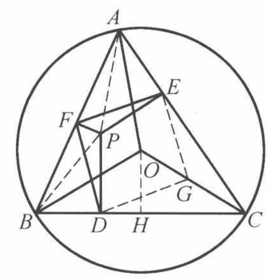


图 1

证明 如图 1, 以 FE, FD 为邻边作平行四边形 $DFEG$. 欲证命题成立, 我们只需证明: $\angle FEG<\angle FEC$, 且 $\angle FDG<\angle FDC$. 这等价于证明: $\angle BFD<\angle BAC$, 且 $\angle AFE<\angle ABC$.

事实上, 过 O 作 $OH\perp BC$, H 为垂足. 由 $PD\perp BC$, $PF\perp AB$, 知 B, F, P, D 四点共圆, 故

$$\angle BFD=\angle BPD$$

而

$$\angle PBD>\angle OBH$$

于是

$$90^\circ-\angle PBD<90^\circ-\angle OBH$$

即

$$\angle BPD<\angle BOH$$

又因为 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 故

$$\angle BOH=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle BAC$$

所以

$$\angle BFD=\angle BPD<\angle BOH=\angle BAC$$

即

$$\angle BFD<\angle BAC$$

同理可证: $\angle AFE<\angle ABC$. 所以命题成立.

评注 如果 O 不是 $\triangle ABC$ 的外心, 而是内心或者垂心, 题中的结论是否成立? 请读者思考.

3 考虑复平面上的正方形, 它的四个顶点对应的复数恰好是某个整系数一元四次方程 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 的四个根. 求这种正方形面积的最小值.

(熊斌供题)

解 设正方形的中心对应的复数为 a, 则将复平面的原点平移到 a 后, 该正方形的顶点均匀分布在一个圆周上, 即它们是方

程$(x-a)^4=b$的解,这里b是某个复数,于是

$$\begin{aligned}&x^4+px^3+qx^2+rx+s\\=&(x-a)^4-b\\=&x^4-4ax^3+6a^2x^2-4a^3x+a^4-b\end{aligned}$$

对比x各次项的系数,可知$-a=\frac{p}{4}$为有理数,再结合$-4a^3=r$为整数,可得a为整数.这样,利用$s=a^4-b$为整数,可知b为整数.

上述讨论表明:该正方形是整系数方程$(x-a)^4=b$的根,于是其外接圆半径$(=\sqrt[4]{|b|})$不小于1.所以,此正方形的面积不小于$(\sqrt{2})^2=2$.而方程$x^4=1$的四个根在复平面上对应于一个正方形的顶点.因此,所求正方形的面积的最小值为2.

评注 利用上述方法可以证明:若一个正n边形的顶点对应的复数是某个整系数方程$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$的$n$个复根,则该正$n$边形的面积的最小值为$\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$.

4 设n为正整数,集合$A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}$是集合$\{1,2,\cdots,n\}$的$n+1$个非空子集.证明:存在$\{1,2,\cdots,n+1\}$的两个不交的非空子集$\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$和$\{j_1,j_2,\cdots,j_m\}$,使得$A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}=A_{j_1}\cup A_{j_2}\cup\cdots\cup A_{j_m}$.

(赵敦供题)

证法1 对n归纳予以证明.

当$n=1$时,$A_1=A_2=\{1\}$,命题成立.

假设命题对n成立,考虑$n+1$的情形.

设$A_1,A_2,\cdots,A_{n+2}$为$\{1,2,\cdots,n+1\}$的非空子集,令$B_i=A_i\backslash\{n+1\}$,$i=1,2,\cdots,n+2$.分如下情形予以证明.

情形1:存在$1\leqslant i<j\leqslant n+2$,使得$B_i=B_j=\varnothing$,则$A_i=A_j=\{n+1\}$,命题获证.

情形2:存在唯一的i,使得$B_i=\varnothing$,不妨设$B_{n+2}=\varnothing$,即$A_{n+2}=\{n+1\}$.此时由归纳假设,存在$\{1,2,\cdots,n+1\}$的两个不交的子集$\{i_1,\cdots,i_k\}$和$\{j_1,\cdots,j_m\}$,使得

$$B_{i_1}\cup\cdots\cup B_{i_k}=B_{j_1}\cup\cdots\cup B_{j_m} \quad ①$$

我们记$C=A_{i_1}\cup\cdots\cup A_{i_k}$,$D=A_{j_1}\cup\cdots\cup A_{j_m}$.那么$C$与$D$至多相差一个元素$n+1$(这由①及$B_i$的定义可知),此时可通过将$A_{n+2}$并入$C$或者$D$使命题获证.

情形3:每一个B_i都不是空集,这时,$B_1,B_2,\cdots,B_{n+1}$为$\{1,

$2,\cdots,n\}$ 的非空子集，由归纳假设可知存在$\{1,2,\cdots,n+1\}$ 的不交子集$\{i_1,\cdots,i_k\}$ 及$\{j_1,\cdots,j_m\}$，使得

$$B_{i_1}\cup\cdots\cup B_{i_k}=B_{j_1}\cup\cdots\cup B_{j_m} \quad ②$$

又因为$B_2,B_3,\cdots,B_{n+2}$ 也是$\{1,2,\cdots,n\}$ 的非空子集，再由归纳假设可知存在$\{2,3,\cdots,n+2\}$ 的不交子集$\{r_1,\cdots,r_u\}$ 及$\{t_1,\cdots,t_v\}$，使得

$$B_{r_1}\cup\cdots\cup B_{r_u}=B_{t_1}\cup\cdots\cup B_{t_v} \quad ③$$

我们仍记 $C=A_{i_1}\cup\cdots\cup A_{i_k}$，$D=A_{j_1}\cup\cdots\cup A_{j_m}$，并记 $E=A_{r_1}\cup\cdots\cup A_{r_u}$，$F=A_{t_1}\cup\cdots\cup A_{t_v}$. 利用 ②，③ 及各 B_i 的定义，可知 C 与 D 至多差一个元素 $n+1$，E 与 F 也至多差一个元素 $n+1$. 如果 $C=D$ 或者 $E=F$，那么命题已成立. 因此只需考虑 $C\neq D$ 且 $E\neq F$ 的情形. 不妨设 $C=D\cup\{n+1\}$，而 $E=F\setminus\{n+1\}$. 这时 $C\cup E=D\cup F$，将 C 与 E 中重复出现的集合合并，D 与 F 中重复出现的集合合并后，我们得到$\{1,2,\cdots,n+2\}$ 的两个子集$\{p_1,\cdots,p_x\}$ 和$\{q_1,\cdots,q_y\}$，使得

$$A_{p_1}\cup\cdots\cup A_{p_x}=A_{q_1}\cup\cdots\cup A_{q_y} \quad ④$$

其中 $G=A_{p_1}\cup\cdots\cup A_{p_x}=C\cup E$，$H=A_{q_1}\cup\cdots\cup A_{q_y}=D\cup F$.

此时，如果$\{p_1,\cdots,p_x\}\cap\{q_1,\cdots,q_y\}=\varnothing$，则命题已成立. 如果存在 $i\in\{p_1,\cdots,p_x\}\cap\{q_1,\cdots,q_y\}$，我们记 $\widetilde{C}=\{A_{i_1},\cdots,A_{i_k}\}$，$\widetilde{D}=\{A_{j_1},\cdots,A_{j_m}\}$，$\widetilde{E}=\{A_{r_1},\cdots,A_{r_u}\}$，$\widetilde{F}=\{A_{t_1},\cdots,A_{t_v}\}$. 并且不妨认定 A_i 不同时属于$\widetilde{C}$ 和$\widetilde{E}$，也不同时属于$\widetilde{D}$ 和$\widetilde{F}$. 于是，只有两种可能.

(1)$A_i\in\widetilde{C}$ 且 $A_i\in\widetilde{F}$. 如果$\widetilde{C}$ 中有两个集合都含有 $n+1$，则 ④ 的左边去掉集合 A_i. 此时由于 A_i 中除可能含有 $n+1$ 外，其余的元素都属于 E(这一点由 ③ 可知)，而且 ④ 的左边有两个集合含 $n+1$，从而，去掉 A_i 后，G 的元素个数并没有减少，式 ④ 仍然是等式. 同样如果$\widetilde{F}$ 中有两个集合含有 $n+1$，则在 ④ 的右边去掉 A_i，式 ④ 仍然成立.

当然，如果$\widetilde{C}$ 与$\widetilde{F}$ 中都只有一个集合含 $n+1$，则在 ④ 的两边都去掉 A_i 后仍然为等式(此时由 ②，③ 知 ④ 的两边不会都变为空集).

(2)$A_i\in\widetilde{D}$ 且 $A_i\in\widetilde{E}$，$n+1\notin A_i$，此时在 ④ 的两边都去掉 A_i 后仍为等式.

上述操作表明，我们有办法使得 ④ 两边各集合的下标$\{p_1,\cdots,p_x\}$ 与$\{q_1,\cdots,q_y\}$ 不交. 所以命题对 $n+1$ 成立.

综上可知，命题成立.

证法 2 这里需要用到下述线性代数中的一个结论：n 维线性空间中的 $n+1$ 个向量是线性相关的.

如果元素 i 在集合 A_j 中，我们就记作 1，否则记为 0，则每个 A_j 对应到一个非零的由 0，1 组成的 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{j_1},a_{j_2},\cdots,a_{j_n})$，这里 $a_{j_i}=\begin{cases}1,i\in A_j\\0,i\notin A_j\end{cases}$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 为 $n+1$ 个 n 维空间向量，所以，存在一组不全为零的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$，使得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=\mathbf{0} \quad ⑤$$

于是，存在 $\{1,2,\cdots,n+1\}$ 的两个不交的非空子集 $\{i_1,\cdots,i_k\}$ 和 $\{j_1,\cdots,j_m\}$，使得

$$x_{i_1}\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+\cdots+x_{i_k}\boldsymbol{\alpha}_{i_k}=y_{j_1}\boldsymbol{\alpha}_{j_1}+\cdots+y_{j_m}\boldsymbol{\alpha}_{j_m} \quad ⑥$$

其中 $x_{i_1},\cdots,x_{i_k}>0,y_{j_1}(=-x_{j_1}),\cdots,y_{j_m}(=-x_{j_m})>0$（这里本质上就是将前面式 ⑤ 中系数大于零的项放一边，而系数小于零的项放到另一边）.

我们断言

$$A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}=A_{j_1}\cup\cdots\cup A_{j_m} \quad ⑦$$

事实上，若元素 $a(1\leqslant a\leqslant n)$ 属于 ⑦ 的左边，则 ⑥ 左边所得和向量的第 a 个分量必大于零，从而迫使 ⑥ 右边所得和向量的第 a 个分量大于零，于是有一个 α_{j_t}，其第 a 个分量为 1，即 $a\in A_{j_t}$. 反过来，也成立，即 ⑦ 成立.

所以，原命题成立.

评注 此题证法 2 是容易而且反应问题本质的，但是需要用到线性代数的一些知识，尽管这些知识仍是初等的，但中学教材中并未涉及. 而证法 1 中，在拿走 $n+1$ 后用归纳假设得出结论后，并不能简单地将 $n+1$ 再补上去. 这个证明是潘承彪教授付出辛苦劳动后得到的.

第 2 天

2003 年 12 月 5 日　8:00 ～ 12:00

5 在给定梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，E 是边 AB 上的动点，O_1,O_2 分别是 $\triangle AED$ 和 $\triangle BEC$ 的外心. 求证：O_1O_2 的长为一定值.

（冷岗松供题）

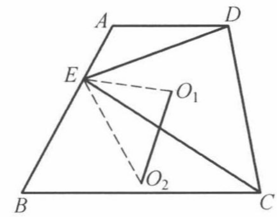


图 2

证明 如图2,联结 EO_1,EO_2,则 $\angle AEO_1=90^\circ-\angle ADE$,$\angle BEO_2=90^\circ-\angle BCE$,于是

$$\angle O_1EO_2=\angle ADE+\angle ECB$$

由于 $AD\parallel BC$,过 E 作 AD 的平行线可证出 $\angle DEC=\angle ADE+\angle BCE$. 所以

$$\angle O_1EO_2=\angle DEC$$

又由正弦定理,可知

$$\frac{DE}{EC}=\frac{2O_1E\sin A}{2O_2E\sin B}=\frac{O_1E}{O_2E}$$

从而,$\triangle DEC\backsim\triangle O_1EO_2$,所以

$$\frac{O_1O_2}{DC}=\frac{O_1E}{DE}=\frac{O_1E}{2O_1E\sin A}=\frac{1}{2\sin A}$$

故 $O_1O_2=\dfrac{DC}{2\sin A}$ 为定值. 命题获证.

评注 一个自然的想法是 O_1,O_2 到 AB 的射影之间的距离为 $\frac{1}{2}AB$ 并且是定值,于是只需证明 O_1O_2 与 AB 的夹角为定值. 这是另一个证明方法的出发点,请读者试证.

6 设 n 是给定的正整数,求所有整数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 满足条件:

(1) $a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n^2$;

(2) $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\leqslant n^3+1$.

(潘承彪供题)

解 设 $(a_1,\cdots,a_n)$ 是满足条件的整数组,则由 Cauchy 不等式,可知

$$a_1^2+\cdots+a_n^2\geqslant\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)^2\geqslant n^3 \qquad ①$$

结合 $a_1^2+\cdots+a_n^2\leqslant n^3+1$,可知只能是 $a_1^2+\cdots+a_n^2=n^3$ 或者 $a_1^2+\cdots+a_n^2=n^3+1$.

如果是前者,那么由 Cauchy 不等式取等号的条件可知 $a_1=\cdots=a_n$,这要求 $a_i^2=n^2$,$1\leqslant i\leqslant n$. 结合 $a_1+\cdots+a_n\geqslant n^2$,可知只能是 $a_1=\cdots=a_n=n$.

如果是后者,则令 $b_i=a_i-n$,就有

$$\begin{aligned}b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2&=\sum_{i=1}^n a_i^2-2n\sum_{i=1}^n a_i+n^3\\&=2n^3+1-2n\sum_{i=1}^n a_i\leqslant 1\end{aligned}$$

于是 b_i^2 只能是 0 或 1，且 $b_1^2,b_2^2,\cdots,b_n^2$ 中至多有一个为 1. 若 $b_1^2,\cdots,b_n^2$ 都为零，则 $a_i=n$，$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=n^3\neq n^3+1$，矛盾；若 $b_1^2,\cdots,b_n^2$ 中恰有一个为 1，则 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=n^3\pm 2n+1\neq n^3+1$，亦得矛盾.

综上可知，只能是 $(a_1,\cdots,a_n)=(n,\cdots,n)$.

7 设 α,β 为方程 $x^2-x-1=0$ 的两个根，令

$$a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta},\quad n=1,2,\cdots$$

(1) 证明：对任意正整数 n，有 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$；

(2) 求所有正整数 $a,b,a<b$，满足对任意正整数 n，有 b 整除 a_n-2na^n.

（李胜宏供题）

解 (1) 注意到 $\alpha+\beta=1,\alpha\beta=-1$，故

$$\begin{aligned}\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}&=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n-\beta^n)\\&=(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})+(\alpha^n-\beta^n)\end{aligned}$$

两边同时除以 $\alpha-\beta$，就有 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

(2) 由条件，可知 $b\mid a_1-2a$，即 $b\mid 1-2a$. 而 $b>a$，故 $b=2a-1$. 并且对任意正整数 n，有

$$b\mid a_n-2na^n$$

$$b\mid a_{n+1}-2(n+1)a^{n+1}$$

$$b\mid a_{n+2}-2(n+2)a^{n+2}$$

结合 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 及 $b=2a-1$ 为奇数，可知

$$b\mid (n+2)a^{n+2}-(n+1)a^{n+1}-na^n$$

而 $(b,a)=1$，所以

$$b\mid (n+2)a^2-(n+1)a-n \tag{①}$$

在 ① 中取 n 为 $n+1$，就有

$$b\mid (n+3)a^2-(n+2)a-(n+1) \tag{②}$$

将式 ① 与式 ② 右边相减，可知

$$b\mid a^2-a-1$$

即

$$2a-1\mid a^2-a-1$$

故

$$2a-1\mid 2a^2-2a-2$$

而

$$2a^2\equiv a(\bmod 2a-1)$$