卓越工程技术人才培养特色教材

DAXUE SHUXUE
LITI YU XITI

大学数学例题与习题

主　编　李志林

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

卓越工程技术人才培养特色教材

大学数学例题与习题

主　编　李志林

副主编　涂庆伟　王　强

参　编　吴建成　费忠华　沈永梅

　　　　刘　佳　黄清龙

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

镇　江

图书在版编目(CIP)数据

大学数学例题与习题 / 李志林主编. — 镇江：江苏大学出版社，2015.9
ISBN 978-7-5684-0008-4

Ⅰ.①大… Ⅱ.①李… Ⅲ.①高等数学—高等学校—习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 207850 号

大学数学例题与习题

主　　编/李志林
责任编辑/吴昌兴
出版发行/江苏大学出版社
地　　址/江苏省镇江市梦溪园巷 30 号(邮编：212003)
电　　话/0511-84446464(传真)
网　　址/http://press.ujs.edu.cn
排　　版/镇江文苑制版印刷有限责任公司
印　　刷/虎彩印艺股份有限公司
经　　销/江苏省新华书店
开　　本/718 mm×1 000 mm　1/16
印　　张/20.75
字　　数/394 千字
版　　次/2015 年 9 月第 1 版　2015 年 9 月第 1 次印刷
书　　号/ISBN 978-7-5684-0008-4
定　　价/42.00 元

江苏省卓越工程技术人才培养特色教材建设

指导委员会

序

深化高等工程教育改革、提高工程技术人才培养质量，是增强自主创新能力、促进经济转型升级、全面提升地区竞争力的迫切要求。近年来，江苏高等工程教育飞速发展，全省46所普通本科院校中开设工学专业的学校有45所，工学专业在校生约占全省普通本科院校在校生总数的40%，为“十一五”末江苏成功跻身全国第一工业大省做出了积极贡献。

“十二五”时期是江苏加快经济转型升级、发展创新型经济、全面建设更高水平小康社会的关键阶段。教育部“卓越工程师教育培养计划”启动实施以来，江苏认真贯彻教育部文件精神，结合地方高等教育实际，着力优化高等工程教育体系，深化高等工程教学改革，努力培养造就一大批创新能力强、适应江苏社会经济发展需要的卓越工程技术后备人才。

教材建设是人才培养的基础工作和重要抓手。培养高素质的工程技术人才，需要遵循工程技术教育规律，建设一套理念先进、针对性强、富有特色的优秀教材。随着知识社会和信息时代的到来，知识综合、学科交叉趋势增强，教学的开放性与多样性更加突出，加之图书出版行业体制机制也发生了深刻变化，迫切需要教育行政部门、高等学校、行业企业、出版部门和社会各界通力合作，协同作战，在新一轮高等工程教育改革发展中抢占制高点。

2010年以来，江苏大学出版社积极开展市场分析和行业调研，先后多次组织全省相关高校专家、企业代表就应用型本科人才培养和教材建设工作进行深入研讨。经各方充分协商，拟定了“江苏省卓越工程技术人才培养特色教材”开发建设的实施意见，明确了教材开发总体思路，确立了编写原则：

一是注重定位准确，科学区分。教材应符合相应高等工程教育的办学定位和人才培养目标，恰当把握与研究型工程人才、设计型工程人才及技能型工程人才的区分度，增强教材的针对性。

二是注重理念先进，贴近业界。吸收先进的学术研究与技术成果，适应经济转型升级需求，适应社会用人单位管理、技术革新的需要，具有较强的领先性。

三是注重三位一体，能力为重。紧扣人才培养的知识、能力、素质要求，着力培养学生的工程职业道德和人文科学素养、创新意识和工程实践能力、国际视野和沟通协作能力。

四是注重应用为本，强化实践。充分体现用人单位对教学内容、教学实践设计、工艺流程的要求以及对人才综合素质的要求，着力解决以往教材中应用性缺失、实践环节薄弱、与用人单位要求脱节等问题，将学生创新教育、创业实践与社会需求充分衔接起来。

五是注重紧扣主线，整体优化。把培养学生工程技术能力作为主线，系统考虑、整体构建教材体系和特色，包括合理设置课件、习题库、实践课题以及在教学、实践环节中合理设置基础、拓展、复合应用之间的比例结构等。

该套教材组建了阵容强大的编写专家及审稿专家队伍，汇集了国家教学指导委员会委员、学科带头人、教学一

线名师、人力资源专家、大型企业高级工程师等。编写和审稿队伍主要由长期从事教育教学改革实践工作的资深教师、对工程技术人才培养研究颇有建树的教育管理专家组成。在编写、审定教材时，他们紧扣指导思想和编写原则，深入探讨、科学创新、严谨细致、字斟句酌，倾注了大量的心血，为教材质量提供了重要保障。

该套教材在课程设置上基本涵盖了卓越工程技术人才培养所涉及的有关专业的公共基础课、专业公共课、专业课、专业特色课等；在编写出版上采取突出重点、以点带面、有序推进的策略，成熟一本出版一本。希望大家在教材的编写和使用过程中，积极提出意见和建议，集思广益，不断改进，以期经过不懈努力，形成一套参与度与认可度高、覆盖面广、特色鲜明、有强大生命力的优秀教材。

江苏省教育厅副厅长 丁晓昌

2012 年 8 月

前 言

“高等数学”和“微积分”是大学数学的重要课程，是高等院校的重要基础理论课.我们深感编写一本配合教材，能对学生所学概念、方法进一步深化，能解决学生学习过程中碰到的疑问和困难的指导书是非常必要的.为此，我们编写了《大学数学例题与习题》以满足普通院校学生学习大学数学的需要.

本书的特点是注重基础，例题丰富，由浅入深，难度适中，并配备了大量具有一定梯度的习题，适用于普通院校不同专业、不同水平学生的要求.

本书内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分应用、常微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数，主要结合大学数学的具体内容和典型例题进行分析，引导学生把掌握数学内容和方法结合起来，对疑难问题、解题思路、方法和技巧进行指导.每一章的内容按“基本要求”、“内容提要”、“释疑解难”、“典型例题”和“习题及答案”等部分编写.对大学数学的知识点进行了系统梳理，对学习中疑难问题进行了简洁地辨析，对精选的不同风格的例题给出了详细解答，习题编排重在覆盖知识点，吸收了近年来的创新成果，对习题的解题要点、技巧、关键和易错的地方给出了重要提示，以期培养和提升学生的分析能力和发散思维能力.

参加本书编写的人员有：李志林、涂庆伟、王强、吴建成、费忠华、黄清龙、刘佳、沈永梅.

限于我们的水平和经验，对本书存在的不妥之处，恳切希望广大师生批评指正.

编 者

目　录

第一章　函数与极限

第一节　基本要求

1. 理解函数的概念.

2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

3. 理解复合函数的概念,了解反函数的概念.(经济类)了解经济学中常用的一些函数.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.

5. 会根据实际问题建立简单的函数关系式.

6. 了解各种极限的直观定义.

7. 掌握极限四则运算法则.

8. 了解两个极限存在准则(夹逼准则和单调有界准则),会用两个重要极限求极限.

9. 了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念,会用等价无穷小求极限.

10. 理解函数在一点连续的概念.

11. 了解间断点的概念,并会判别间断点的类型.

12. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(介值定理、最大值和最小值定理).

第二节　内容提要

一、主要定义

1. 设 x 和 y 是两个变量,对任意 $x\in D\subset\mathbf{R}$,变量 $y\in\mathbf{R}$,按照一定的法则 f 总有确定的数值与其对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$. 称 D 为 $f(x)$的定义域,x 称为自变量,y 称为因变量. 数集 $W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$称为函数的值域.

2. 函数的几种特性.

设函数 $f(x)$的定义域为 D.

(1) 若对任意 $x\in D$, $f(x)=f(-x)$恒成立,则称 $f(x)$为偶函数.

(2) 若对任意 $x\in D$, $f(x)=-f(-x)$恒成立,则称 $f(x)$为奇函数.

(3) 若存在 $T\neq 0$,对任意 $x\in D$,有$(x\pm T)\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$为周期函数,T 为其周期,使等式成立的最小正值 T 称为最小正周期.

(4) 设区间 $I\subset D$. 若对任意 $x_1, x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$在区间 I 上是单调增加(减小)的.

(5) 设数集 $Z\subset D$. 若存在 $M>0$,使对任意 $x\in Z$,都有$|f(x)|\leqslant M$,则称$f(x)$在 Z 上有界,否则称 $f(x)$在 Z 上无界.

3. 设 $\delta>0$,点 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)\xlongequal{\text{def}}\{x\mid |x-a|<\delta\}$. 点 a 的去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)\xlongequal{\text{def}}\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$.

4. 设 $y=f(u)$的定义域为 D_1, $u=\varphi(x)$的定义域或定义域的非空子集为 D_2,值域为 W_2,且 $W_2\subset D_1$,那么对任意 $x\in D_2$,有确定的值 y,通过 $u=\varphi(x)$按照规则 $y=f(u)$与其对应,则称此函数为由 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数.

5. 基本初等函数是指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数.

6. 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的且可用一个式子表示的函数统称为初等函数.

7. 对于数列$\{x_n\}$,如果当 n 无限增大时(即 $n\to\infty$时),对应的 x_n 无限接近于某一个确定的数值 a,则 a 就称为数列$\{x_n\}$的极限(或数列$\{x_n\}$当 $n\to\infty$时收敛于 a),记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,或 $x_n\to a(n\to\infty)$.

如果数列$\{x_n\}$极限不存在,就称数列$\{x_n\}$是发散的.

8. 如果函数 $f(x)$在 $x\to\infty$的过程中,对应的函数值 $f(x)$无限接近于确定的数值 A,那么 A 称为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限,记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

如果函数 $f(x)$在 $x\to+\infty(x\to-\infty)$的过程中,对应的函数值 $f(x)$无限接近于确定的数值 A,那么 A 称为函数 $f(x)$当 $x\to+\infty(x\to-\infty)$时的极限,记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A)$.

9. 如果函数 $f(x)$在 x_0 的某去心邻域是有定义的,且当 x 无限接近 x_0 时,即 $x\to x_0$ 时,对应的函数值 $f(x)$无限接近于某一个数值 A,那么 A 就称为函数 $f(x)$当 x 趋向于 x_0 时的极限,记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

如果函数 $f(x)$在 x_0 的某去心右(左)邻域是有定义的,且当 x 大于(小于)x_0 而无限接近 x_0 时,即 $x\to x_0^+(x\to x_0^-)$时,对应的函数值 $f(x)$无限接近于某一个数值 A,那么 A 就称为函数 $f(x)$当 x 趋向于 x_0 时的右(左)极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=$

$A(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A)$，或 $f(x_0^+)=A(f(x_0^-)=A)$.

10. 无穷大与无穷小

如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$，那么称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（$x\to\infty$）时为无穷小，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$（或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$）.

如果在 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的过程中，$|f(x)|$ 无限增大，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$）.

注： 在下面的讨论中，当定理对 $x\to x_0$ 及 $x\to\infty$ 都成立时，则省略"lim"下面自变量的变化过程，简记作 lim.

11. 无穷小的比较：以下 $\alpha(x)$ 及 $\beta(x)$ 都是在同一个自变量变化过程中的无穷小，$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 也是在这个变化过程中的极限.

当 $\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=0$ 时，若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$；若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小；若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(C\neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小；若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

12. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，若 $y=f(x)$ 在 x_0 处有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

13. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义（x_0 可除外），若 $f(x)$ 满足下列条件之一，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，x_0 称为不连续点或间断点.

(1) $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处无定义.

(2) 虽在 $x=x_0$ 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

(3) 虽在 $x=x_0$ 处有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

具有左、右极限的间断点称为第一类间断点，否则称为第二类间断点，极限存在的间断点称为可去间断点.

二、主要定理与公式

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，则数列 $\{x_n\}$ 有界.

2. 极限存在则必唯一.

3. 若$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则有

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,$$
$$\lim[f(x)g(x)]=AB,$$
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

4. 极限存在判别准则.

(1) 单调有界数列必有极限.

(2) 夹逼准则：若 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$(此夹逼准则对函数极限也成立).

5. 在同一变化过程中，有界变量与无穷小的乘积是无穷小；有限个无穷小的和是无穷小.

6. 等价无穷小具有传递性：设 α,β,γ 为同一过程的无穷小，若 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$.

7. 求极限过程中可用等价无穷小替换. 例如，在同一过程中，若 $\alpha\sim\bar{\alpha},\beta\sim\bar{\beta}$，且$\lim\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$存在，则$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$.

8. $\lim f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，这里 $\lim\alpha(x)=0$.

9. 两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

10. 若在$\mathring{U}(x_0,\delta)$内 $f(x)\geqslant 0(f(x)\leqslant 0)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant 0(A\leqslant 0)$.

11. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0(A<0)$，则必存在$\mathring{U}(x_0,\delta)$，使在此邻域内 $f(x)>0(f(x)<0)$.

12. 初等函数在其定义区间上连续.

13. 闭区间上的连续函数有下列性质：

(1) 函数有最大值与最小值.

(2) 函数有界.

(3) 函数满足介值定理：任取介于最大值与最小值之间的数，必有与之相等的函数值. 特别地，函数满足零点定理：若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则必有 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

三、结论补充

1. 当 $x\to 0$ 时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim \mathrm{e}^x-1\sim\ln(1+x)$，

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$.

注: x 可用无穷小代替. 如 $\lim\varphi(x)=0$,则 $\sin\varphi(x) \sim \varphi(x)(\varphi(x)\to 0)$.

2. 不为零的无穷小的倒数为无穷大,无穷大的倒数为无穷小.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n>m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$

4. $f(x)$在 x_0 处连续$\Leftrightarrow f(x_0), f(x_0^-), f(x_0^+)$存在且相等.

5. 若 $f(x)$在 x_0 处连续,则$|f(x)|$在 x_0 处也连续;反之不成立.

6. 关于极限存在的命题:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0^+)=f(x_0^-)=A$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

(3) 若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$;反之不然.

注: 利用此命题在第三章中可将数列极限转化为函数极限,用洛必达法则求解.

7. 若存在数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$(其中 $x_n, y_n\in D, n=1,2,\cdots$),$x_n\to x_0$,$y_n\to x_0$,使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to+\infty}f(y_n)$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在,亦不可能是无穷大量.

第三节　释疑解难

例 1　因为 $f(x)$在区间$[a,b]$上单调增加,$g(x)$在$[a,b]$上单调增加,所以 $f(x)g(x)$在$[a,b]$上单调增加.

分析:两个单调增加的函数的积不一定为单调增加的,如$f(x)=-\frac{1}{x}$,$g(x)=x^2$,在$(0,+\infty)$上它们的积不是单调增加的.

例 2　当 $n\to\infty$时,由$|x_n|\to 0$,可推出 $x_n\to 0$,所以由$|x_n|\to A$ 可推出 $x_n\to A$.

分析:$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$ 是$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 成立的充分必要条件,但$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=A$ 不是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 成立的充分必要条件. 例如,$x_n=(-1)^n$,$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=1$,但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

例 3　因为极限存在必有界,所以若$\lim f(x)$存在,则 $f(x)$必为有界的.

分析:极限存在必有界是对数列而言的,对于函数而言此结论不成立,如 $f(x)=\frac{1}{x}$,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$,但$\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上无界.

例 4 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1.$

分析：错误地利用公式$\lim\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$. 仅当 $\varphi(x)\to 0$ 时才有$\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}\to 1$.

正确解法如下：

因为 x 为无穷小，$\sin\dfrac{1}{x}$为有界量，所以$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

例 5 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0.$

分析：第一个等号不成立. 等式 $\lim f(x)g(x)=\lim f(x)\lim g(x)$只有当两个函数极限都存在时才能成立，否则不成立. 第二个等号后的运算无意义，因为$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$是无意义的量，正确的解法见例 4.

例 6 函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2-1}$在 $x=-1$ 时为第二类间断点.

分析：$x=-1$ 不在函数的定义域内，故 $x=-1$ 不是函数的间断点.

例 7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{ax}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]^{\lim\limits_{x\to\infty} ax}=1^{\infty}=1.$

正确解法如下：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{a}=\mathrm{e}^{a}.$$

例 8 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}\right)=\infty-\infty=0.$

分析：第一个等号不成立，只有当两个极限都存在时上式才成立. 第二个运算没有意义(非数的运算).

正确解法如下：

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x^2}=\infty.$$

例 9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0.$

分析：只有两个无穷小之比的极限才可用等价无穷小代替，其他运算不可随便用等价无穷小代替.

正确解法如下：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\ \frac{\cos x-1}{x^2}\ \frac{1}{\cos x}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$